УДК 517.944

**С. Б. Гембарська** (Східноєвроп. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк)

# ПРО ГРАНИЧНІ ЗНАЧЕННЯ ТРИГАРМОНІЧНОГО ІНТЕГРАЛА ПУАССОНА НА МЕЖІ ОДИНИЧНОГО КРУГА

Let $C_0$ be a curve in a disk $D = \{|z| < 1\}$ tangential to a circle at the point $z = 1$ and let $C_\theta$ be the result of rotation of this curve about the origin $z = 0$ by an angle $\theta$. We construct a bounded function $u(z)$ three-harmonic in $D$ with zero normal derivatives $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ and $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ on the boundary such that the limit along $C_\theta$ does not exist for all $\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$.

Пусть $C_0$ — касательная кривая в круге $D = \{|z| < 1\}$ к окружности в точке $z = 1$ и $C_\theta$ — результат ее вращения вокруг точки $z = 0$ на угол $\theta$. Построена ограниченная тригармоническая в $D$ функция $u(z)$ с нулевыми производными $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ на границе, для которой предел вдоль $C_\theta$ не существует для всех $\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$.

**1. Вступ.** Питання про поведінку аналітичних (гармонічних) у крузі функцій, починаючи з теореми П. Фату [1], активно досліджувалось у двох напрямках. З одного боку, розширювалися класи досліджуваних функцій, а з іншого – розглядалися різноманітні способи підходу до межових точок області.

Так, порівняння дотичних і недотичних підходів до межі круга $D = \{|z| < 1\}$ привело Літтлвуда [2] до формулювання твердження про те, що існує обмежена гармонічна функція $f \in D$, для якої

$$\lim_{\substack{|z|\to 1\\ z\in C_\theta}} f(z) \tag{1}$$

не існує майже для всіх $\theta \in [0; 2\pi]$, де $C_\theta$ одержується з довільної дотичної кривої $C_0$ в $D$ до кола в точці $z = 1$ обертанням на кут $\theta$. В 1990 р. Х. Аікава [3] довів, що сформульоване твердження має місце для всіх $\theta \in [0; 2\pi]$. Зазначимо також, що трохи раніше в роботі В. Й. Горбайчука [4] для класу бігармонічних в $D$ функцій, який визначається граничною функцією $f$ і нульовою нормальною похідною, було показано, що такий клас функцій не містить інших гармонічних функцій, крім констант. Згодом в роботі [5] для згаданого класу функцій було встановлено існування обмеженої бігармонічної функції $h \in D$ такої, що границя (1) не існує для всіх $\theta \in [0; 2\pi]$.

Слід зазначити, що одержані в цьому напрямку результати знайшли застосування при дослідженні апроксимативних властивостей бігармонічного інтеграла Пуассона (див., наприклад, [6 – 11]).

Таким чином, у зв'язку з результатами робіт [3, 5] природно виникає питання про те, чи буде мати місце аналогічне твердження для тригармонічних в $D$ функцій. У цій статті буде дано позитивну відповідь на сформульоване питання.

**2. Основний результат.** Сформулюємо задачу Діріхле для тригармонічного рівняння в такій постановці.

Знайти у крузі $D$ функцію

$$u = u(z) = u(re^{i\varphi}), \qquad 0 \le r < 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

яка є розв'язком тригармонічного рівняння $\Delta^3 u = 0$ і задовольняє такі крайові умови:

$$u|_{\partial D} = g, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = g_1, \qquad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right|_{\partial D} = g_2.$$

Тут $g$, $g_1$, $g_2$ — функції, задані на межі області з певними властивостями, що забезпечують існування та єдиність розв'язку цієї задачі.

Зазначимо, що сформульована задача Діріхле досліджувалась і в більш загальній постановці, а саме, для випадків, коли замість круга $D$ розглядалися гіперкулі простору $R^n$, $n \geq 3$, $n \in N$ (див., наприклад, [12–14]).

Що ж стосується цієї задачі для одиничного круга $D$, то, як випливає з результату, одержаного у [12], її розв'язком є функція вигляду

$$u_g(\varphi, r) =$$

$$= \frac{(1-r^2)^3}{8\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{4 - 9r\cos(\varphi - t) + 6r^2\cos^2(\varphi - t) - r^3\cos(\varphi - t)}{\left(r^2 - 2r\cos(\varphi - t) + 1\right)^3} g(e^{it})dt-$$

$$-\frac{(1-r^2)^3}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(\varphi - t)}{\left(r^2 - 2r\cos(\varphi - t) + 1\right)^2} g_1(e^{it})dt+$$

$$+\frac{(1-r^2)^3}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{g_2(e^{it})}{r^2 - 2r\cos(\varphi - t) + 1} dt, \tag{2}$$

де $g \in C^2(\partial D),\ g_1 \in C^1(\partial D),\ g_2 \in C(\partial D)$.

Якщо ж на одиничному колі $g_1 = g_2 \equiv 0$, то розв'язком відповідної задачі Діріхле є тригармонічний інтеграл Пуассона

$$u_g(\varphi, r) =$$

$$= \frac{(1-r^2)^3}{8\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{4 - 9r\cos(\varphi - t) + 6r^2\cos^2(\varphi - t) - r^3\cos(\varphi - t)}{\left(1 - 2r\cos(\varphi - t) + r^2\right)^3} g(e^{it})dt. \tag{3}$$

Справедливим є таке твердження.

**Теорема 1.** *Існує обмежена тригармонічна функція $u(z)$ в $D$ така, що*

$$\lim_{\substack{|z|\to 1 \\ z \in C_\theta}} u(z)$$

*не існує для всіх $\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.*

Для доведення теореми нам знадобляться допоміжні твердження.

**Лема 1.** *Нехай $m > \pi/2$, $0 < c < 1$ і $\eta \in [0, 2\pi]$. Крім того, $g$ є вимірною на $[0, 2\pi]$, $|g| \leq 1$ на $[0, 2\pi]$ і $g(\varphi) = 0$ для $|\varphi - \eta| < mc$. Тоді для всіх $r$, $1 - c \leq r < 1$, справджується оцінка*

$$\left|u_g(\eta, r)\right| < \frac{3}{\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m}\right)^{-2} m^{-1} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m}\right)^{-4} m^{-3} + \frac{8}{5\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m}\right)^{-6} m^{-5}. \tag{4}$$

***Доведення.*** Запишемо тригармонічне ядро Пуассона $\widetilde{P}$ з інтеграла (3) у вигляді

$$\widetilde{P} := \frac{(1-r^2)^3\left[\frac{1}{2}\left(4-9r\cos(\varphi-t)+6r^2\cos^2(\varphi-t)-r^3\cos(\varphi-t)\right)\right]}{2\left(1-2r\cos(\varphi-t)+r^2\right)^3} \equiv$$

$$\equiv \frac{1-r^2}{2}\left[\frac{3(1-r^2)}{4}P+\frac{3-5r^2}{4}P^2+\frac{1-r^2}{2}P^3\right],$$

$$P=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-t)+r^2}.$$

Тоді

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g\widetilde{P}d\varphi =$$

$$=\frac{1-r^2}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{3(1-r^2)}{4}Pgd\varphi+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{3-5r^2}{4}P^2gd\varphi+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{2}P^3gd\varphi\right]=$$

$$=I_1+I_2+I_3. \tag{5}$$

Для встановлення оцінок зверху модулів величин $I_1,\ I_2$ та $I_3$ скористаємося відповідними оцінками, одержаними в [3, 5], тобто

$$|I_1|=\left|\frac{1-r^2}{2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{3(1-r^2)}{4}Pgd\varphi\right|<\frac{3}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{m}\right)^{-2}m^{-1},$$

$$|I_2|=\left|\frac{1-r^2}{2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{3-5r^2}{4}P^2gd\varphi\right|<\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{m}\right)^{-4}m^{-3}.$$

Далі, за умовою $g(\varphi)=0$ при $|\varphi-\eta|<mc$, і тому для $|I_3|$ будемо мати

$$|I_3|=\left|\frac{1-r^2}{2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{2}P^3gd\varphi\right|=\left|\frac{(1-r^2)^2}{4}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\varphi-\eta|\ge mc}P^3gd\varphi\right|\le$$

$$\le\frac{4c^5}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{m}\right)^{-6}\int\limits_{|\varphi-\eta|\ge mc}P^3g\frac{d\varphi}{|\varphi-\eta|^6}\le\frac{8}{5\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{m}\right)^{-6}m^{-5}.$$

Підставивши встановлені оцінки в (5), одержимо (4).

Лему 1 доведено.

**Лема 2.** *Нехай для сталої* $m>\pi/2$ *виконується нерівність*

$$\frac{3}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{m}\right)^{-2}m^{-1}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{m}\right)^{-4}m^{-3}+\frac{8}{5\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{m}\right)^{-6}m^{-5}\le\frac{1}{4}.$$

*Крім того*, $0 < c < 1$, $\eta \in [0, 2\pi]$, $g$ *є вимірною на* $[0, 2\pi]$, $|g| \leq 1$ *на* $[0, 2\pi]$, $g(\varphi) = 1$ *при умові* $|\varphi - \eta| < mc$. *Тоді для* $1 - c \leq r < 1$ *справджується оцінка*

$$u_g(\eta, r) \geq \frac{1}{2}. \tag{6}$$

***Доведення.*** Легко перевірити, що виконується рівність

$$u_g(\eta, r) = 1 + 2u_{\frac{1}{2}(g-1)}(\eta, r). \tag{7}$$

Дійсно,

$$1 + 2u_{\frac{1}{2}(g-1)}(\eta, r) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(g-1)\widetilde{P}dt =$$

$$= 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g\widetilde{P}dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{P}dt.$$

Покажемо, що $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \widetilde{P}dt = 1$. Використавши зображення (5) для ядра $\widetilde{P}$, одержимо

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{P}dt =$$

$$= \frac{1-r^2}{2} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{3(1-r^2)}{4} Pdt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{3-5r^2}{4} P^2 dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{2} P^3 dt \right) = I_4 + I_5 + I_6.$$

Застосувавши інтегральну теорему Коші, обчислимо $I_4$, $I_5$ та $I_6$:

$$I_4 = \frac{1-r^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{3(1-r^2)}{4} Pdt = \frac{3r^4 - 6r^2 + 3}{8},$$

$$I_5 = \frac{1-r^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{3-5r^2}{4} P^2 dt = \frac{3 - 2r^2 - 5r^4}{8},$$

$$I_6 = \frac{1-r^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{4} P^3 dt = \frac{2 + 8r^2 + 2r^4}{8}.$$

Підставивши $I_4$, $I_5$ та $I_6$ у рівність (6), одержимо $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \widetilde{P}dt = 1$.

Отже,

$$1 + 2u_{\frac{1}{2}(g-1)}(\eta, r) = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g\widetilde{P}dt - 1 = u_g(\eta, r).$$

Тому, застосувавши лему 1 до функції $\dfrac{1}{2}(g-1)$ при $1-c \le r < 1$, отримаємо

$$u_{\frac{1}{2}(g-1)}(\eta, r) \ge -q,$$

де

$$q := \frac{3}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{m}\right)^{-2} m^{-1} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{m}\right)^{-4} m^{-3} + \frac{8}{5\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{m}\right)^{-6} m^{-5}.$$

За умовою $q \le \dfrac{1}{4}$, і тому з (7) випливає нерівність (6).

Лему 2 доведено.

**Лема 3.** *Нехай* $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{4}$ *і* $0 < c < 1$. *Припустимо, що функція* $g$ *є вимірною на* $[0, 2\pi]$, $|g| \le 1$ *на* $[0, 2\pi]$ *і для всіх* $\eta \in [0, 2\pi]$ *виконується нерівність*

$$c^{-1} \int\limits_{|\varphi-\eta|<c} |g(\varphi)| d\varphi \le \varepsilon.$$

*Тоді*

$$\sup_{|z|\le 1-c} |u_g(\eta, r)| \le m_1\sqrt{\varepsilon},$$

*де*

$$m_1 = \frac{185}{8\pi} + \frac{3}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)^{-2} + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)^{-4} + \frac{1}{10\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)^{-6}.$$

***Доведення.*** Нехай $r = 1-c$ і $re^{i\eta}$ — довільна точка на колі $\{|z| = r\}$. Запишемо функцію $g$ у вигляді $g = v_1 + v_2$, де $v_1 = g\chi_{|\varphi-\eta|<c/\sqrt{\varepsilon}}$, $\chi_A$ — характеристична функція множини $A$.

Оцінимо зверху на колі $|z| = 1-c$ величини $|u_{v_1}(\eta, r)|$ і $|u_{v_2}(\eta, r)|$. Згідно з рівністю (5) для функції $v_1$ маємо

$$|u_{v_1}(\eta, r)| \le \frac{3(1-r^2)^2}{8}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_1 P d\varphi\right| + \frac{(1-r^2)(3-5r^2)}{8}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_1 P^2 d\varphi\right| +$$

$$+\frac{1-r^2}{4}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_1 P^3 d\varphi\right|.$$

Використавши відповідні оцінки, одержані у роботах [3, 5], можемо записати

$$\frac{3(1-r^2)^2}{8}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_1 P d\varphi\right| \le \frac{3(4c^2+c^4)}{4\pi}\sqrt{\varepsilon} < \frac{15}{4\pi}\sqrt{\varepsilon}, \tag{8}$$

$$\frac{(1-r^2)(3-5r^2)}{8}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_1 P^2 d\varphi\right| \le \frac{3(c^2+4)}{8\pi}\sqrt{\varepsilon} < \frac{15}{8\pi}\sqrt{\varepsilon}, \tag{9}$$

$$\frac{1-r^2}{4}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_1 P^3 d\varphi\right| \le \frac{(c^2+4)(4+3c^2)}{2\pi}\sqrt{\varepsilon} < \frac{35}{2\pi}\sqrt{\varepsilon}. \tag{10}$$

Із (8) – (10) випливає оцінка

$$|u_{v_1}(\eta, r)| \le \frac{185}{8\pi}\sqrt{\varepsilon}.$$

Для встановлення оцінки величини $|u_{v_2}(\eta, r)|$, застосувавши лему 1 з $m = 1/\sqrt{\varepsilon}$, одержимо

$$|u_{v_2}(\eta, r)| < \frac{3}{\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)^{-2}\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)^{-4}\sqrt{\varepsilon^3} + \frac{8}{5\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)^{-6}\sqrt{\varepsilon^5}.$$

Таким чином, на колі $|z| = 1 - c$ справджуються співвідношення

$$|u_g(\eta, r)| \le |u_{v_1}(\eta, r)| + |u_{v_2}(\eta, r)| <$$

$$< \left(\frac{185}{8\pi} + \frac{3}{\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)^{-2} + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)^{-4} + \frac{1}{10\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)^{-6}\right)\sqrt{\varepsilon}.$$

Тому на підставі довільності вибору $r$, $1 - c \le r < 1$, $0 < c < 1$, можемо стверджувати, що для розв'язків тригармонічного рівняння $\Delta^3 u = 0$ у крузі $|z| \le 1 - c$ з неперервно диференційовними граничними умовами твердження леми є справедливим.

Лему 3 доведено.

Для того щоб сформулювати наступне твердження, наведемо необхідні позначення з відповідними коментарями.

Нехай $Tz := \{\theta | z \in C_\theta\}$ — відображення точок множини $D$ на $[0, 2\pi] \ni \theta$. $Tz := \varnothing$, якщо жодне $C_\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, не містить $z \in D$. Якщо $M \subset D$, то рівність $T(M) = [0, 2\pi]$ є справедливою тоді і тільки тоді, коли крива $C_\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, перетинає множину $M$. Нехай $\gamma$ — частина кривої $C_0$, тоді $\gamma_\theta$ — це результат її обертання навколо початку координат на кут $\theta$. При цих позначеннях $\gamma = \gamma_0$. Позначимо через $T_\gamma z := \left\{\theta \mid z \in \gamma_\theta\right\}$ множину значень відображення $T_\gamma$. Нехай $\gamma^*$ — радіальна проекція $\gamma$ на $\partial D$. Оскільки $\gamma$ — зв'язна множина, то $\gamma^*$ є круговим інтервалом на $\partial D$ або точкою. При цьому, якщо $\gamma$ містить обидва свої кінці, $\gamma^*$ є замкненим круговим інтервалом або точкою. Нехай $l(\gamma^*)$ — довжина $\gamma^*$. Величина $\gamma^*$ є скінченною, хоча крива $\gamma$ може бути неспрямлюваною.

У статті [3] доведено, що коли $\gamma$ є частиною кривої $C_0$, яка з'єднує точки $ae^{i\alpha}$ і $be^{i\beta}$, $0 < a < b < 1$, то, поклавши

$$M(\eta) = \{re^{i\eta},\ a \le r \le b\},$$

переконаємося, що $T_\gamma(M(\eta))$ — замкнений інтервал довжини $l(\gamma^*)$. Зокрема, якщо

$$\gamma^* = \left\{e^{i\theta},\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2\right\},$$

то

$$T_\gamma(M(\eta)) = [\eta - \theta_2, \eta - \theta_1].$$

**Лема 4** [5]. *Для довільного* $m > 1$ *можна вибрати послідовність дуг* $\gamma_j$ *кривої* $C_0$ *з такими властивостями*:

1) $\gamma_j$ *зв'язує* $a_j e^{i\alpha_j}$ *і* $b_j e^{i\beta_j}$;

2) *якщо* $z \in \gamma_j$, *то* $a_j \le |z| \le b_j$;

3) $l(\gamma_j^*) > j^2(1-a_j)$, *де* $\gamma_j^*$ — *радіальна проекція* $\gamma_j$ *на* $\partial D$;

4) $0 < 1 - b_j < 1 - a_j < \dfrac{1-b_{j-1}}{m} < \dfrac{1-a_{j-1}}{m}$.

***Доведення теореми* 1.** Будемо користуватися схемою міркувань, яка застосовувалась у роботах [3, 5] при побудові гармонічної функції $h(z)$ і бігармонічної функції $u_f(\varphi, r)$ відповідно.

Нехай $m$ — стала, яка означена в лемі 2. Виберемо послідовність кривих $\gamma_j$ і чисел $a_j$ і $b_j$, що задовольняють умови леми 4.

Позначимо через $M_j(\eta)$ радіальний лінійний сегмент $\{re^{i\eta}, a_j \le r \le b_j\}$. Тоді, застосувавши лему 4 до $\gamma = \gamma_j$ і $M(\eta) = M_j(\eta)$, одержимо, що $T_{\gamma_j}(M_j(\eta))$ — замкнений інтервал довжини $l(\gamma_j^*)$.

Нехай $N$ — ціле число, що задовольняє умову

$$\frac{2\pi}{l(\gamma_j^*)} \le N < 1 + \frac{2\pi}{l(\gamma_j^*)}. \tag{11}$$

Покладемо $\eta_k = \dfrac{2\pi k}{N}$. Оскільки

$$|\eta_k - \eta_{k+1}| = \frac{2\pi}{N} \le l(\gamma_j^*),$$

то $[0; 2\pi] = \bigcup\limits_{k=1}^{N} T_{\gamma_j}(M_j(\eta_k))$.

Далі, оскільки $T_{\gamma_j} z \subset Tz \ \forall z \in D$, то $T(M_j) = [0; 2\pi]$, де $M_j = \bigcup\limits_{k=1}^{N} M_j(\eta_k)$. Нехай

$$I_k = [\eta_k - m(1-a_j), \eta_k + m(1-a_j)],$$

$$E_j = \bigcup_{k=1}^{N} I_k, \qquad h_j = \chi_{E_j}.$$

Змінюючи індекс $j$, одержуємо деяку послідовність дуг $\gamma_j$. Використовуючи (11) і властивість 3 леми 4, переконуємося, що для міри множини $E_j$ виконано умову

$$|E_j| < 2m\frac{4\pi}{j^2} \to 0 \quad \text{для} \quad j \to \infty.$$

Тому, беручи послідовність дуг $\gamma_j$ відповідним чином, можемо вважати, що

$$\sum_{j=1}^{\infty} |E_j| < \infty.$$

Використовуючи властивість 4 леми 4, маємо

$$l(I_k) < 2(1 - b_{j-1}).$$

Звідси випливає, що якщо $I$ — такий інтервал на $[0; 2\pi]$, що $l(I) = 2(1 - b_{j-1})$, то кількість інтервалів $I_k$, які перетинають $I$, обмежена величиною

$$\frac{16(1-b_{j-1})}{l(\gamma_j^*)}.$$

Отже, для довільного $\eta \in [0; 2\pi]$ $h_j$ задовольняє нерівність

$$\frac{1}{1-b_{j-1}} \int\limits_{|\varphi-\eta|<1-b_{j-1}} h_j(\varphi)d\varphi \leq 32m\frac{1-a_j}{l(\gamma_j^*)},$$

де $m$ — стала, визначена в лемі 1.

Покладемо

$$32m\frac{1-a_j}{l(\gamma_j^*)} = \varepsilon > 0.$$

Внаслідок обмеженості $m$ будемо мати, що $\varepsilon \to \infty$ при $j \to \infty$. Тоді за лемою 3, покладаючи $c = 1 - b_{j-1}$, для досить великих $j$ при $g = h_j$ одержуємо оцінку

$$\sup_{|z|\leq b_{j-1}} u_{h_j}(\varphi, r) \leq m_1\sqrt{32m}\sqrt{\frac{1-a_j}{l(\gamma_j^*)}},$$

де $m_1$ — стала, визначена в лемі 3.

Далі, міркуючи, як у роботах [3, 5], остаточно отримуємо співвідношення

$$\varliminf_{\substack{r=|z|\to 1\\ z\in C_\theta}} u_g(\varphi, r) \leq -\frac{1}{4} < \frac{1}{4} \leq \varlimsup_{\substack{r=|z|\to 1\\ z\in C_\theta}} u_g(\varphi, r)$$

для всіх $\theta \in [0, 2\pi]$.

Теорему 1 доведено.

Наступне твердження в певному сенсі доповнює теорему 1.

**Теорема 2.** *У крузі $D$ існує необмежена тригармонічна функція $u_{g_0}(\varphi, r)$ така, що для всіх $\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, справджується рівність*

$$\varlimsup_{\substack{|z|\to 1\\ z\in C_\theta}} u_{g_0}(\varphi, r) = \infty.$$

***Доведення.*** Використаємо множини $E_j$, побудовані в [3]. Як зазначалося вище, для міри цих множин виконано умову $|E_j| \to 0$ при $j \to \infty$. Тоді шукану функцію $g_0(\varphi)$ вибираємо у вигляді

$$g_0(\varphi) = \sum_{j=j_0}^{\infty} p_j \chi_{E_j},$$

де $\{p_j\}$ — невід'ємна послідовність така, що

$$\varlimsup_{j\to\infty} p_j = \infty,$$

а $j_0$ вибираємо настільки великим, щоб $|g_0(\varphi)| \leq 1$. Використовуючи лему 2, одержуємо таку невід'ємну тригармонічну функцію $u_{g_0}(\varphi, r)$, для якої

$$\varlimsup_{\substack{|z|\to 1\\ z\in C_\theta}} u_{g_0}(\varphi, r) = \infty \quad \text{для всіх} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Теорему 2 доведено.

## Література


1. *Fatou P.* Series trigonometriqes et series du Taylor // Acta Math. – 1906. – **30**. – P. 335 – 400.
2. *Littlewood J. E.* On a theorem of Fatou // J. London Math. Soc. – 1927. – **2**. – P. 172 – 176.
3. *Aikawa H.* Harmonic function having no tagnential limits // Proc. Amer. Math. Soc. – 1990. – **108**, № 2. – P. 457 – 464.
4. *Горбайчук В. И.* Теорема Фату о граничном поведении производных в классе бигармонических функций // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 5. – С. 557 – 562.
5. *Гембарська С. Б.* Дотичні граничні значення бігармонічного інтеграла Пуассона в крузі // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1171 – 1176.
6. *Кальчук І. В., Харкевич Ю. І.* Асимптотика величин наближення в середньому класів диференційовних функцій за допомогою бігармонічних інтегралів Пуассона // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 8. – С. 1105 – 1115.
7. *Харкевич Ю. І., Жигалло Т. В.* Наближення функцій із класу $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ бігармонічними операторами Пуассона в рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 5. – С. 669 – 693.
8. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І*. Наближення спряжених диференційовних функцій бігармонічними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 3. – С. 333 – 345.
9. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення функцій із класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ бігармонічними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 7. – С. 939 – 959.
10. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення $(\psi,\beta)$-диференційовних функцій малої гладкості бігармонічними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 12. – С. 1602 – 1622.
11. *Кальчук І. В., Харкевич Ю. І.* Апроксимативні властивості бігармонічних інтегралів Пуассона на класах $W^r_\beta H^\alpha$ // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 11. – С. 1493 – 1504.
12. *Edenhofer J.* Eine Integraldarstellung der Losung der Dirichletschen Aufgabe bei der Polypotentialgleichung im Falle eine Hyperkugel // Math. Nachr. – 1975. – **69**. – S. 149 – 162.
13. *Жигалло Т. В., Харкевич Ю. І.* Апроксимативні властивості бігармонічних операторів Пуассона на класах $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 5. – С. 650 – 656.
14. *Гембарська С. Б., Жигалло К. М.* Апроксимативні властивості бігармонічних інтегралів Пуассона на класах Гельдера // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 7. – С. 925 – 933.
15. *Gonzales L., Keller E., Wildenhain G.* Über das Randverhalten des Poisson-Integral des polyharmonischen Gleichung // Math. Nachr. – 1980. – **95**. – S. 159 – 164.
16. *Wildenhain G.* Darstellung von Losungen linearer elliptischer Differentialgleichungen. – Berlin: Acad.-Verlag, 1981. – 92 S.


Одержано 24.10.17