УДК 517.922

М. С. Филипковская

(Физ.-техн. ин-т низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков. нац. ун-т им. В. Н. Каразина)

УСТОЙЧИВОСТЬ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛАГРАНЖУ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ПРИЛОЖЕНИЯ*

We consider an nonregular (singular) semilinear differential-algebraic equation $\frac{d}{dt}[Ax] + Bx = f(t,x)$ and prove the theorems on Lagrange stability and instability. The theorems give sufficient conditions for the existence, uniqueness, and boundedness of a global solution of the Cauchy problem for the semilinear differential-algebraic equation and sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution with finite escape time for the analyzed Cauchy problem (this solution is defined on a finite interval and unbounded). The proposed theorems do not contain constraints similar to the global Lipschitz condition. This enables us to use them for solving more general classes of applied problems. Two mathematical models of radioengineering filters with nonlinear elements are studied as applications.

Розглядається нерегулярне (сингулярне) напівлінійне диференціально-алгебраїчне рівняння $\frac{d}{dt}[Ax]+Bx = f(t,x)$. Доведено теореми про стійкість та нестійкість за Лагранжем, які дають достатні умови існування, єдиності та обмеженості глобального розв'язку задачі Коші для напівлінійного диференціально-алгебраїчного рівняння і достатні умови існування та єдиності розв'язку зі скінченним часом визначення (розв'язок є визначеним на скінченному інтервалі та необмеженим) для цієї задачі Коші. Теореми не містять обмежень типу глобальної умови Ліпшиця, що дозволяє застосовувати їх при розв'язанні більш широких класів прикладних задач. Як застосування досліджено дві математичні моделі радіотехнічних фільтрів із нелінійними елементами.

1. Введение. Полулинейные дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ) используются для описания математических моделей в радиоэлектронике (см., например, [1 – 3] и приведенную в них библиографию), экономике, робототехнике [4], теории управления [1, 5], химической кинетике и других областях. ДАУ называются также дескрипторными, алгебро-дифференциальными и вырожденными дифференциальными уравнениями.

В настоящей статье доказаны теоремы об устойчивости и неустойчивости по Лагранжу (см. определения 5 – 7) полулинейного ДАУ $\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t,x(t))$ с сингулярным пучком $\lambda A + B$ операторов $A, B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Теоремы дают достаточные условия существования и единственности глобальных решений задачи Коши, а также условия ограниченности глобальных решений (устойчивость по Лагранжу); достаточные условия существования и единственности решений с конечным временем определения для задачи Коши (неустойчивость по Лагранжу). Теоремы не содержат ограничений типа глобального условия Липшица, что позволяет применять их при решении более широких классов прикладных задач. Кроме того, теоремы имеют ряд преимуществ, о которых будет сказано ниже. В п. 5 полученные теоретические результаты применены при исследовании математических моделей нелинейных радиотехнических фильтров.

Во многих работах (см., например, [2, 3, 5 – 9]) изучалась устойчивость линейных ДАУ и дескрипторных систем управления, которые описываются линейными ДАУ. R. März [10] и

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект Ф 83/45808).

C. Tischendorf [8] исследовали устойчивость по Ляпунову точки равновесия x^* соответственно автономного полулинейного ДАУ вида $A\dfrac{d}{dt}x(t) + g(x(t)) = 0$ $(g(x^*) = 0)$ и автономного нелинейного ДАУ вида $f\left(\dfrac{d}{dt}x(t), x(t)\right) = 0$ $(f(0, x^*) = 0)$. Полученные в [8, 10] теоремы позволяют доказать существование и единственность глобальных решений только в некоторой (достаточно малой) окрестности точки равновесия. Теорема 1 из п. 4 позволяет доказать существование и единственность глобальных решений полулинейного ДАУ $\dfrac{d}{dt}[Ax] + Bx = f(t, x)$ для всех возможных начальных точек (см. замечание 1), т. е. независимо от наличия и количества точек равновесия. Кроме того, R. März и C. Tischendorf требовали, чтобы ДАУ имело индекс 1. Это требование является слишком ограничительным (поскольку накладывает определенные глобальные ограничения на производную нелинейной части уравнения) для практических приложений, рассматриваемых в настоящей статье, и не используется в ней. Результаты, полученные R. März, использовались в [11] при исследовании устойчивости по Ляпунову нулевого решения полулинейного ДАУ при дополнительных упрощениях для нелинейной части уравнения. В теореме 6.16 [2] для некоторого глобального решения неавтономного нелинейного регулярного ДАУ индекса 1 приводятся условия устойчивости по Ляпунову, которую также можно рассматривать лишь локально (в достаточно малой окрестности этого решения). В условиях указанной теоремы предполагается, что нелинейное ДАУ имеет глобальное решение, а линеаризованное вдоль этого решения ДАУ является сильно сжимающим. Некоторые вопросы относительно явления потери устойчивости квазилинейных ДАУ рассмотрены в [12].

Важно отметить, что даже для обыкновенного дифференциального уравнения с нелинейной частью из устойчивости по Ляпунову нетривиального (не равного тождественно нулю) решения не следует его устойчивость по Лагранжу (ограниченность на всей области определения). Кроме того, в общем случае из неустойчивости по Ляпунову решения не следует его неустойчивость по Лагранжу, а обратное утверждение справедливо.

В монографии [13] доказаны теорема об устойчивости по Лагранжу обыкновенного дифференциального уравнения $\dfrac{d}{dt}x = f(t, x)$, $t \geq 0$, где устойчивость по Лагранжу уравнения означает ограниченность всех его решений (при $t \geq 0$), и теорема о существовании решений с конечным временем определения. Эти результаты используются в настоящей статье для получения условий устойчивости и неустойчивости по Лагранжу полулинейного ДАУ. Условия существования и единственности ограниченного на всей вещественной оси решения нелинейного дифференциально-функционального уравнения получены в [14]. Устойчивость по Лагранжу дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом, которое описывает мемристорную нейронную сеть, изучена в [15].

В статье будем использовать следующие обозначения: $L(X, Y)$ — пространство ограниченных линейных операторов, действующих из X в Y, $L(X, X) = L(X)$; E_X — единичный оператор в пространстве X; $rk(\lambda A + B)$ — ранг пучка $\lambda A + B$ операторов (матриц) A, B; $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty$ означает, что интеграл сходится, $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\,dt = \infty$ означает, что интеграл расходится; $A|_X$ — сужение оператора A на пространство X.

2. Постановка задачи и основные определения. Рассмотрим задачу Коши для полулинейного ДАУ:

$$\frac{d}{dt}[Ax] + Bx = f(t,x), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $t,\ t_0 \geq 0,\ x,\ x_0 \in \mathbb{R}^n,\ f(t,x)\colon [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — непрерывная функция, $A,\ B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейные операторы, которым соответствуют $(m \times n)$-матрицы $A,\ B$.

Определение 1. *Функция $x(t)$ называется решением задачи Коши* (1), (2) *на некотором интервале $[t_0, t_1),\ t_1 \leq \infty$, если $x(t) \in C([t_0,t_1),\mathbb{R}^n),\ Ax(t) \in C^1([t_0,t_1),\mathbb{R}^n),\ x(t)$ удовлетворяет уравнению* (1) *на $[t_0,t_1)$ и начальному условию* (2).

Влияние линейной части уравнения (1) определяется свойствами характеристического пучка $\lambda A + B$, где λ — комплексный параметр. *Рангом пучка* матриц $\lambda A + B$ называется наибольший из порядков миноров пучка, не равных тождественно нулю [16]. Ясно, что ранги пучка матриц и соответствующего пучка операторов $\lambda A + B$ совпадают.

Определение 2. *Пучок $\lambda A + B$ называется регулярным, если $n = m = rk(\lambda A + B)$, в остальных случаях, т. е. при $n \neq m$ или $n = m$ и $rk(\lambda A + B) < n$, — сингулярным или нерегулярным.*

Полулинейное ДАУ с сингулярным пучком называется сингулярным или нерегулярным.

Определение 3. *Аддитивным разложением единицы в s-мерном линейном пространстве Z называется система одномерных проекторов $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$, $\Theta_k\colon Z \to Z$, таких, что $\Theta_i\,\Theta_j = \delta_{ij}\,\Theta_i$ (δ_{ij} — символ Кронекера) и $E_Z = \sum_{k=1}^s \Theta_k$* [17].

Аддитивное разложение единицы порождает прямое разложение пространства Z в сумму s одномерных подпространств: $Z = Z_1 \dot{+} Z_2 \dot{+} \ldots \dot{+} Z_s,\ Z_k = \Theta_k Z$.

Определение 4. *Пусть $W,\ Z$ — s-мерные линейные пространства, $D \subset W$. Оператор-функция $\Phi(w)\colon D \to L(W,Z)$ называется базисно обратимой на выпуклой оболочке $\operatorname{conv}\{\hat{w},\hat{\hat{w}}\}$ векторов $\hat{w},\ \hat{\hat{w}} \in D$, если для любого набора векторов $\{w^k\}_{k=1}^s$, $w^k \in \operatorname{conv}\{\hat{w},\hat{\hat{w}}\}$, и некоторого аддитивного разложения единицы $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$ в пространстве Z оператор $\Lambda = \sum_{k=1}^s \Theta_k \Phi(w^k) \in L(W,Z)$ имеет обратный $\Lambda^{-1} \in L(Z,W)$* [17].

Если оператор $\Phi(w) \in L(W,Z)$ представить в виде матрицы в некоторых базисах s-мерных пространств $W,\ Z$:

$$\Phi(w) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(w) & \cdots & \Phi_{1s}(w) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_{s1}(w) & \cdots & \Phi_{ss}(w) \end{pmatrix},$$

то в определении 4 оператор Λ примет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(w^1) & \cdots & \Phi_{1s}(w^1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_{s1}(w^s) & \cdots & \Phi_{ss}(w^s) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что свойство базисной обратимости не зависит от выбора базиса или аддитивного разложения единицы в Z.

Очевидно, из базисной обратимости $\Phi(w)$ на выпуклой оболочке $\operatorname{conv}\{\hat{w},\hat{\hat{w}}\}$ следует обратимость в любой точке $w \in \operatorname{conv}\{\hat{w},\hat{\hat{w}}\}$ ($w = \alpha\hat{\hat{w}} + (1-\alpha)\hat{w},\ \alpha \in [0,1]$). Обратное утверждение не имеет места, кроме случая, когда пространства $W,\ Z$ одномерны. Рассмотрим пример.

***Пример* 1.** Пусть $W = Z = \mathbb{R}^2$, $D = \operatorname{conv}\{\hat{w}, \hat{\hat{w}}\}$, $\hat{w} = (1,-1)^T$, $\hat{\hat{w}} = (1,1)^T$, $w = (a,b)^T \in D$, $\Phi(w) = \begin{pmatrix} a\,b & 1 \\ -1 & a\,b \end{pmatrix}$. Для набора векторов $\{w^1, w^2\} \subset \operatorname{conv}\{\hat{w}, \hat{\hat{w}}\}$, $w^1 = (a_1, b_1)^T$, $w^2 = (a_2, b_2)^T$, оператор Λ имеет вид $\Lambda = \begin{pmatrix} a_1\,b_1 & 1 \\ -1 & a_2\,b_2 \end{pmatrix}$. Поскольку $\det \Phi(w) = a^2\,b^2 + 1 \neq 0$ для любого $w \in D$, то $\Phi(w)$ обратима на D. Однако оператор Λ необратим для $\{w^1, w^2\} = \{\hat{w}, \hat{\hat{w}}\}$ и, следовательно, функция $\Phi(w)$ не является базисно обратимой на D. Если же взять $\hat{w} = (1,0)^T$, то $\Phi(w)$ будет базисно обратимой на D.

Определение 5. *Решение $x(t)$ задачи Коши* (1), (2) *называется глобальным, если оно существует на всем интервале $[t_0, \infty)$.*

Решение $x(t)$ задачи Коши (1), (2) *называется устойчивым по Лагранжу, если оно является глобальным и $\sup_{t\in[t_0,\infty)} \|x(t)\| < +\infty$.*

Определение 6. *Решение $x(t)$ задачи Коши* (1), (2) *имеет конечное время определения, если оно существует на некотором конечном интервале $[t_0, T)$ и $\lim_{t\to T-0} \|x(t)\| = +\infty$.*

Решение $x(t)$ задачи Коши (1), (2) *называется неустойчивым по Лагранжу, если оно имеет конечное время определения.*

Определение 7. *Уравнение* (1) *устойчиво по Лагранжу, если каждое решение задачи Коши* (1), (2) *устойчиво по Лагранжу.*

Уравнение (1) *неустойчиво по Лагранжу, если каждое решение задачи Коши* (1), (2) *неустойчиво по Лагранжу.*

3. Блочная структура пучка операторов, соответствующие прямые разложения пространств и проекторы. Представленная ниже блочная структура сингулярного пучка операторов описана в [18] и используется для получения основных результатов. При построении блочной структуры использовались результаты из [16], описывающие приведение сингулярного пучка матриц к каноническому квазидиагональному виду, где регулярный блок имеет каноническую форму Вейерштрасса и сингулярный блок имеет каноническую форму Кронекера. Разбиение сингулярного пучка на регулярную и сингулярную компоненты, названное RS-расщеплением пучка, и блочные представления сингулярной компоненты пучка для двух частных случаев приведены в [19].

Существуют разложения пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ в прямые суммы подпространств

$$\mathbb{R}^n = X_s \dot{+} X_r, \quad \mathbb{R}^m = Y_s \dot{+} Y_r, \tag{3}$$

относительно которых сингулярный пучок $\lambda A + B$ операторов A, $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ принимает блочный вид

$$\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda A_s + B_s & 0 \\ 0 & \lambda A_r + B_r \end{pmatrix}, \quad A_s,\, B_s : X_s \to Y_s, \quad A_r,\, B_r : X_r \to Y_r, \tag{4}$$

где сингулярный блок $\lambda A_s + B_s$ является чисто сингулярным пучком (т. е. от него нельзя отделить регулярный блок), а регулярный блок $\lambda A_r + B_r$ является регулярным пучком. Введем проекторы

$$S\colon \mathbb{R}^n \to X_s, \quad P\colon \mathbb{R}^n \to X_r, \quad F\colon \mathbb{R}^m \to Y_s, \quad Q\colon \mathbb{R}^m \to Y_r \tag{5}$$

на подпространства из разложений (3), $E_{\mathbb{R}^n} = S + P$, $E_{\mathbb{R}^m} = F + Q$. Пара сингулярных подпространств X_s, Y_s и пара регулярных подпространств X_r, Y_r инвариантны относительно операторов A, B, т. е. $QA = AP$, $QB = BP$, $FA = AS$, $FB = BS$.

Поскольку пучок $\lambda A + B$ имеет комплексный параметр λ, в случае необходимости вещественные операторы A, B, действующие из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, заменяются на их комплексные расширения (см. определение в [20]) $\hat{A}$, $\hat{B}$, действующие из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$. Здесь комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{C}^m$), состоящее из всех пар (x, y), $x, y \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^m$), записываемых в виде $(x, y) = x + iy$, является комплексификацией вещественного пространства $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^m$). Матрицы операторов A, B относительно некоторых базисов в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ совпадают с матрицами их комплексных расширений $\hat{A}$, $\hat{B}$ относительно тех же базисов в $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^m$ и $\hat{A}(x+iy) = A(x+iy)$, $\hat{B}(x+iy) = B(x+iy)$. Очевидно, ранги пучка $\lambda A + B$ и его комплексного расширения $\lambda\hat{A} + \hat{B}$ также совпадают.

Рассмотрим ядро $\operatorname{Ker}(\lambda A + B) = \{x(\lambda) \mid (\lambda A + B)\, x(\lambda) \equiv 0\}$ и область значений $\mathcal{R}(\lambda A + B) = \{y(\lambda) \mid \exists\, x \colon (\lambda A + B)\, x = y(\lambda)\}$ пучка $\lambda A + B$. Размерность ядра $\dim \operatorname{Ker}(\lambda A + B)$ равна размерности ядра $\dim \operatorname{Ker}(\lambda\hat{A} + \hat{B})$ комплексного расширения пучка $\lambda A + B$ (аналогично для области значений пучка). Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — некоторое фиксированное число. Поскольку $\dim \operatorname{Ker}(\lambda\hat{A} + \hat{B}) = \dim \mathbb{C}^n - \dim \mathcal{R}(\lambda\hat{A} + \hat{B}) = n - rk(\lambda\hat{A} + \hat{B})$, то $\dim \operatorname{Ker}(\lambda A + B) = n - rk(\lambda A + B)$. По определению ранг $rk(\lambda A + B)$ — постоянное число, следовательно, $\dim \operatorname{Ker}(\lambda A + B) = n - rk(\lambda A + B)$ также постоянное число.

В случае, когда $rk(\lambda A + B) = m < n$ (ДАУ (1) соответствует *недоопределенная* система уравнений, т. е. число уравнений меньше числа неизвестных), существует разложение сингулярного пространства $X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2}$ в прямую сумму подпространств таких, что

$$A_s = (A_{\mathrm{gen}}\ 0) \colon X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \to Y_s, \quad B_s = (B_{\mathrm{gen}}\ B_{\mathrm{und}}) \colon X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \to Y_s, \tag{6}$$

где оператор $A_{\mathrm{gen}} \in L(X_{s_1}, Y_s)$ имеет обратный $A_{\mathrm{gen}}^{-1} \in L(Y_s, X_{s_1})$. Существуют проекторы $S_i \colon \mathbb{R}^n \to X_{s_i}$, $i = 1, 2$, на подпространства X_{s_i} такие, что $S = S_1 + S_2$, $S_1 S_2 = S_2 S_1 = 0$, $AS_2 = 0$. Для построения сингулярных подпространств X_s, Y_s, X_{s_1}, X_{s_2} найдем максимальное количество линейно независимых решений $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda), \ldots, x_N(\lambda)$ уравнения

$$(\lambda A + B)x = 0. \tag{7}$$

Рассматриваются решения, являющиеся полиномами от $\lambda \colon x_j(\lambda) = \sum_{i=0}^{k_j} (-1)^i \lambda^i x_{ji}$, $j = \overline{1, N}$, $x_{ji} \neq 0$, $i = \overline{0, k_j}$, где k_j — степень $x_j(\lambda)$. Известно, что многочленные столбцы $x_1(\lambda), \ldots, x_N(\lambda)$ являются линейно независимыми, если ранг матрицы, составленной из этих столбцов, равен N. Поскольку набор столбцов $\{x_1(\lambda), \ldots, x_N(\lambda)\}$ образует базис $\operatorname{Ker}(\lambda A + B)$, то $N = n - rk(\lambda A + B)$. Если подставить $x_j(\lambda)$ в (7) и приравнять коэффициенты при λ к нулю, то получим набор равенств $Bx_{j\,0} = 0$, $Bx_{j\,1} = Ax_{j\,0}, \ldots, Bx_{j\,k_j} = Ax_{j\,k_j - 1}$, $Ax_{j\,k_j} = 0$. Среди всех решений уравнения (7) можно выбрать набор линейно независимых решений $\{\hat{x}_j(\lambda)\}_{j=1}^N$ (наборы определяются неоднозначно) с наименьшими возможными степенями, такими, что $k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_N$, $\sum_{j=1}^N k_j \le m$, $\sum_{j=1}^N k_j + N \le n$. Тогда соответствующие системы векторов $\{\hat{x}_{ji}\}_{j=1, i=0}^{N, k_j}$, $\{B\hat{x}_{ji}\}_{j=1, i=1}^{N, k_j} = \{A\hat{x}_{ji}\}_{j=1, i=0}^{N, k_j - 1}$ линейно независимы и являются базисами своих линейных оболочек, образующих пространства $X_s = \operatorname{Lin}\{\hat{x}_{ji}\}_{j=1, i=0}^{N, k_j}$, $Y_s = \operatorname{Lin}\{B\hat{x}_{ji}\}_{j=1, i=1}^{N, k_j}$. Если взять произвольный максимальный набор линейно независимых решений $\{x_j(\lambda)\}_{j=1}^N$ уравнения (7), то линейные оболочки систем $\{x_{ji}\}_{j=1, i=0}^{N, k_j}$, $\{Bx_{ji}\}_{j=1, i=1}^{N, k_j}$ также образуют пространства X_s, Y_s соответственно. Однако эти системы могут содержать линейно зависимые векторы и, следовательно, не всегда целиком совпадают с базисами пространств X_s, Y_s (т. е. из этих систем всегда можно выбрать подсистемы, которые являются базисами пространств X_s, Y_s). Далее, можно выбрать базисы пространств X_{s_1}, X_{s_2} так, чтобы относительно прямого разложения $X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2}$ операторы A_s, B_s имели блочную структуру (6).

В случае, когда $rk(\lambda A + B) = n < m$ (ДАУ (1) соответствует *переопределенная* система уравнений, т. е. число уравнений больше числа неизвестных), сингулярное пространство Y_s разлагается в прямую сумму подпространств $Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}$ таких, что

$$A_s = \begin{pmatrix} A_{\text{gen}} \\ 0 \end{pmatrix} : X_s \to Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}, \quad B_s = \begin{pmatrix} B_{\text{gen}} \\ B_{\text{ov}} \end{pmatrix} : X_s \to Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}, \tag{8}$$

где оператор $A_{\text{gen}} \in L(X_s, Y_{s_1})$ имеет обратный $A_{\text{gen}}^{-1} \in L(Y_{s_1}, X_s)$. Существуют проекторы $F_i : \mathbb{R}^m \to Y_{s_i}$, $i = 1, 2$, на подпространства Y_{s_i} такие, что $F = F_1 + F_2$, $F_1 F_2 = F_2 F_1 = 0$, $F_2 A = 0$. Для построения сингулярных подпространств X_s, Y_s, Y_{s_1}, Y_{s_2} найдем линейно независимые решения $y_1(\lambda), \ldots, y_M(\lambda)$ уравнения

$$(\lambda A^T + B^T) y = 0, \tag{9}$$

где $\lambda A^T + B^T$ — транспонированный пучок $\lambda A + B$, $M = m - rk(\lambda A + B)$ (ясно, что $rk(\lambda A + B) = rk(\lambda A^T + B^T)$). Далее, построим сингулярные пространства $\hat{X}_s$, $\hat{Y}_s$ $\hat{X}_{s_1}$, $\hat{X}_{s_2}$ и соответствующие проекторы $\hat{S}$, $\hat{F}$, $\hat{S}_1$, $\hat{S}_2$ для пучка $\lambda A^T + B^T$, как в предыдущем случае. Тогда $S = \hat{F}^T$, $F = \hat{S}^T$, $F_1 = \hat{S}_1^T$, $F_2 = \hat{S}_2^T$ будут проекторами на сингулярные пространства X_s, Y_s, Y_{s_1}, Y_{s_2} для исходного пучка $\lambda A + B$. С помощью проекторов S, F, F_1, F_2 восстанавливаются соответствующие сингулярные пространства.

В общем случае, при $rk(\lambda A + B) < n$, $rk(\lambda A + B) < m$, сингулярные пространства X_s, Y_s разлагаются в прямые суммы подпространств $X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2}$, $Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}$ таких, что

$$A_s = \begin{pmatrix} A_{\text{gen}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : X_s \to Y_s, \quad B_s = \begin{pmatrix} B_{\text{gen}} & B_{\text{und}} \\ B_{\text{ov}} & 0 \end{pmatrix} : X_s \to Y_s, \tag{10}$$

где оператор $A_{\text{gen}} \in L(X_{s_1}, Y_{s_1})$ имеет обратный $A_{\text{gen}}^{-1} \in L(Y_{s_1}, X_{s_1})$, $B_{\text{gen}} \in L(X_{s_1}, Y_{s_1})$, $B_{\text{und}} \in L(X_{s_2}, Y_{s_1})$, $B_{\text{ov}} \in L(X_{s_1}, Y_{s_2})$. Аналогично вводим проекторы

$$S_i : \mathbb{R}^n \to X_{s_i}, \quad F_i : \mathbb{R}^m \to Y_{s_i}, \quad i = 1, 2, \tag{11}$$

$F = F_1 + F_2$, $F_1 F_2 = F_2 F_1 = 0$, $S = S_1 + S_2$, $S_1 S_2 = S_2 S_1 = 0$. Тогда $A_{\text{gen}} = F_1 A S_1|_{X_{s_1}}$, $B_{\text{gen}} = F_1 B S_1|_{X_{s_1}}$, $B_{\text{und}} = F_1 B S_2|_{X_{s_2}}$, $B_{\text{ov}} = F_2 B S_1|_{X_{s_1}}$, $A S_2 = 0$, $F_2 A = 0$, $F_2 B S_2 = 0$. В общем случае для построения проекторов и соответствующих сингулярных пространств необходимо найти $N = n - rk(\lambda A + B)$ линейно независимых решений уравнения (7) и $M = m - rk(\lambda A + B)$ линейно независимых решений уравнения (9). Далее, используя вид сингулярных пространств, полученных при анализе решений уравнений (7), (9), строим сингулярные пространства X_s, Y_s, X_{s_1}, X_{s_2}, Y_{s_1}, Y_{s_2} и соответствующие проекторы с учетом их свойств, позволяющих получить блочную структуру (10). Легко убедиться, что сингулярные пространства X_s, Y_s получаются из объединения базисов соответствующих сингулярных пространств, полученных (как это было выше) при анализе решений уравнений (7), (9).

Общее максимальное количество $d(\lambda A + B) = n + m - 2\, rk(\lambda A + B)$ линейно независимых решений уравнения (7) и линейно независимых решений уравнения (9) назовем *дефектом* *пучка* $\lambda A + B$ [18]. Для пучка ранга $rk(\lambda A + B) = m < n$ дефект равен $d(\lambda A + B) = N = n - rk(\lambda A + B)$. Если пучок имеет ранг $rk(\lambda A + B) = n < m$, его дефект равен $d(\lambda A + B) = M = m - rk(\lambda A + B)$. Очевидно, дефекты исходного и транспонированного пучков будут совпадать, дефект регулярного пучка будет равен нулю.

Таким образом, существуют разложения пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ в прямые суммы подпространств

$$\mathbb{R}^n = X_s \dot{+} X_r = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \dot{+} X_r, \quad \mathbb{R}^m = Y_s \dot{+} Y_r = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} \dot{+} Y_r \tag{12}$$

таких, что при $rk(\lambda A + B) < n$, $rk(\lambda A + B) < m$ сингулярный пучок операторов $\lambda A + B$ имеет блочную структуру (4), (10), при $rk(\lambda A + B) = m < n$ — блочную структуру (4), (6) и $Y_{s_1} = Y_s$, $Y_{s_2} = \{0\}$ ($F_1 = F$, $F_2 = 0$), при $rk(\lambda A + B) = n < m$ — блочную структуру (4), (8) и $X_{s_1} = X_s$, $X_{s_2} = \{0\}$ ($S_1 = S$, $S_2 = 0$). Выше введены проекторы (5), (11) на подпространства из разложений (12) и описан метод построения сингулярных подпространств X_s, Y_s, X_{s_i}, Y_{s_i}, $i = 1, 2$.

Заметим, что если $X_r = \{0\}$, $Y_r = \{0\}$, то $\lambda A + B = \lambda A_s + B_s$ является чисто сингулярным пучком и регулярный блок $\lambda A_r + B_r$ отсутствует.

Предположим, что регулярный пучок $\lambda A_r + B_r$ удовлетворяет условию

$$\exists\, C_1,\, C_2 > 0\ (C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}) \colon\ \left\|(\lambda A_r + B_r)^{-1}\right\| \le C_1, \quad |\lambda| \ge C_2. \tag{13}$$

Условие (13) означает, что точка $\mu = 0$ является либо простым полюсом резольвенты $(A_r + \mu B_r)^{-1}$ (это эквивалентно тому, что $\lambda = \infty$ является устранимой особой точкой резольвенты $(\lambda A_r + B_r)^{-1}$), либо регулярной точкой пучка $A_r + \mu B_r$ (т. е. в точке $\mu = 0$ существует резольвента $(A_r + \mu B_r)^{-1}$ и, следовательно, оператор A_r невырожден). Если оператор A_r вырожден и точка $\mu = 0$ является простым полюсом резольвенты $(A_r + \mu B_r)^{-1}$ (т. е. выполнено условие (13)), то будем говорить, что $\lambda A_r + B_r$ является регулярным пучком *индекса* 1 (или регулярный пучок $\lambda A_r + B_r$ *имеет индекс* 1). Если $A_r = 0$ и выполнено условие (13), т. е. существует B_r^{-1}, то для простоты также будем говорить, что $\lambda A_r + B_r$ является регулярным *пучком индекса* 1. Если оператор A_r невырожден, т. е. $\mu = 0$ является регулярной точкой пучка $A_r + \mu B_r$, то будем говорить, что $\lambda A_r + B_r$ является регулярным пучком *индекса* 0.

Таким образом, $\lambda A_r + B_r$ — регулярный пучок *индекса не выше* 1 (т. е. *индекса* 0 *или* 1), если $\lambda A_r + B_r$ — регулярный пучок и выполнено условие (13).

Для регулярного пучка $\lambda A_r + B_r$ индекса не выше 1 существуют вещественные спектральные проекторы $\tilde{P}_j \colon X_r \to X_j$, $\tilde{Q}_j \colon Y_r \to Y_j$, $j = 1, 2$ [19] (п. 3) (проекторы могут быть вычислены контурным интегрированием, как показано, например, в [21], п. 2), такие, что пространства X_r, Y_r разлагаются в прямые суммы подпространств

$$X_r = X_1 \dot{+} X_2, \quad Y_r = Y_1 \dot{+} Y_2, \tag{14}$$

относительно которых индуцированные операторы $A_j = A_r\big|_{X_j} \colon X_j \to Y_j$, $B_j = B_r\big|_{X_j} \colon X_j \to Y_j$, $j = 1, 2$, таковы, что $A_2 = 0$ и существуют $A_1^{-1} \in L(Y_1, X_1)$, $B_2^{-1} \in L(Y_2, X_2)$. Обозначим через

$$P_j \colon \mathbb{R}^n \to X_j, \quad Q_j \colon \mathbb{R}^m \to Y_j, \quad j = 1, 2, \tag{15}$$

расширения проекторов $\tilde{P}_j$, $\tilde{Q}_j$ ($P_j = \tilde{P}_j P$, $Q_j = \tilde{Q}_j Q$), при этом $P = P_1 + P_2$, $Q = Q_1 + Q_2$ и для расширенных проекторов сохраняются свойства исходных: $AP_j = Q_j A$, $BP_j = Q_j B$, $j = 1, 2$. Тогда $A_1 = Q_1 A\big|_{X_1}$, $Q_2 A = 0$, $B_j = Q_j B_j\big|_{X_j}$, $j = 1, 2$.

Относительно разложений (12), (14) любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представим в виде

$$x = x_s + x_r = x_{s_1} + x_{s_2} + x_{p_1} + x_{p_2}, \tag{16}$$

где $x_s = Sx = x_{s_1} + x_{s_2} \in X_s,\ x_r = Px = x_{p_1} + x_{p_2} \in X_r,\ x_{s_i} = S_i x \in X_{s_i},\ x_{p_i} = P_i x \in X_i$, $i = 1, 2$.

4. Устойчивость и неустойчивость по Лагранжу сингулярного (нерегулярного) полулинейного ДАУ. В дальнейшем используются проекторы (5), (11), (15) и соответствующие подпространства $X_s,\ X_r,\ Y_s,\ Y_r,\ X_{s_i},\ Y_{s_i},\ X_i,\ Y_i,\ i = 1, 2$, определенные в п. 3.

Теорема 1 (об устойчивости по Лагранжу полулинейного ДАУ)**.** *Пусть функция* $f(t, x)$ *принадлежит* $C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, *частная производная* $\dfrac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ *непрерывна на* $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $\lambda A + B$ — *сингулярный пучок операторов такой, что его регулярный блок* $\lambda A_r + B_r$ *из* (4) *имеет индекс не выше* 1, *и выполнено условие*

$$\begin{gathered}\forall\, t \geq 0\, \forall\, x_{s_1} \in X_{s_1}\, \forall\, x_{p_1} \in X_1\, \exists\, x_{s_2} \in X_{s_2} \exists\, x_{p_2} \in X_2 : \\ (t, x_{s_1} + x_{s_2} + x_{p_1} + x_{p_2}) \in L_0 = \{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \mid (F_2 + Q_2)[Bx - f(t, x)] = 0\},\end{gathered} \tag{17}$$

где $X_{s_1},\ X_{s_2},\ X_1,\ X_2$ *из* (12), (14)*. Пусть для любых* $\hat{x}_{p_2}, \hat{\hat{x}}_{p_2} \in X_2$ *таких, что* $(t_*, x^*_{s_1} + x^*_{s_2} + x^*_{p_1} + \hat{x}_{p_2}),\ (t_*, x^*_{s_1} + x^*_{s_2} + x^*_{p_1} + \hat{\hat{x}}_{p_2}) \in L_0$, *оператор-функция*

$$\Phi(x_{p_2}) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\big(Q_2 f(t_*, x^*_{s_1} + x^*_{s_2} + x^*_{p_1} + x_{p_2})\big) - B\right] P_2 : X_2 \to L(X_2, Y_2) \tag{18}$$

является базисно обратимой на выпуклой оболочке $\operatorname{conv}\{\hat{x}_{p_2}, \hat{\hat{x}}_{p_2}\}$*. Предположим, что существуют самосопряженные положительные операторы* $H_1 \in L(X_{s_1}),\ H_2 \in L(X_1)$, *число* $R > 0$ *и функции* $k(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R}),\ U(v) \in C((0, \infty), (0, \infty)),\ \phi_{s_2}(t) \in C([0, \infty), X_{s_2})$ *такие, что* $(t, S_1 x + \phi_{s_2}(t) + P_1 x + P_2 x) \in L_0$ *при всех* $t \in [0, \infty)$, $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} = +\infty\ (c > 0)$ *и выполнено*

$$\begin{gathered}\big(H_1 S_1 x, A^{-1}_{\text{gen}} F_1[-BS_1 x - B\phi_{s_2}(t) + f(t, x)]\big) + \big(H_2 P_1 x, A_1^{-1} Q_1[-BP_1 x + f(t, x)]\big) \leq \\ \leq k(t)\, U\left(\frac{1}{2}\big[(H_1 S_1 x, S_1 x) + (H_2 P_1 x, P_1 x)\big]\right) \quad \forall\, (t, x) \in L_0 : \|(S_1 + P_1)x\| \geq R.\end{gathered} \tag{19}$$

Тогда для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$ *существует единственное решение* $x(t)$ *задачи Коши* (1), (2) *на* $[t_0, \infty)$, *для которого при* $rk(\lambda A + B) = m < n$ *выбор функции* ϕ_{s_2} *с начальным значением* $\phi_{s_2}(t_0) = S_2 x_0$ *однозначно определяет компоненту* $S_2 x(t) = \phi_{s_2}(t)$.

Если, дополнительно, $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} k(t)\, dt < +\infty$, $\sup_{t \in [0, \infty)} \|\phi_{s_2}(t)\| < +\infty$,

$$\sup_{t \in [0, \infty),\ \|x\| \leq K} \|F_2 f(t, x)\| < +\infty, \qquad K > 0\ (K \in \mathbb{R}), \tag{20}$$

и существует такое $\tilde{x}_{p_2} \in X_2$, *что для любого* $\tilde{\tilde{x}}_{p_2} \in X_2$ *такого, что* $(t_*, x^*_{s_1} + x^*_{s_2} + x^*_{p_1} + \tilde{\tilde{x}}_{p_2}) \in L_0$, *оператор-функция* (18) *базисно обратима на* $\operatorname{conv}\{\tilde{x}_{p_2}, \tilde{\tilde{x}}_{p_2}\} \setminus \{\tilde{x}_{p_2}\}$ *и*

$$\sup_{t\in[0,\infty),\,\|x_{s_1}+x_{s_2}+x_{p_1}\|\le M} \|Q_2 f(t,x_{s_1}+x_{s_2}+x_{p_1}+\tilde{x}_{p_2})\| < +\infty, \qquad M>0\ (M\in\mathbb{R}), \tag{21}$$

то для начальных точек $(t_0,x_0)\in L_0$ *уравнение* (1), *где* $S_2x=\phi_{s_2}(t)$, *устойчиво по Лагранжу; при* $rk(\lambda A+B)=n<m$ *компонента* S_2x *отсутствует.*

***Замечание* 1.** *Условие согласования* $(t_0,x_0)\in L_0$ для начальной точки (t_0,x_0) является одним из необходимых условий существования решения задачи Коши (1), (2).

Начальные значения $t_0,\ x_0$, удовлетворяющие условию согласования $(t_0,x_0)\in L_0$, называются *согласованными* начальными значениями.

***Замечание* 2.** Учитывая свойства проекторов, многообразие L_0 (17) можно представить в виде $L_0=\{(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n \mid F_2[Bx-f(t,x)]=0,\ Q_2[Bx-f(t,x)]=0\}$.

***Замечание* 3.** Если оператор-функция $\Phi(x_{p_2})$ (18) является базисно обратимой на $\mathrm{conv}\{\hat{x}_{p_2},\hat{\hat{x}}_{p_2}\}$ для любых $\hat{x}_{p_2},\,\hat{\hat{x}}_{p_2}\in X_2,\ t_*\in[0,\infty),\ x^*_{s_1}\in X_{s_1},\ x^*_{s_2}\in X_{s_2},\ x^*_{p_1}\in X_1$, то, очевидно, она является базисно обратимой на $\mathrm{conv}\{\hat{x}_{p_2},\hat{\hat{x}}_{p_2}\}$ для любых $\hat{x}_{p_2},\,\hat{\hat{x}}_{p_2}$ таких, что $(t_*,x^*_{s_1}+x^*_{s_2}+x^*_{p_1}+\hat{x}_{p_2}),\ (t_*,x^*_{s_1}+x^*_{s_2}+x^*_{p_1}+\hat{\hat{x}}_{p_2})\in L_0$, и на $\mathrm{conv}\{\tilde{x}_{p_2},\tilde{\tilde{x}}_{p_2}\}\setminus\{\tilde{x}_{p_2}\}$ для любых $\tilde{x}_{p_2}$ и $\tilde{\tilde{x}}_{p_2}$ таких, что $(t_*,x^*_{s_1}+x^*_{s_2}+x^*_{p_1}+\tilde{\tilde{x}}_{p_2})\in L_0$.

***Доказательство теоремы* 1.** Применяя к уравнению (1) проекторы $F_i,\ Q_i,\ i=1,2$, получаем эквивалентную систему

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}(F_1AS_1x)+F_1BSx=F_1f(t,x),\\
\frac{d}{dt}(Q_1AP_1x)+Q_1BP_1x=Q_1f(t,x),\\
Q_2f(t,x)-Q_2BP_2x=0,\\
F_2[Bx-f(t,x)]=0.
\end{gathered}\tag{22}$$

Сужая операторы в уравнениях системы (22) на подпространства $X_{s_i},\ X_i,\ i=1,2$, из (12), (14) и используя представление (16), получаем эквивалентную систему

$$\frac{d}{dt}(A_{\mathrm{gen}}x_{s_1})+B_{\mathrm{gen}}x_{s_1}+B_{\mathrm{und}}x_{s_2}=F_1f(t,x), \tag{23}$$

$$\frac{d}{dt}(A_1x_{p_1})+B_1x_{p_1}=Q_1f(t,x), \tag{24}$$

$$Q_2f(t,x)-B_2x_{p_2}=0, \tag{25}$$

$$B_{\mathrm{ov}}x_{s_1}-F_2f(t,x)=0.$$

Обозначим $\dim X_{s_1}=b,\ \dim X_{s_2}=l,\ \dim X_1=a,\ \dim X_2=d,\ b+l+a+d=n$. Пусть $\{s_i\}_{i=1}^b,\ \{s_{b+i}\}_{i=1}^l,\ \{p_i\}_{i=1}^a,\ \{p_{a+i}\}_{i=1}^d$ — базисы подпространств $X_{s_1},\ X_{s_2},\ X_1,\ X_2$ соответственно. Объединение этих базисов является базисом пространства $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^b\times\mathbb{R}^l\times\times\mathbb{R}^a\times\mathbb{R}^d$ и для любого вектора $x\in\mathbb{R}^n$ из разложения $x=\sum_{i=1}^b w_i\,s_i+\sum_{i=1}^l \xi_i\,s_{b+i}+\sum_{i=1}^a z_i\,p_i+\sum_{i=1}^d u_i\,p_{a+i}$ по этому базису следует представление в виде вектора-столбца $x=(w^T,\,\xi^T,\,z^T,\,u^T)^T$, где $w\in\mathbb{R}^b,\ \xi\in\mathbb{R}^l,\ z\in\mathbb{R}^a,\ u\in\mathbb{R}^d$ также векторы-столбцы. Указанное представление определяет операторы $S_b:\mathbb{R}^b\to X_{s_1},\ S_l:\mathbb{R}^l\to X_{s_2},\ P_a:\mathbb{R}^a\to X_1$,

$P_d\colon \mathbb{R}^d \to X_2$, для которых существуют обратные $S_b^{-1}\colon X_{s_1} \to \mathbb{R}^b$, $S_l^{-1}\colon X_{s_2} \to \mathbb{R}^l$, $P_a^{-1}\colon X_1 \to \mathbb{R}^a$, $P_d^{-1}\colon X_2 \to \mathbb{R}^d$. Умножая уравнения (23) – (25) соответственно на $S_b^{-1}A_{\rm gen}^{-1}$, $P_a^{-1}A_1^{-1}$, $P_d^{-1}B_2^{-1}$, выполняя замену

$$x_{s_1} = S_b\, w, \quad x_{s_2} = S_l\, \xi, \quad x_{p_1} = P_a\, z, \quad x_{p_2} = P_d\, u$$

и обозначая $\tilde f(t,w,\xi,z,u) = f(t, S_b\, w + S_l\, \xi + P_a\, z + P_d\, u)$, получаем эквивалентную систему

$$\frac{dw}{dt} + S_b^{-1}A_{\rm gen}^{-1}B_{\rm gen}S_b\, w = S_b^{-1}A_{\rm gen}^{-1}\left(F_1\tilde f(t,w,\xi,z,u) - B_{\rm und}S_l\,\xi\right), \tag{26}$$

$$\frac{dz}{dt} + P_a^{-1}A_1^{-1}B_1P_a\, z = P_a^{-1}A_1^{-1}Q_1\tilde f(t,w,\xi,z,u), \tag{27}$$

$$P_d^{-1}B_2^{-1}Q_2\tilde f(t,w,\xi,z,u) - u = 0, \tag{28}$$

$$B_{\rm ov}S_b\, w - F_2\tilde f(t,w,\xi,z,u) = 0. \tag{29}$$

Таким образом, полулинейное ДАУ (1) эквивалентно системе (26) – (29).

I. Сначала докажем существование и единственность глобальных решений задачи Коши (1), (2).

Рассмотрим отображение

$$\Psi(t,w,\xi,z,u) = P_d^{-1}B_2^{-1}Q_2\tilde f(t,w,\xi,z,u) - u. \tag{30}$$

Оно непрерывно на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ и имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial\Psi(t,w,\xi,z,u)}{\partial(w,\xi,z)} = P_d^{-1}B_2^{-1}\frac{\partial Q_2 f(t,x)}{\partial x}\,(S_b \quad S_l \quad P_a), \qquad \frac{\partial\Psi(t,w,\xi,z,u)}{\partial u} = P_d^{-1}B_2^{-1}\Phi(P_d\, u)P_d,$$

где $\Phi(P_d\, u) = \Phi(x_{p_2})$ — оператор-функция (18), $x_{p_2} = P_d\, u \in X_2$.

Докажем, что для любых $\hat u$, $\hat{\hat u} \in \mathbb{R}^d$ таких, что $(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \hat u)$, $(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \hat{\hat u})$ принадлежат

$$\tilde L_0 = \big\{(t,w,\xi,z,u)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n \mid (F_2+Q_2)\big[B(S_bw+ \\ +S_l\xi + P_az + P_du) - \tilde f(t,w,\xi,z,u)\big] = 0\big\} \tag{31}$$

(аналогично замечанию 2, $\tilde L_0 = \{(t,w,\xi,z,u)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n \mid (28),(29)\}$), оператор-функция $W(u) = \dfrac{\partial}{\partial u}\Psi(t_*, w_*, \xi_*, z_*, u)\colon \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d)$ является базисно обратимой на ${\rm conv}\{\hat u, \hat{\hat u}\}$. Возьмем любые $\hat u$, $\hat{\hat u} \in \mathbb{R}^d$ такие, что $(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \hat u)$, $(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \hat{\hat u}) \in \tilde L_0$, и любые $u^k \in {\rm conv}\{\hat u, \hat{\hat u}\}$, $k = \overline{1,d}$. Заметим, что $(t,w,\xi,z,v) \in \tilde L_0 \Leftrightarrow (t,x) \in L_0$. По условию теоремы для любых $\hat x_{p_2}, \hat{\hat x}_{p_2} \in X_2$ таких, что $(t_*, x_{s_1}^* + x_{s_2}^* + x_{p_1}^* + \hat x_{p_2})$, $(t_*, x_{s_1}^* + x_{s_2}^* + x_{p_1}^* + \hat{\hat x}_{p_2}) \in L_0$, оператор-функция (18) является базисно обратимой на ${\rm conv}\{\hat x_{p_2}, \hat{\hat x}_{p_2}\}$. Следовательно, существует аддитивное разложение единицы $\{\hat\Theta_k\}_{k=1}^d$ в $\mathbb{R}^d$ такое, что обратим действующий в $\mathbb{R}^d$ оператор

$$\Lambda = \sum_{k=1}^d \hat\Theta_k W(u^k) = \sum_{k=1}^d \hat\Theta_k \frac{\partial}{\partial u}\Psi(t_*, w_*, \xi_*, z_*, u^k) = \sum_{k=1}^d \hat\Theta_k P_d^{-1}B_2^{-1}\Phi(P_d\, u^k)P_d. \tag{32}$$

Значит, оператор-функция $W(u)$ базисно обратима на $\operatorname{conv}\{\hat{u}, \hat{\hat{u}}\}$.

Пусть (t_*, w_*, z_*) — произвольная (фиксированная) точка из $[0, \infty) \times \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^a$. Выберем $\xi_* \in \mathbb{R}^l$, $u_* \in \mathbb{R}^d$ так, чтобы $(t_*, w_*, \xi_*, z_*, u_*) \in \tilde{L}_0$ (это возможно в силу (17)). Из базисной обратимости W следует, что существует непрерывный линейный обратный оператор $\left[\dfrac{\partial}{\partial u}\Psi(t_*, w_*, \xi_*, z_*, u_*)\right]^{-1}$. По теоремам о неявной функции [22] существуют окрестности $U_\delta(t_*, w_*, \xi_*, z_*) = U_{\delta_1}(t_*) \times U_{\delta_2}(w_*) \times U_{\delta_3}(\xi_*) \times U_{\delta_4}(z_*)$ (если $t_* = 0$, то $U_{\delta_1}(t_*) = [0, \delta_1)$), $U_\varepsilon(u_*)$ и единственная функция $u = u(t, w, \xi, z) \in C(U_\delta(t_*, w_*, \xi_*, z_*), U_\varepsilon(u_*))$, непрерывно дифференцируемая по (w, ξ, z), такая, что $\Psi(t, w, \xi, z, u(t, w, \xi, z)) = 0$ для $(t, w, \xi, z) \in$ $\in U_\delta(t_*, w_*, \xi_*, z_*)$ и $u(t_*, w_*, \xi_*, z_*) = u_*$. Данное утверждение выполнено для всех точек $t \in [0, \infty)$, $w \in \mathbb{R}^b$, $z \in \mathbb{R}^a$, $\xi \in D_\xi$, $u \in D_u$, где множества $D_\xi \subset \mathbb{R}^l$, $D_u \subset \mathbb{R}^d$ такие, что $S_l^{-1} S_2 x_0 \in D_\xi$, $P_d^{-1} P_2 x_0 \in D_u$. Определим глобальную функцию $u = \eta(t, w, \xi, z)$ в точке (t_*, w_*, ξ_*, z_*) как $\eta(t_*, w_*, \xi_*, z_*) = u(t_*, w_*, \xi_*, z_*)$. Так как $u(t_*, w_*, \xi_*, z_*) = u_*$ и $(t_*, w_*, \xi_*, z_*, u_*) \in \tilde{L}_0$, то $(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \eta(t_*, w_*, \xi_*, z_*)) \in \tilde{L}_0$ и

$$u = \eta(t, w, \xi, z) \colon [0, \infty) \times \mathbb{R}^b \times \tilde{D}_\xi \times \mathbb{R}^a \to \tilde{D}_u,$$

где $[0, \infty) \times \mathbb{R}^b \times \tilde{D}_\xi \times \mathbb{R}^a \times \tilde{D}_u = ([0, \infty) \times \mathbb{R}^b \times D_\xi \times \mathbb{R}^a \times D_u) \cap \tilde{L}_0$.

Докажем, что

$$\forall\, (t, w, \xi, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^b \times \tilde{D}_\xi \times \mathbb{R}^a\, \exists!\, u \in \mathbb{R}^d \colon (t, w, \xi, z, u) \in \tilde{L}_0. \tag{33}$$

Рассмотрим произвольные (фиксированные) точки $(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \hat{u})$, $(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \hat{\hat{u}}) \in \tilde{L}_0$. Ясно, что $\Psi(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \hat{u}) = 0$, $\Psi(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \hat{\hat{u}}) = 0$. Проекции $\Psi_k(t, w, \xi, z, u) = \hat{\Theta}_k \Psi(t, w, \xi, z, u)$, $k = \overline{1, d}$, являются функциями со значениями в одномерных пространствах $R_k = \hat{\Theta}_k \mathbb{R}^d$, изоморфных $\mathbb{R}$. По формуле конечных приращений [22] $\Psi_k(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \hat{\hat{u}}) - \Psi_k(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \hat{u}) = \dfrac{\partial}{\partial u}\Psi_k(t_*, w_*, \xi_*, z_*, u^k)(\hat{\hat{u}} - \hat{u}) = 0$, $u^k \in \operatorname{conv}\{\hat{u}, \hat{\hat{u}}\}$, $k = \overline{1, d}$. Следовательно, $\hat{\Theta}_k \dfrac{\partial}{\partial u}\Psi_k(t_*, w_*, \xi_*, z_*, u^k)(\hat{\hat{u}} - \hat{u}) = 0$, $k = \overline{1, d}$, откуда, суммируя эти выражения по k, получаем $\Lambda(\hat{\hat{u}} - \hat{u}) = 0$. Оператор Λ обратим в силу базисной обратимости оператор-функции $W(u)$ (см. выше), значит, $\hat{\hat{u}} = \hat{u}$. С учетом (17) отсюда следует (33).

Поскольку в некоторой окрестности каждой точки $(t_*, w_*, \xi_*, z_*) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^b \times \tilde{D}_\xi \times \mathbb{R}^a$ существует единственное решение $u = \nu(t, w, \xi, z)$ уравнения (28), непрерывное по (t, w, ξ, z) и непрерывно дифференцируемое по (w, ξ, z), то функция $u = \eta(t, w, \xi, z)$ в некоторой окрестности точки (t_*, w_*, ξ_*, z_*) совпадает с $\nu(t, w, \xi, z)$ и является решением уравнения (28) с соответствующими свойствами гладкости. Докажем, что функция $u = \eta(t, w, \xi, z)$ единственная на всей области определения. Действительно, если бы существовала функция $u = \mu(t, w, \xi, z)$, имеющая в некоторой точке $(t_*, w_*, \xi_*, z_*) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^b \times \tilde{D}_\xi \times \mathbb{R}^a$ те же свойства, что и $u = \eta(t, w, \xi, z)$, то в силу (33) $\eta(t_*, w_*, \xi_*, z_*) = \mu(t_*, w_*, \xi_*, z_*) = u_*$. Следовательно, $\eta(t, w, \xi, z) = \mu(t, w, \xi, z)$ для всех точек $(t, w, \xi, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^b \times \tilde{D}_\xi \times \mathbb{R}^a$.

Выберем непрерывную функцию $\phi(t) = S_l^{-1} \phi_{s_2}(t) \colon [0, \infty) \to \tilde{D}_\xi$, где $\phi_{s_2}(t)$ определена в условиях теоремы и $\phi_{s_2}(t_0) = S_2 x_0$, т. е. $\phi(t_0) = S_l^{-1} S_2\, x_0$. Подставим $\xi = \phi(t)$ в функцию η и обозначим $q(t, w, z) = \eta(t, w, \phi(t), z)$.

Далее, подставляя $u = q(t, w, z)$, $\xi = \phi(t)$ в (26), (27), получаем систему

$$\frac{dw}{dt} = S_b^{-1} A_{\mathrm{gen}}^{-1} [-B_{\mathrm{gen}} S_b\, w + F_1 \tilde{f}(t, w, \phi(t), z, q(t, w, z)) - B_{\mathrm{und}} S_l\, \phi(t)],$$

$$\frac{dz}{dt} = P_a^{-1}A_1^{-1}[-B_1P_a\,z + Q_1\tilde{f}(t,w,\phi(t),z,q(t,w,z))].$$

Запишем эту систему в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = N_1[-N_2\omega + G(t,\omega)], \tag{34}$$

где $\omega = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$, $N_1 = \begin{pmatrix} S_b^{-1}A_{\rm gen}^{-1} & 0 \\ 0 & P_a^{-1}A_1^{-1} \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} B_{\rm gen}S_b & 0 \\ 0 & B_1P_a \end{pmatrix}$, $G(t,\omega) = \begin{pmatrix} F_1\tilde{f}(t,\omega,\phi(t),q(t,\omega)) - B_{\rm und}S_l\,\phi(t) \\ Q_1\tilde{f}(t,\omega,\phi(t),q(t,\omega)) \end{pmatrix}$, $q(t,\omega) = q(t,w,z)$, $\tilde{f}(t,\omega,\phi(t),q(t,\omega)) = \tilde{f}(t,w,\phi(t),z,q(t,w,z))$.

В силу свойств функций F_1f, Q_1f, q, ϕ функция $G(t,\omega)$ непрерывна по (t,ω) и непрерывно дифференцируема по ω на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^b\times\mathbb{R}^a$. Следовательно, для каждой начальной точки (t_0,ω_0) такой, что $(t_0,w_0,\phi(t_0),z_0,q(t_0,w_0,z_0))\in\tilde{L}_0$, существует единственное решение $\omega(t)$ уравнения (34) на некотором интервале $[t_0,\varepsilon)$ с начальным условием

$$\omega(t_0) = \omega_0, \quad \omega_0 = (w_0^T, z_0^T)^T. \tag{35}$$

Введем функцию $V(x_{s_1}+x_{p_1}) = \frac{1}{2}[(H_1x_{s_1},x_{s_1}) + (H_2x_{p_1},x_{p_1})] = \frac{1}{2}[(H_1S_bw,S_bw) + (H_2P_az,P_az)] = \frac{1}{2}\Big(\hat{H}\omega,\omega\Big) = \hat{V}(\omega)$, где $\hat{H} = \begin{pmatrix} S_b^*H_1S_b & 0 \\ 0 & P_a^*H_2P_a \end{pmatrix}$ и H_1, H_2 — операторы из (19). Тогда $\operatorname{grad}\hat{V}(\omega) = \hat{H}\omega$, где $\operatorname{grad}\hat{V}$ — градиент функции $\hat{V}$. Ясно, что $\hat{H} = \hat{H}^* > 0$.

Поскольку $\Big(\hat{H}\omega, N_1[-N_2\omega + G(t,\omega)]\Big) = (H_1S_bw, A_{\rm gen}^{-1}[-B_{\rm gen}S_bw - B_{\rm und}S_l\phi(t) + F_1\tilde{f}(t,w,\phi(t),z,q(t,w,z))]) + (H_2P_az, A_1^{-1}[-B_1P_az + Q_1\tilde{f}(t,w,\phi(t),z,q(t,w,z))])$, то согласно (19) существуют $\hat{R}>0$ и функции $k(t)\in C([0,\infty),\mathbb{R})$, $U(v)\in C((0,\infty),(0,\infty))$ такие, что $\displaystyle\int_c^{+\infty}\frac{dv}{U(v)} = +\infty$ и выполнено

$$\Big(\hat{H}\omega, N_1[-N_2\omega + G(t,\omega)]\Big) \le k(t)\,U(\hat{V}) \quad \forall\, t\ge 0,\ \|\omega\|\ge\hat{R}. \tag{36}$$

Производная функции $\hat{V}(\omega)$ в силу системы (34) (см. в [13] определение производной вдоль траектории системы) имеет вид $\dot{\hat{V}}(\omega)\Big|_{(34)} = \big(\hat{H}\omega, N_1[-N_2\omega + G(t,\omega)]\big)$. Из (36) следует, что $\dot{\hat{V}}\Big|_{(34)} \le k(t)U(\hat{V})$ для всех $t\ge 0$ и ω таких, что $\|\omega\|\ge\hat{R}$. Из свойств функций $k(t)$, $U(v)$ следует, что неравенство $\dot{v}\le k(t)\,U(v)$, $t\ge 0$, не имеет ни одного положительного решения $v(t)$ с конечным временем определения (см. [13], гл. IV). Тогда по теореме XIII [13] (гл. IV) каждое решение $\omega(t) = (w(t)^T, z(t)^T)^T$ уравнения (34) неограниченно продолжаемо (т. е. решение определено на всем интервале $[t_0,\infty)$).

Таким образом, непрерывно дифференцируемые компоненты $w(t)$, $z(t)$ глобального решения $\omega(t)$ уравнения (34) определены на $[t_0,\infty)$. Уравнение (29) является тождеством, поскольку $(t,w(t),\phi(t),z(t),q(t,w(t),z(t)))\in\tilde{L}_0$ для всех $t\in[t_0,\infty)$. Следовательно, функция $x(t) = S_b\,w(t) + S_l\,\phi(t) + P_a\,z(t) + P_d\,q(t,w(t),z(t))$ является решением задачи Коши (1), (2) на $[t_0,\infty)$.

Решение $x(t)$ зависит от выбранной функции $\xi = \phi(t)$, которую можно считать функциональным параметром. Если $rk(\lambda A + B) = n < m$, то $X_s = X_{s_1}$, $X_{s_2} = \{0\}$, $S_2 = 0$ и компонента $\xi = S_l^{-1} S_2 x$ отсутствует. Зафиксируем функцию $\phi(t)$, выбранную ранее, и докажем единственность глобального решения $x(t)$ задачи Коши (1), (2) на всем интервале $[t_0, \infty)$. Из доказанного выше следует, что глобальное решение $\omega(t)$ задачи Коши (34), (35) единственно на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$. Предположим, что решение не единственно на $[t_0, \infty)$. Тогда существуют $t_* \geq \varepsilon$ и два различных неограниченно продолжаемых решения $\omega(t)$, $\hat{\omega}(t)$ с общим значением $\omega_* = \omega(t_*) = \hat{\omega}(t_*)$. Возьмем точку (t_*, ω_*) в качестве начальной, тогда на некотором интервале $[t_*, \varepsilon_1)$ должно существовать единственное решение уравнения (34) с начальным значением $\omega(t_*) = \omega_*$, что противоречит предположению. Из единственности глобального решения $\omega(t)$ следует единственность глобального решения $x(t)$.

II. Предположим, что дополнительные условия теоремы выполнены. Докажем ограниченность решений (устойчивость по Лагранжу ДАУ).

Если $\sup_{t\in[0,\infty)} \|\phi_{s_2}(t)\| < +\infty$, то существует число $M_1 > 0$ такое, что $\|S_l\, \phi(t)\| \leq M_1$ для любого $t \in [0, \infty)$, где $\phi(t)$ — функция, введенная выше. Доказательство, приведенное выше, остается в силе. Если $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} k(t)\, dt < +\infty$, то полученное выше неравенство $\dot{v} \leq k(t)\, U(v)$, $t \geq 0$, не имеет ни одного положительного неограниченного при $t \geq 0$ решения (см. [13], гл. IV). Тогда по теореме XV [13] (гл. IV) уравнение (34) устойчиво по Лагранжу. Следовательно, $\sup_{t\in[t_0,\infty)} \|\omega(t)\| < +\infty$, т. е.

$$\exists\, M_2,\, M_3 > 0\, (M_2,\, M_3 \in \mathbb{R}) : \|S_b\, w(t)\| \leq M_2,\ \|P_a z(t)\| \leq M_3 \quad \forall\, t \in [t_0, \infty).$$

Значит,

$$\|S_b\, w(t) + S_l\, \phi(t) + P_a z(t)\| \leq M = M_1 + M_2 + M_3 \quad \forall\, t \in [t_0, \infty). \tag{37}$$

В силу свойств оператор-функции $\Phi(x_{p_2})$ (18) и ее связи с введенной выше оператор-функцией $W(u) \colon \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d)$ (см. пункт I доказательства) существует такая точка $\tilde{u} \in \mathbb{R}^d$ ($\tilde{u} = P_d^{-1} \tilde{x}_{p_2}$), что для любого $\tilde{\tilde{u}} \in \mathbb{R}^d$ такого, что $(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \tilde{\tilde{u}}) \in \tilde{L}_0$, оператор-функция $W(u)$ базисно обратима на $\operatorname{conv}\{\tilde{u}, \tilde{\tilde{u}}\} \setminus \{\tilde{u}\}$. Пусть $(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \tilde{\tilde{u}}) \in \tilde{L}_0$ — произвольная (фиксированная) точка, а $\tilde{u}$ — точка с указанным выше свойством. Тогда, используя формулу конечных приращений для $\Psi_k(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \tilde{\tilde{u}})$ и $\Psi_k(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \tilde{u})$, где $\Psi_k(t, w, \xi, z, u) = \hat{\Theta}_k \Psi(t, w, \xi, z, u)$, Ψ — отображение (30) и $\{\hat{\Theta}_k\}_{k=1}^d$ — аддитивное разложение единицы в $\mathbb{R}^d$, и суммируя полученные равенства по k, получаем $\Psi(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \tilde{\tilde{u}}) - \Psi(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \tilde{u}) = \Lambda(\tilde{\tilde{u}} - \tilde{u})$, где Λ — оператор (32), $u^k \in \operatorname{conv}\{\tilde{u}, \tilde{\tilde{u}}\} \setminus \{\tilde{u}\}$ (т. е. $u^k = \alpha\tilde{\tilde{u}} + (1-\alpha)\tilde{u}$, $\alpha \in (0, 1]$), $k = \overline{1, d}$. Из базисной обратимости $W(u)$ на $\operatorname{conv}\{\tilde{u}, \tilde{\tilde{u}}\} \setminus \{\tilde{u}\}$ следует, что существует обратный оператор $\Lambda^{-1} \in L(\mathbb{R}^d)$. Учитывая изложенное выше и то, что $\Psi(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \tilde{\tilde{u}}) = 0$, имеем $\tilde{\tilde{u}} = \tilde{u} - \Lambda^{-1}\bigl[P_d^{-1} B_2^{-1} Q_2 \tilde{f}(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \tilde{u}) - \tilde{u}\bigr]$. Это выполнено для произвольной точки $(t_*, w_*, \xi_*, z_*, \tilde{\tilde{u}}) \in \tilde{L}_0$. Следовательно, для каждого $t_* \in [t_0, \infty)$ справедливо равенство $q(t_*, w(t_*), z(t_*)) = \tilde{u} - \Lambda^{-1}\bigl[P_d^{-1} B_2^{-1} Q_2 \tilde{f}(t_*, w(t_*), \phi(t_*), z(t_*), \tilde{u}) - \tilde{u}\bigr]$, где $w(t)$, $\phi(t)$, $z(t)$ и $q(t, w(t), z(t))$ — компоненты глобального решения $x(t) = S_b\, w(t) + S_l\, \phi(t) + P_a\, z(t) + P_d\, q(t, w(t), z(t))$ задачи Коши (1), (2). Обозначим $\tilde{M} = \|\tilde{u}\|$. Поскольку $\Lambda^{-1} \in L(\mathbb{R}^d)$, существует число $N > 0$ такое, что

$$\|q(t_*, w(t_*), z(t_*))\| \leq (1 + N)\tilde{M} + N\|P_d^{-1} B_2^{-1}\|\, \|Q_2 \tilde{f}(t_*, w(t_*), \phi(t_*), z(t_*), \tilde{u})\|$$

для каждого $t_* \in [t_0, \infty)$. Тогда из (37), (21) следует, что существует число $C > 0$ такое, что $\|q(t_*, w(t_*), z(t_*))\| \leq C$ для каждого $t_* \in [t_0, \infty)$.

Поскольку оценка $\|x(t)\| = \|S_b\, w(t) + S_l\, \phi(t) + P_a\, z(t) + P_d\, q(t, w(t), z(t))\| \le M + \|P_d\|C$ выполнена для всех $t \in [t_0, \infty)$ и с учетом (20) уравнение (29), эквивалентное уравнению $F_2Bx(t) = F_2f(t, x(t))$, корректно, то решение $x(t)$ задачи Коши (1), (2) устойчиво по Лагранжу. Это выполнено для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$, где $S_2x_0 = \phi_{s_2}(t_0)$, $t_0 \ge 0$. Значит, для начальных точек $(t_0, x_0) \in L_0$ уравнение (1), где $S_2x = \phi_{s_2}(t)$, устойчиво по Лагранжу.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2 (о неустойчивости по Лагранжу полулинейного ДАУ). *Пусть функция $f(t,x)$ принадлежит $C([0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, частная производная $\dfrac{\partial}{\partial x}f(t,x)$ непрерывна на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, $\lambda A + B$ — сингулярный пучок операторов такой, что его регулярный блок $\lambda A_r + B_r$ из* (4) *имеет индекс не выше* 1, *и выполнено* (17). *Пусть для любых $\hat{x}_{p_2}, \hat{\hat{x}}_{p_2} \in X_2$ таких, что $(t_*, x^*_{s_1} + x^*_{s_2} + x^*_{p_1} + \hat{x}_{p_2})$, $(t_*, x^*_{s_1} + x^*_{s_2} + x^*_{p_1} + \hat{\hat{x}}_{p_2}) \in L_0$, оператор-функция* (18) *является базисно обратимой на $\operatorname{conv}\{\hat{x}_{p_2}, \hat{\hat{x}}_{p_2}\}$. Далее, пусть существует область $\Omega \subset X_{s_1}\dot{+}X_1$ такая, что $(S_1 + P_1)x = 0 \notin \Omega$ и компонента $(S_1 + P_1)x(t)$ каждого существующего решения $x(t)$ с начальной точкой $(t_0, x_0) \in L_0$, где $(S_1 + P_1)x_0 \in \Omega$, все время остается в Ω. Предположим, что существуют самосопряженные положительные операторы $H_1 \in L(X_{s_1})$, $H_2 \in L(X_1)$ и функции $k(t) \in C([0,\infty),\mathbb{R})$, $U(v) \in C((0,\infty),(0,\infty))$, $\phi_{s_2}(t) \in C([0,\infty), X_{s_2})$ такие, что $(t, S_1x + \phi_{s_2}(t) + P_1x + P_2x) \in L_0$ при всех $t \in [0,\infty)$, $\displaystyle\int_c^{+\infty}\frac{dv}{U(v)}\,dv < +\infty$ $(c > 0)$, $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty}k(t)\,dt = \infty$ и выполнено*

$$\big(H_1S_1x, A_{\mathrm{gen}}^{-1}F_1[-BS_1x - B\phi_{s_2}(t) + f(t,x)]\big) + \big(H_2P_1x, A_1^{-1}Q_1[-BP_1x + f(t,x)]\big) \ge$$
$$\ge k(t)\,U\left(\frac{1}{2}\big[(H_1S_1x, S_1x) + (H_2P_1x, P_1x)\big]\right) \quad \forall\,(t,x) \in L_0\colon (S_1 + P_1)x \in \Omega. \tag{38}$$

Тогда для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$, где $(S_1 + P_1)x_0 \in \Omega$, существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (1), (2), *для которого при $rk(\lambda A + B) = m < n$ выбор функции ϕ_{s_2} с начальным значением $\phi_{s_2}(t_0) = S_2x_0$ однозначно определяет компоненту $S_2x(t) = \phi_{s_2}(t)$, и это решение имеет конечное время определения.*

Доказательство. Начало доказательства теоремы 2 совпадает с доказательством теоремы 1 вплоть до следующего утверждения. Для любой начальной точки (t_0, ω_0) такой, что $(t_0, w_0, \phi(t_0), z_0, q(t_0, w_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$, существует единственное решение $\omega(t)$ уравнения (34) на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$ с начальным условием (35). Следовательно, для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$, где $x_0 = S_b\, w_0 + S_l\, \phi(t_0) + P_a\, z_0 + P_d\, q(t_0, w_0, z_0)$, существует единственное решение $x(t) = S_b\, w(t) + S_l\, \phi(t) + P_a\, z(t) + P_d\, q(t, w(t), z(t))$ задачи Коши (1), (2) на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$.

Далее внесены следующие изменения.

По условию теоремы 2 существует область $\Omega \subset X_{s_1}\dot{+}X_1$ такая, что $(S_1 + P_1)x = 0 \notin \Omega$ и компонента $(S_1 + P_1)x(t)$ каждого решения $x(t)$ с начальной точкой $(t_0, x_0) \in L_0$, где $(S_1 + P_1)x_0 \in \Omega$, все время остается в Ω. Учитывая, что $(S_1 + P_1)x = S_b\, w + P_a z = (S_b\; P_a)\omega$, каждое решение $\omega(t)$ уравнения (34), начинающееся в области $\hat{\Omega} = \{\omega \in \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^a \mid (S_b\; P_a)\omega \in \Omega\}$, все время остается в ней и $\omega = 0 \notin \hat{\Omega}$. Введем функцию $\hat{V}(\omega) = \dfrac{1}{2}\Big(\hat{H}\omega, \omega\Big)$, где $\hat{H} =$

$= \begin{pmatrix} S_b^* H_1 S_b & 0 \\ 0 & P_a^* H_2 P_a \end{pmatrix}$ и $H_1,\ H_2$ — операторы из (38). Очевидно, функция $\hat{V}(\omega)$ положительна при всех $\omega \in \hat{\Omega}$. Из (38) следует, что

$$\Big(\hat{H}\omega, N_1[-N_2\omega + G(t,\omega)]\Big) \geq k(t)\, U(\hat{V}) \quad \forall\, t \geq 0, \quad \omega \in \hat{\Omega}, \tag{39}$$

где $k(t) \in C([0,\infty),\mathbb{R}),\ U(v) \in C((0,\infty),(0,\infty)),\ \displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)}\, dv < +\infty,\ \int_{t_0}^{+\infty} k(t)\, dt = \infty.$

Производная функции $\hat{V}(\omega)$ в силу системы (34) имеет вид $\dot{\hat{V}}(\omega)\Big|_{(34)} = \big(\hat{H}\omega, N_1[-N_2\omega + G(t,\omega)]\big)$. Из (39) следует, что $\dot{\hat{V}}\big|_{(34)} \geq k(t)\, U(\hat{V})$ при всех $t \geq 0$ и всех $\omega \in \hat{\Omega}$. Из свойств функций $k(t),\ U(v)$ следует, что неравенство $\dot{v} \geq k(t)\, U(v),\ t \geq 0$, не имеет ни одного неограниченно продолжаемого положительного решения (см. [13], гл. 4). Тогда по теореме XIV [13] (гл. IV) каждое решение $\omega(t) = (w(t)^T, z(t)^T)^T$ уравнения (34), удовлетворяющее начальному условию (35), где $\omega_0 \in \hat{\Omega}$ и $(t_0, \omega_0, \phi(t_0), q(t_0,\omega_0)) \in \tilde{L}_0$, имеет конечное время определения, т. е. определено на некотором конечном интервале $[t_0, T)$ и $\lim_{t\to T-0} \|\omega(t)\| = +\infty$. Следовательно, каждая функция $x(t) = S_b\, w(t) + S_l\, \phi(t) + P_a\, z(t) + P_d\, q(t, w(t), z(t))$ с соответствующими начальными значениями (t_0, x_0), где $x_0 = S_b\, w_0 + S_l\, \phi(t_0) + P_a\, z_0 + P_d\, q(t_0, w_0, z_0)$, является решением задачи Коши (1), (2) с конечным временем определения, т. е. решение $x(t)$ определено на соответствующем конечном интервале $[t_0, T)$ и $\lim_{t\to T-0} \|x(t)\| = +\infty$.

Решение $x(t)$ зависит от выбранной функции $\xi = \phi(t)$, которую можно считать функциональным параметром. Если $rk(\lambda A + B) = n < m$, то $X_s = X_{s_1},\ X_{s_2} = \{0\},\ S_2 = 0$ и компонента $\xi = S_l^{-1} S_2 x$ отсутствует. Зафиксируем функцию $\phi(t)$, выбранную ранее, и проверим единственность решения $x(t),\ t \in [t_0, T)$. Выше доказано, что решение $\omega(t)$ задачи Коши (34), (35) единственно на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$. Предположим, что решение $\omega(t)$ не единственно на $[t_0, T)$. Тогда существуют точка $t_* \in [\varepsilon, T)$ и два различных решения $\omega(t)$, $\hat{\omega}(t)$ с общим значением $\omega_* = \omega(t_*) = \hat{\omega}(t_*)$. Возьмем точку (t_*, ω_*) в качестве начальной, тогда на некотором интервале $[t_*, \varepsilon_1)$ должно существовать единственное решение уравнения (34) с начальным значением $\omega(t_*) = \omega_*$, что противоречит предположению. Из единственности решения $\omega(t)$ на $[t_0, T)$ следует единственность решения $x(t)$ на $[t_0, T)$.

Теорема 2 доказана.

5. Приложения. ***5.1. Исследование математической модели четырехполюсника в условиях неполных данных.*** Рассмотрим электрическую цепь четырехполюсного радиотехнического фильтра (четырехполюсника), представленного на рис. 1 [18]. Заданы входной ток I, нелинейное сопротивление φ, нелинейная проводимость h, линейные сопротивления $r_1,\ r_2$, индуктивность L и емкость C.

Для однозначного определения внутреннего состояния электрической цепи четырехполюсника необходимо знать два входных параметра: входной ток и напряжение, или два входных тока, или два напряжения. В данном случае проводится исследование модели четырехполюсника в условиях неполных данных, поскольку задан лишь один входной параметр (ток $I(t)$).

Уравнения Кирхгофа для цепи и уравнения связей, которые описывают режимы работы элементов цепи, имеют вид $I_1 + I_L = I,\ I_1 + I_2 = I_C,\ U_L = U + U_C,\ U = r_1 I_1,\ U_L = L\dfrac{dI_L}{dt} + r_2 I_L + \varphi(I_L),\ I_C = C\dfrac{dU_C}{dt} + h(U_C)$. Из приведенных уравнений получаем недоопределенную систему уравнений с переменными $x_1 = I_L,\ x_2 = U_C,\ x_3 = I_1,\ x_4 = I_2$, которая описывает

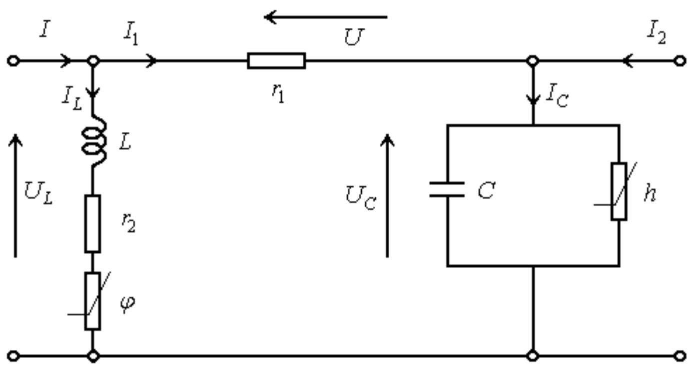

Рис. 1. Схема электрической цепи четырехполюсника.

математическую модель электрической цепи четырехполюсника:

$$L\frac{dx_1}{dt} + r_2\,x_1 - x_2 - r_1\,x_3 = -\varphi(x_1), \tag{40}$$

$$C\frac{dx_2}{dt} - x_3 - x_4 = -h(x_2), \tag{41}$$

$$x_1 + x_3 = I(t). \tag{42}$$

Предполагается, что $L,\ C,\ r_1,\ r_2$ — положительные вещественные параметры, $\varphi(x_1) \in \in C^1(\mathbb{R}),\ h(x_2) \in C^1(\mathbb{R}),\ I(t) \in C([0,\infty),\mathbb{R})$.

Векторная форма системы (40) – (42) имеет вид полулинейного ДАУ (1), где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,\ A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} r_2 & -1 & -r_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ f(t,x) = \begin{pmatrix} -\varphi(x_1) \\ -h(x_2) \\ I(t) \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Очевидно, $\lambda A+B$ — сингулярный пучок операторов $A, B\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, его ранг $rk(\lambda A+B) = = 3$ и дефект $d(\lambda A + B) = 1$ (см. определения в пп. 2, 3).

Уравнение (7) имеет одно ненулевое решение $x(\lambda) = \big(1,\ \lambda L + r_1 + r_2, -1, \lambda^2 CL + \lambda C(r_1 + + r_2) + 1\big)^T$, которое определяется с точностью до скалярного множителя. Как описано в п. 3, находим пространства $X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} = \mathrm{Lin}\{s_i\}_{i=1}^3,\ X_{s_1} = \mathrm{Lin}\{s_i\}_{i=1}^2,\ X_{s_2} = \mathrm{Lin}\{s_3\}$, $X_r = \mathrm{Lin}\{p\},\ Y_s = \mathrm{Lin}\{g_i\}_{i=1}^2,\ Y_r = \mathrm{Lin}\{q\}$, где

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -r_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и проекторы $S = S_1 + S_2 \colon \mathbb{R}^4 \to X_s,\ S_k \colon \mathbb{R}^4 \to X_{s_k},\ k = 1, 2,\ P \colon \mathbb{R}^4 \to X_r,\ F \colon \mathbb{R}^3 \to Y_s,\ Q \colon \mathbb{R}^3 \to Y_r$, которым соответствуют проекционные матрицы

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = S_1 + S_2,$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $QA = 0$, то $A_r = QA\big|_{X_r} = A_2 = 0$. Легко проверить, что если $x_r \in X_r$, то $QBx_r = y_r \in Y_r$, причем $QBx_r = 0$ только при $x_r = 0$. Значит, оператор $B_r = QB\big|_{X_r} \in \in L(X_r, Y_r)$ обратим. Следовательно, регулярный блок $\lambda A_r + B_r$ из (4) является регулярным пучком индекса 1 и $X_2 = X_r,\ Y_2 = Y_r,\ X_1 = \{0\},\ Y_1 = \{0\}$,

$$P_2 = P, \quad Q_2 = Q, \quad Q_1 = 0, \quad P_1 = 0.$$

Компоненты (проекции) вектора x имеют вид

$$x_{s_1} = S_1 x = (x_1, x_2, -x_1, x_1)^T, \quad x_{s_2} = S_2 x = (0, 0, 0, x_3 + x_4)^T, \quad x_s = x_{s_1} + x_{s_2},$$

$$x_{p_1} = P_1 x = 0, \quad x_{p_2} = P_2 x = (0, 0, u, -u)^T,\ u = x_1 + x_3.$$

Поскольку $F_1 = F$ и $F_2 = 0$, множество L_0 из условия (17) принимает вид $L_0 = \{(t, x) \in \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \mid Q_2[Bx - f(t, x)] = 0\}$, где $Q_2[Bx - f(t, x)] = 0$ эквивалентно уравнению (42), которое, учитывая обозначение $u = x_1 + x_3$, можно записать в виде $u = I(t)$. Поскольку $I(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$, то для любого $t \geq 0$ существует $u \in \mathbb{R}$ такое, что $u = I(t)$, следовательно, выполнено (17).

Рассмотрим оператор-функцию $\tilde{\Phi}(x_{p_2}) = \left[\dfrac{\partial}{\partial x}\big(Q_2 f(t_*, x^*_{s_1} + x^*_{s_2} + x_{p_2})\big) - B\right] P_2 = -BP_2 \colon X_2 \to L(\mathbb{R}^4, Y_2)$, где $t_* \in [0, \infty),\ x^*_{s_1} \in X_{s_1},\ x^*_{s_2} \in X_{s_2}$. Тогда оператор-функция (18) принимает вид $\Phi(x_{p_2}) = \tilde{\Phi}(x_{p_2})\big|_{X_2} = -BP_2\big|_{X_2} \colon X_2 \to L(X_2, Y_2)$ (т. е. оператор $\Phi(x_{p_2}) \in L(X_2, Y_2)$ является сужением оператора $\tilde{\Phi}(x_{p_2}) \in L(\mathbb{R}^4, Y_2)$ на X_2). Поскольку пространства X_2, Y_2 одномерны, требование базисной обратимости оператор-функции $\Phi(x_{p_2})$ эквивалентно требованию обратимости. Ясно, что оператор $\Phi(x_{p_2})$ обратим. Таким образом, оператор-функция $\Phi(x_{p_2})$ является базисно обратимой на $\operatorname{conv}\{\hat{x}_{p_2}, \hat{\hat{x}}_{p_2}\}$ для любых $\hat{x}_{p_2},\ \hat{\hat{x}}_{p_2} \in X_2,\ t_* \in [0, \infty),\ x^*_{s_1} \in X_{s_1}$, $x^*_{s_2} \in X_{s_2}$. Следовательно, выполнены условия для оператор-функции (18) (см. замечание 3) и можно выбрать $\tilde{x}_{p_2} = 0$ в условии (21). Поскольку $\|Q_2 f(t, x_s)\| \leq (1 + r_1^2) \sup_{t \in [0, \infty)} |I(t)|$ для всех $t \in [0, \infty)$, $\|x_s\| \leq M$, где $M > 0$ $(M \in \mathbb{R})$, то условие (21) выполнено, если $\sup_{t \in [0, \infty)} |I(t)| < +\infty$.

Оператор $A_{\mathrm{gen}} = FAS_1\big|_{X_{s_1}} \in L(X_{s_1}, Y_s)$ (см. (6)) имеет обратный $A_{\mathrm{gen}}^{-1} \in L(Y_s, X_{s_1})$, которому соответствует матрица $A_{\mathrm{gen}}^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & r_1 L^{-1} \\ 0 & C^{-1} & 0 \\ -L^{-1} & 0 & -r_1 L^{-1} \\ L^{-1} & 0 & r_1 L^{-1} \end{pmatrix}$.

Выберем $H_1 = \begin{pmatrix} L/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L/3 \end{pmatrix}$ и функцию $\phi_{s_2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi(t) \end{pmatrix} \in C([0,\infty), X_{s_2})$, где $\xi(t) \in C([0,\infty),\mathbb{R})$, $\xi(t_0) = x_3^0 + x_4^0$, и $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0\right)^T$ — начальное значение. Тогда $(H_1 S_1 x, A_{\rm gen}^{-1} F[-BS_1 x - B\phi_{s_2}(t) + f(t,x)]) = -(r_2 + r_1)x_1^2 - x_1\varphi(x_1) - x_2 h(x_2) + x_1 x_2 + {}$ $+ \xi(t)x_2 + r_1 x_1 I(t)$.

Выводы. Если существуют число $R > 0$ и функции $k(t) \in C([0,\infty),\mathbb{R})$, $U(v) \in C((0,\infty),$ $(0,\infty))$ такие, что

$$\int\limits_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} = +\infty, \quad c > 0,$$

а также для любого $t \geq 0$ и любого $x \in \mathbb{R}^4$ такого, что $\|S_1 x\| = \sqrt{3x_1^2 + x_2^2} \geq R$, выполнено

$$-(r_2 + r_1)x_1^2 - x_1\varphi(x_1) - x_2 h(x_2) + x_1 x_2 + \xi(t)x_2 + r_1 x_1 I(t) \leq k(t)\, U\left(\frac{1}{2}(Lx_1^2 + Cx_2^2)\right),$$

то по теореме 1 для любой начальной точки $(t_0, x^0) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^4$ $\left(x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0\right)^T\right)$, удовлетворяющей условию согласования

$$x_1^0 + x_3^0 = I(t_0), \tag{44}$$

и любой функции $\xi(t) \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ с начальным значением $\xi(t_0) = x_3^0 + x_4^0$ существует единственное решение $x(t)$ ДАУ (1) с (43), $S_2 x = (0,0,0,\xi(t))^T$ и начальным условием $x(t_0) = x^0$ на всем интервале $[t_0,\infty)$. Если, дополнительно, $\sup_{t\in[0,\infty)} |I(t)| < +\infty$, $\sup_{t\in[0,\infty)} |\xi(t)| <$ $< +\infty$ и $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} k(t)\, dt < +\infty$, то для начальных точек (t_0, x^0), удовлетворяющих условию (44), уравнение (1) с (43), $S_2 x = (0,0,0,\xi(t))^T$ устойчиво по Лагранжу.

Рассмотрим частный случай. Используя результаты, полученные с помощью теоремы 1, легко проверить, что для функций $\varphi(x_1) = \alpha_1\, x_1^{2k-1}$, $h(x_2) = \alpha_2\, x_2^{2r-1}$, где k, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, любой начальной точки $(t_0, x^0) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^4$, удовлетворяющей (44), и любой функции $\xi(t) \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ с начальным значением $\xi(t_0) = x_3^0 + x_4^0$ существует единственное решение $x(t)$ ДАУ (1) с (43), $S_2 x = (0,0,0,\xi(t))^T$ и начальным условием $x(t_0) = x^0$ на $[t_0,\infty)$. Если, дополнительно, $\sup_{t\in[0,\infty)} |I(t)| < +\infty$, $\sup_{t\in[0,\infty)} |\xi(t)| < +\infty$, то для начальных точек (t_0, x^0), удовлетворяющих (44), уравнение (1) с (43), $S_2 x = (0,0,0,\xi(t))^T$ устойчиво по Лагранжу.

5.2. Обратная задача для математической модели двухполюсника. Рассмотрим обратную задачу для двухполюсного радиотехнического фильтра (двухполюсника), изображенного на рис. 2 [18]. Найдем условия, при которых для входного тока $I = I(t)$ и начальных данных можно обеспечить эволюцию тока I_1 в электрической цепи двухполюсника так, чтобы он был равен наперед заданной функции $I_1 = I_1(t)$, $t_0 \leq t < \infty$, и условия, при которых все токи и напряжения в цепи будут ограниченными. Для решения этой задачи необходимо получить условия глобальной разрешимости и устойчивости по Лагранжу системы уравнений (или соответствующего ДАУ) с заданными токами $I(t)$, $I_1(t)$, которая описывает математическую модель электрической цепи двухполюсника. Также для цепи двухполюсника заданы линей-

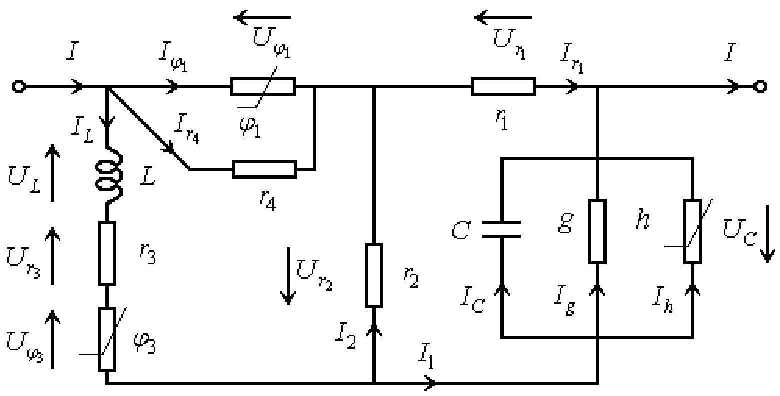

Рис. 2. Схема электрической цепи двухполюсника.

ные сопротивления $r_k,\ k=\overline{1,4}$, индуктивность L, емкость C и проводимость g, нелинейные сопротивления $\varphi_1,\ \varphi_3$ и проводимость h.

Уравнения Кирхгофа для цепи на рис. 2 имеют вид $I = I_{r_4}+I_{\varphi_1}+I_L,\ I_L = I_1+I_2,$ $I_1 = I_C+I_g+I_h,\ I_{r_1} = I-I_1,\ U_L+U_{r_3}+U_{\varphi_3}+U_{r_2} = U_{\varphi_1},\ U_C = U_{r_1}+U_{r_2}$. Режимы работы элементов цепи описываются следующими уравнениями связей: $U_{r_1} = r_1 I_{r_1},\ U_{r_2} = r_2 I_2,$ $U_{r_3} = r_3 I_L,\ U_{\varphi_1} = \varphi_1(I_{\varphi_1}),\ U_{\varphi_3} = \varphi_3(I_L),\ I_{r_4} = q\,U\varphi_1,\ q = 1/r_4,\ U_L = L\dfrac{dI_L}{dt},\ I_C = C\dfrac{dU_C}{dt},$ $I_g = g\,U_C,\ I_h = h(U_C)$. Из приведенных выше уравнений получаем переопределенную систему с переменными $x_1 = I_L,\ x_2 = U_C,\ x_3 = I_{\varphi_1}$:

$$L\frac{dx_1}{dt}+(r_2+r_3)\,x_1 = r_2\,I_1(t)+\varphi_1(x_3)-\varphi_3(x_1), \tag{45}$$

$$C\frac{dx_2}{dt}+g\,x_2 = I_1(t)-h(x_2), \tag{46}$$

$$x_2-r_2\,x_1 = r_1\,I(t)-(r_1+r_2)\,I_1(t), \tag{47}$$

$$x_1+x_3 = I(t)-q\,\varphi_1(x_3). \tag{48}$$

Предполагается, что $L,\ C,\ r_1,\ r_2$ — положительные вещественные параметры, $\varphi_1(x_3)\in$ $\in C^1(\mathbb{R}),\ \varphi_3(x_1)\in C^1(\mathbb{R}),\ h(x_2)\in C^1(\mathbb{R}),\ I(t)\in C([0,\infty),\mathbb{R}),\ I_1(t)\in C([0,\infty),\mathbb{R})$.

Векторная форма системы (45)–(48) имеет вид полулинейного ДАУ (1), где

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3,\ A=\begin{pmatrix}L&0&0\\0&C&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}r_2+r_3&0&0\\0&g&0\\-r_2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ f(t,x)=\begin{pmatrix}r_2I_1(t)+\varphi_1(x_3)-\varphi_3(x_1)\\I_1(t)-h(x_2)\\r_1I(t)-(r_1+r_2)I_1(t)\\I(t)-q\varphi_1(x_3)\end{pmatrix}. \tag{49}$$

Очевидно, $\lambda A+B$ — сингулярный пучок операторов $A,B:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, его ранг $rk(\lambda A+B) =$ $=3$ и дефект $d(\lambda A+B)=1$ (см. определения в пп. 2, 3).

Уравнение (9) имеет одно ненулевое решение (оно определяется с точностью до скалярного множителя), которое имеет вид $y(\lambda) = \big(-r_2(\lambda C+g),\, \lambda L+r_2+r_3, -(\lambda C+g)(\lambda L+r_2+r_3),\, 0\big)^T$ при $L \neq C(r_2+r_3)/g$ и $y(\lambda) = \big(-r_2 g/(r_2+r_3),\, 1,\, -(\lambda C+g), 0\big)^T$ при $L = C(r_2+r_3)/g$. Тогда при $L \neq C(r_2+r_3)/g$ получаем пространства $X_s = \operatorname{Lin}\{s_i\}_{i=1}^2,\ X_r = \operatorname{Lin}\{p\},\ Y_s = Y_{s_1}\dot{+}Y_{s_2} = \operatorname{Lin}\{l_i\}_{i=1}^3,\ Y_{s_1} = \operatorname{Lin}\{l_i\}_{i=1}^2,\ Y_{s_2} = \operatorname{Lin}\{l_3\},\ Y_r = \operatorname{Lin}\{w\},\ X_2 = X_r,\ Y_2 = Y_r,\ X_1 = \{0\},\ Y_1 = \{0\}$, где

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а при $L = C(r_2+r_3)/g$ — пространства $X_s = \operatorname{Lin}\{s\},\ X_r = X_1\dot{+}X_2 = \operatorname{Lin}\{p_i\}_{i=1}^2,\ X_1 = \operatorname{Lin}\{p_1\},\ X_2 = \operatorname{Lin}\{p_2\},\ Y_s = Y_{s_1}\dot{+}Y_{s_2} = \operatorname{Lin}\{l_i\}_{i=1}^2,\ Y_{s_1} = \operatorname{Lin}\{l_1\},\ Y_{s_2} = \operatorname{Lin}\{l_2\},\ Y_r = Y_1\dot{+}Y_2 = \operatorname{Lin}\{w_i\}_{i=1}^2,\ Y_1 = \operatorname{Lin}\{w_1\},\ Y_2 = \operatorname{Lin}\{w_2\}$, где

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad l_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{r_2 g}{r_2+r_3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим подробно случай, когда $L \neq C(r_2+r_3)/g$.

Запишем проекторы $S\colon \mathbb{R}^3 \to X_s$, $P\colon \mathbb{R}^3 \to X_r$, $Q\colon \mathbb{R}^4 \to Y_r$, $F\colon \mathbb{R}^4 \to Y_s$, $F_k\colon \mathbb{R}^4 \to Y_{s_k}$, $P_k\colon \mathbb{R}^3 \to X_k$, $Q_k\colon \mathbb{R}^4 \to Y_k$, $k = 1, 2$:

$$F = F_1 + F_2, \quad P_2 = P, \quad Q_2 = Q, \quad Q_1 = 0, \quad P_1 = 0,$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $\lambda A_r + B_r$ — регулярный пучок индекса 1. Компоненты (проекции) вектора x имеют вид

$$x_s = Sx = (x_1, x_2, -x_1)^T = (a, b, -a)^T,$$

$$x_{p_1} = P_1 x = 0, \quad x_{p_2} = P_2 x = (0, 0, x_1 + x_3)^T = (0, 0, u)^T,$$

где $a = x_1,\ b = x_2,\ u = x_1 + x_3 \in \mathbb{R}$.

Уравнение $(F_2 + Q_2)[Bx - f(t,x)] = 0$, определяющее множество L_0 из (17), эквивалентно системе уравнений (47), (48), которую, учитывая новые обозначения, можно представить в виде

$$b - r_2\, a = r_1 I(t) - (r_1 + r_2) I_1(t), \tag{50}$$

$$u = I(t) - q\,\varphi_1(u - a). \tag{51}$$

Условие (17) выполнено, если для любых $t \geq 0,\ a, b \in \mathbb{R}$ существует $u \in \mathbb{R}$ такое, что выполнены уравнения (50), (51) или

$$r_1\, u - (r_1 + r_2) I_1(t) - b + r_2\, a = -r_1 q\,\varphi_1(u - a). \tag{52}$$

Рассмотрим оператор-функцию

$$\tilde{\Phi}(x_{p_2}) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\big(Q_2 f(t_*, x^*_{s_1} + x^*_{s_2} + x^*_{p_1} + x_{p_2})\big) - B\right] P_2 = -\big(q\varphi_1'(u - a_*) + 1\big) W : X_2 \to L(\mathbb{R}^3, Y_2),$$

где $W = (w_{ij})$ — матрица размера 4×3, у которой все элементы нулевые, кроме $w_{41} = 1$ и $w_{43} = 1,\ \varphi_1'(u - a) = \left.\dfrac{d\varphi_1(y)}{dy}\right|_{y = u - a}$ и $a_* \in \mathbb{R}$. Поскольку пространства $X_2,\ Y_2$ одномерны, базисная обратимость оператор-функции $\Phi(x_{p_2}) = \tilde{\Phi}(x_{p_2})\Big|_{X_2} : X_2 \to L(X_2, Y_2)$ (18) эквивалентна обратимости $\Phi(x_{p_2})$. Пусть для любых (фиксированных) $\hat{u},\ \hat{\hat{u}},\ a_* \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих (51), выполнено условие $q\varphi_1'(u_* - a_*) \neq -1$ при любом $u_* \in \operatorname{conv}\{\hat{u}, \hat{\hat{u}}\}$. Тогда оператор $\Lambda = \tilde{\Lambda}\big|_{X_2} \in L(X_2, Y_2)$, где $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Phi}(x^*_{p_2}),\ x^*_{p_2} = (0, 0, u_*)^T$, обратим, так как из равенства $\tilde{\Lambda}\, x_{p_2} = 0,\ x_{p_2} \in X_2$, следует, что $x_{p_2} = 0$. Значит, для любых $\hat{u},\ \hat{\hat{u}},\ a_* \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих (51), оператор-функция $\Phi(x_{p_2})$ (18) является базисно обратимой на $\operatorname{conv}\{\hat{x}_{p_2}, \hat{\hat{x}}_{p_2}\}$, где $\hat{x}_{p_2} = (0, 0, \hat{u})^T,\ \hat{\hat{x}}_{p_2} = (0, 0, \hat{\hat{u}})^T$.

Оператор $A_{\text{gen}} = F_1 A S\big|_{X_s} \in L(X_s, Y_{s_1})$ (см. (8)) имеет обратный $A_{\text{gen}}^{-1} \in L(Y_{s_1}, X_s)$, которому соответствует матрица $A_{\text{gen}}^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{-1} & 0 & 0 \\ -L^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Выберем $H_1 = \begin{pmatrix} L/2 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & L/2 \end{pmatrix}$. Тогда $(H_1 S x, A_{\text{gen}}^{-1} F_1[-BSx + f(t,x)]) = -g x_2^2 - (r_2 + r_3) x_1^2 - x_1 \varphi_3(x_1) - x_2 h(x_2) + x_1 \varphi_1(x_3) + (r_2 x_1 + x_2) I_1(t)$.

Поскольку для всех $t \in [0, \infty),\ x \in \mathbb{R}^3$ выполнена оценка $\|F_2 f(t,x)\| \leq r_1 \sup_{t \in [0,\infty)} |I(t)| + (r_1 + r_2) \sup_{t \in [0,\infty)} |I_1(t)|$, то условие (20) выполнено, если $\sup_{t \in [0,\infty)} |I(t)| < +\infty$, $\sup_{t \in [0,\infty)} |I_1(t)| < +\infty$.

Заметим, что для любого фиксированного $\tilde{x}_{p_2} = (0,0,\tilde{u})^T$, где $\tilde{u} \in \mathbb{R}$, и для всех $t \in [0,\infty)$, $\|x_s + x_{p_1}\| \le M$, где $M > 0$ $(M \in \mathbb{R})$, т. е. M — произвольное фиксированное положительное число, выполнена оценка $\|Q_2 f(t, x_s + x_{p_1} + \tilde{x}_{p_2})\| \le \sup_{t\in[0,\infty)} \max_{|a|\le M/\sqrt{2}} |I(t) - q\varphi_1(\tilde{u} - a)|$. Так как φ_1 принадлежит $C^1(\mathbb{R})$, то для любого фиксированного $\tilde{x}_{p_2}$ (т. е. любого фиксированного $\tilde{u} \in \mathbb{R}$) выполнено условие (21), если $\sup_{t\in[0,\infty)} |I(t)| < +\infty$.

Теперь рассмотрим случай, когда $L = C(r_2 + r_3)/g$.

Запишем проекторы $S\colon \mathbb{R}^3 \to X_s$, $P\colon \mathbb{R}^3 \to X_r$, $Q\colon \mathbb{R}^4 \to Y_r$, $F\colon \mathbb{R}^4 \to Y_s$, $F_k\colon \mathbb{R}^4 \to Y_{s_k}$, $P_k\colon \mathbb{R}^3 \to X_k$, $Q_k\colon \mathbb{R}^4 \to Y_k$, $k = 1,2$; $F = F_1 + F_2$, $Q = Q_1 + Q_2$, $P = P_1 + P_2$,

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{r_2 g}{r_2 + r_3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{r_2 g}{r_2 + r_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -r_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $\lambda A_r + B_r$ — регулярный пучок индекса 1. Компоненты (проекции) вектора x имеют вид

$$x_s = Sx = (0, x_2 - r_2 x_1, 0)^T = (0, d, 0)^T, \quad x_{p_1} = P_1 x = (x_1, r_2 x_1, -x_1)^T = (a, r_2 a, -a)^T,$$

$$x_{p_2} = P_2 x = (0, 0, x_1 + x_3)^T = (0,0,u)^T, \quad \text{где } a = x_1,\ d = x_2 - r_2 x_1,\ u = x_1 + x_3 \in \mathbb{R}.$$

Уравнение $(F_2 + Q_2)[Bx - f(t,x)] = 0$ эквивалентно системе (47), (48). Учитывая новые обозначения, уравнение (47) можно представить в виде

$$d = r_1 I(t) - (r_1 + r_2) I_1(t), \tag{53}$$

а уравнение (48) — в виде (51). Условие (17) выполнено, если для любых $t \ge 0$, $a, d \in \mathbb{R}$ существует $u \in \mathbb{R}$ такое, что выполнены (53), (51) или

$$r_1\, u - (r_1 + r_2) I_1(t) - d = -r_1 q\, \varphi_1(u - a). \tag{54}$$

Оператор-функция $\Phi(x_{p_2})$ (18) имеет тот же вид, что и в случае $L \ne C(r_2 + r_3)/g$, и является базисно обратимой при выполнении аналогичного условия. Матрицы операторов, обратных к $A_{\text{gen}} \in L(X_s, Y_{s_1})$, $A_1 = Q_1 A\big|_{X_1} \in L(X_1, Y_1)$, имеют вид $A_{\text{gen}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_2 L^{-1} & C^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ r_2 L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Выберем $H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{C(r_2+r_3)}{r_2 g} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H_2 = \begin{pmatrix} Lr_2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{L(r_2+r_3)}{r_2^2 g} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ для (19). Оценки для условий (21), (20) аналогичны полученным выше.

Выводы. По теореме 1 для любой начальной точки $(t_0, x^0) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^3$ $(x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)^T)$, удовлетворяющей условию согласования

$$x_2^0 - r_2\, x_1^0 = r_1\, I(t_0) - (r_1 + r_2)\, I_1(t_0), \quad x_1^0 + x_3^0 = I(t_0) - q\,\varphi_1(x_3^0), \tag{55}$$

существует единственное решение $x(t)$ ДАУ (1) с (49) и начальным условием

$$x(t_0) = x^0 \tag{56}$$

на $[t_0,\infty)$, если при $L \neq C(r_2+r_3)/g$ выполнены условия:

1) для любых $t \geq 0,\ a,\ b \in \mathbb{R}$ существует $u \in \mathbb{R}$ такое, что выполнено (52);

2) для любых $\hat{u},\ \hat{\hat{u}},\ a_* \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих (51), выполнено условие $q\varphi_1'(u_* - a_*) \neq -1$ при любом $u_* \in \operatorname{conv}\{\hat{u}, \hat{\hat{u}}\}$;

3) существуют $R > 0$ и функции $k(t) \in C([0,\infty),\mathbb{R})$, $U(v) \in C((0,\infty),(0,\infty))$ такие, что $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} = +\infty$ и $-gx_2^2 - (r_2+r_3)x_1^2 - x_1\varphi_3(x_1) - x_2 h(x_2) + x_1\varphi_1(x_3) + (r_2x_1 + x_2)I_1(t) \leq k(t)\,U\left(\dfrac{1}{2}(Lx_1^2 + Cx_2^2)\right)$ для всех $(t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^3$ таких, что $\sqrt{2x_1^2 + x_2^2} \geq R$ и выполнены уравнения (47), (48);

при $L = C(r_2+r_3)/g$ выполнены условия:

1) для любых $t \geq 0,\ a,\ d \in \mathbb{R}$ существует $u \in \mathbb{R}$ такое, что выполнено (54);

2) аналогично условию 2 при $L \neq C(r_2+r_3)/g$;

3) существуют $R > 0$ и функции $k(t) \in C([0,\infty),\mathbb{R})$, $U(v) \in C((0,\infty),(0,\infty))$ такие, что $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} = +\infty$ и $-\dfrac{r_2+r_3}{r_2 g}\left[g(x_2 - r_2x_1)^2 + r_2(gr_2 - r_2 - r_3)x_1^2 + x_2h(x_2)\right] + x_1\left[3r_2(\varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1)) + \dfrac{r_2+r_3}{g}h(x_2)\right] - x_2[\varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1)] + \left[\left(\dfrac{r_2+r_3}{r_2 g} - r_2\right)(x_2 - r_2x_1) + 2r_2^2x_1\right] I_1(t) \leq k(t)\,U\left(\dfrac{C(r_2+r_3)}{2r_2g}(x_2 - r_2x_1)^2 + \dfrac{L(r_2g + r_2 + r_3 + g)}{2g}x_1^2\right)$ для всех $(t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^3$ таких, что $\sqrt{2x_1^2 + x_2^2} \geq R$ и выполнены уравнения (47), (48).

Если, дополнительно, существует $\tilde{u} \in \mathbb{R}$ такое, что для любых $\tilde{\tilde{u}},\ a_* \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих (51), выполнено условие $q\varphi_1'(u_* - a_*) \neq -1$ при любом $u_* \in \operatorname{conv}\{\tilde{u}, \tilde{\tilde{u}}\} \setminus \{\tilde{u}\}$, и $\sup_{t\in[0,\infty)}|I(t)| < +\infty$, $\sup_{t\in[0,\infty)}|I_1(t)| < +\infty$, $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} k(t)\,dt < +\infty$, то для начальных точек (t_0, x^0), удовлетворяющих (55), уравнение (1) с (49) устойчиво по Лагранжу.

Рассмотрим частные случаи. В реальных радиотехнических устройствах встречаются нелинейные сопротивления и проводимости типа

$$\varphi_1(y) = \alpha_1\, y^{2k-1}, \quad \varphi_3(y) = \alpha_2\, y^{2j-1}, \quad h(y) = \alpha_3\, y^{2r-1}, \quad k, j, r \in \mathbb{N}, \quad \alpha_i > 0, \quad i = \overline{1,3}, \tag{57}$$

$$\varphi_1(y) = \alpha_1 \sin(y), \quad \varphi_3(y) = \alpha_2 \sin(y), \quad h(y) = \alpha_3 \sin(y), \quad \alpha_i > 0, \quad i = \overline{1,3}. \tag{58}$$

Для функций вида (57), где $k \le j$ при $L \ne C(r_2 + r_3)/g$, $k \le j, r$ при $L = C(r_2 + r_3)/g$ и α_1 достаточно мало, или функций вида (58), где $\alpha_1 < r_4$, и любой начальной точки $(t_0, x^0) \in \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3$, удовлетворяющей условию (55), существует единственное решение задачи Коши (1), (49), (56) на $[t_0, \infty)$. Если, дополнительно, $\sup_{t \in [0,\infty)} |I(t)| < \infty$ и $\sup_{t \in [0,\infty)} |I_1(t)| < \infty$, то для начальных точек (t_0, x^0), удовлетворяющих условию (55), ДАУ (1) с (49) устойчиво по Лагранжу. В частности, эти требования выполнены для токов вида $I_1(t) = \beta_1 t^{-n_1}$, $I(t) = = \beta_2 t^{-n_2}$, $I_1(t) = \beta_1 e^{-\alpha_1 t}$, $I(t) = \beta_2 e^{-\alpha_2 t}$, $I_1(t) = \beta_1 e^{-(t-c_1)^2 \sigma_1^{-2}}$, $I(t) = \beta_2 e^{-(t-c_2)^2 \sigma_2^{-2}}$, $I_1(t) = \beta_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1)$, $I(t) = \beta_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)$, где $n_k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k > 0$, $\beta_k, c_k, \sigma_k, \omega_k \in \mathbb{R}$, $\theta_k \in [0, 2\pi]$, $k = 1, 2$.

6. Выводы. Получены условия, при которых существует единственное глобальное решение сингулярного полулинейного ДАУ (1) для любых согласованных начальных значений t_0, x_0 (см. замечание 1), а также условия ограниченности глобальных решений. Получены условия, при которых для любых согласованных начальных значений t_0 и x_0, где компонента $(S_1 + P_1)x_0$ принадлежит некоторой области Ω, существует единственное решение ДАУ (1), которое определено лишь на конечном интервале времени и неограниченно (имеет конечное время определения).

Полученные условия не содержат ограничений типа глобального условия Липшица, что позволяет решать более сложные прикладные задачи.

Найдены условия существования, единственности и ограниченности глобальных решений для математических моделей четырех- и двухполюсного радиотехнических фильтров с нелинейными элементами. Исходя из условий исследуемых задач, модели описываются сингулярными полулинейными ДАУ.

Литература

1. *Kunkel P., Mehrmann V.* Differential-algebraic equations: analysis and numerical solution. – Zürich: Eur. Math. Soc., 2006. – 256 p.
2. *Lamour R., März R., Tischendorf C.* Differential-algebraic equations: a projector based analysis. – New York etc.: Springer, 2013. – 239 p.
3. *Riaza R.* Differential-algebraic systems: analytical aspects and circuit applications. – Hackensack, NJ: World Sci., 2008. – 330 p.
4. *Rabier P. J., Rheinboldt W. C.* Nonholonomic motion of mechanical systems from a DAE viewpoint. – Philadelphia: SIAM, 2000. – 140 p.
5. *Dai L.* Singular control systems // Lect. Notes Control and Inform. Sci. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. – 332 p.
6. *Stykel T.* On criteria for asymptotic stability of differential-algebraic equations // J. Appl. Math. and Mech. – 2002. – **82**, № 3. – P. 147 – 158.
7. *Campbell S. L., Linh V. H.* Stability criteria for DAEs with multiple delays and their numerical solutions // Appl. Math. and Comput. – 2009. – **208**. – P. 397 – 415.
8. *Tischendorf C.* On the stability of solutions of autonomous index-1 tractable and quasilinearindex-2 tractable DAEs // Circ. Syst. Signal Process. – 1994. – **13**, № 2–3. – P. 139 – 154.
9. *Du N. H., Linh V. H., Mehrmann V., Thuan D. D.* Stability and robust stability of linear time-invariant delay differential-algebraic equations // SIAM J. Matrix Anal. and Appl. – 2013. – **34**, № 4. – P. 1631 – 1654.

10. *März R.* Practical Lyapunov stability criteria for differential algebraic equations // Banach Center Publ. – 1994. – **29**, № 1. – P. 245 – 266.
11. *Tuan V., Viet P. V.* Stability of solutions of a quasilinear index-2 tractable DAE by the Lyapunov second method // Ukr. Math. J. – 2004. – **56**, № 10. – P. 1574 – 1593.
12. *Riaza R.* Stability loss in quasilinear DAEs by divergence of a pencil eigenvalue // SIAM J. Math. Anal. – 2010. – **41**, № 6. – P. 2226 – 2245.
13. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964. – 168 с.
14. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 737 – 747.
15. *Wu A., Zeng Zh.* Lagrange stability of memristive neural networks with discrete and distributed delays // IEEE Trans. Neural Networks and Learn. Systems. – 2014. – **25**, № 4. – P. 690 – 703.
16. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
17. *Руткас А. Г., Филипковская М. С.* Продолжение решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений // Журн. обчислюв. та прикл. математики. – 2013. – № 1 (111). – С. 135 – 145.
18. *Filipkovskaya M.* Global solvability of singular semilinear differential equations and applications to nonlinear radio engineering // Challeng. Mod. Technol. – 2015. – **6**, № 1. – P. 3 – 13.
19. *Руткас А. Г.* Разрешимость полулинейных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 2. – С. 225 – 239.
20. *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. – М.: Физматгиз, 1963. – 264 с.
21. *Rutkas A. G., Vlasenko L. A.* Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations // Nonlinear Anal. – 2003. – **55**, № 1-2. – P. 125 – 139.
22. *Шварц Л.* Анализ. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 822 с.

Получено 18.11.16