

БИРОЗЕТКИ — МОДЕЛЬНЫЕ ФЛЕКСОРЫ

A new family of polyhedra called birosettes is presented. The geometric features of birosettes are analyzed. The model flexibility of birosettes is explained.

Розглянуто нову сім'ю багатогранників, які названо бірозетками. Проаналізовано геометричні властивості бірозеток, наведено кілька варіантів обґрунтування їх модельної флексорності.

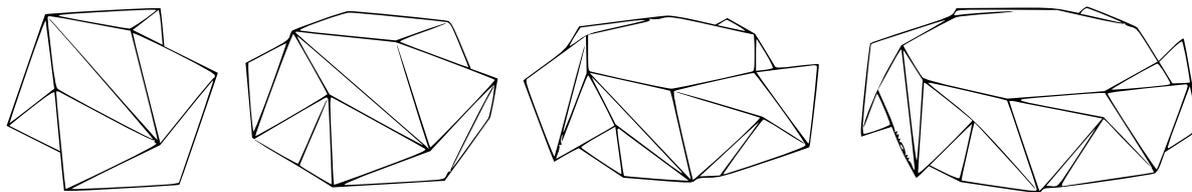
Введение. В данной работе будут описаны специальные многогранники — *бирозетки*, представляющие собой новый и нетривиальный пример *модельных флексоров*.

Понятие модельных флексоров было введено в работах А. Д. Милки как некоторый аналог теоретических флексоров. По определению, многогранник называется *теоретическим флексором*, если он допускает непрерывное изгибание в смысле Коши, при котором грани движутся как твердые тела, не меняя формы и размеров, а изменяются только двугранные углы многогранника. На сегодняшний день известно только несколько примеров теоретических флексоров, в частности октаэдры Брикара (с самопересечениями), флексоры Коннели и Штефана (см. [9; 11, с. 345–360; 10, с. 219–243]). Обычно непрерывная изгибаемость теоретических флексоров наглядно иллюстрируется поведением их физических моделей, допускающих значительные деформации без видимых изменений формы и размеров граней, но с изменением двугранных углов.

Как показывает практика, существуют многогранники, не являющиеся теоретическими флексорами, физические модели которых ведут себя подобно физическим моделям теоретических флексоров, т. е. допускают значительные деформации без видимых изменений формы и размеров граней, но с изменением двугранных углов. В работах А. Д. Милки, одним из первых обративших особое внимание на описанный феномен, такие многогранники и были названы *модельными флексорами*.

Явление модельной флексорности опровергало считавшийся общепринятым в архитектуре, технике и инженерии принцип структурной топологии, постулировавший устойчивость оболочки при условии, что ее срединная поверхность не допускает непрерывных изгибаний. Подробное обсуждение этого феномена, с тщательным математическим анализом в рамках геометрической теории устойчивости и теории динамических систем, можно найти в работах [6, 7, 13].

Основное внимание в указанных работах уделялось специальным многогранникам — звездчатым бипирамидам Александра – Владимировой, модельная флексорность которых была открыта А. Д. Милкой при изготовлении их физических моделей. Для описания деформационных свойств указанных бипирамид использовалось понятие *линейного изгибания* — изометрической деформации многогранника в классе многогранников, при которой грани либо движутся как твердые тела, не меняя формы и размеров, либо могут переламываться вдоль некоторых дополнительных ребер, причем в ходе непрерывной деформации положение ребер излома может меняться [3]. Для каждой звездчатой бипирамиды Александра – Владимировой были постро-

Рис. 1. Бирозетки с $n = 3, 4, 6, 8$.

ены специальные непрерывные линейные изгибания, позволяющие многограннику в ходе деформации значительно изменять характерные внешние размеры, например расстояние между вершинами, при весьма незначительном — „невидимом” — отклонении ребер излома граней от ребер исходной бипирамиды. Наличие подобных деформаций, линейных изгибаний с концентрацией ребер излома вблизи исходных ребер и с большим изменением внешних размеров, и было использовано А. Д. Милкой для геометрически строгого обоснования модельной флексорности бипирамид Александра–Владимировой и созданных на их основе более сложных многогранников [5–7, 13].

Заметим, что впервые эффект модельной флексорности был обнаружен А. Д. Милкой не для звездчатых бипирамид Александра–Владимировой, а для другого многогранника — *ортогонального икосаэдра Йенсена*, известного также под названием *шеддок с шестью клювами* или *шеддок Дуади* (см. [1], 12.7.5.1). Теорема Дуади утверждает, что шеддок невозможно деформировать, перемещая его вершины вдоль лучей из центра, с сохранением комбинаторной структуры, в выпуклый многогранник [8]. Таким образом, этот многогранник является содержательным примером к теоремам А. Д. Александра и А. В. Погорелова о существовании выпуклых полиэдров с заданными кривизнами в вершинах на заданных лучах.

Замечательные метрические свойства шеддока Дуади были описаны в работе [3]. В частности, было построено непрерывное семейство многогранников, также названных шеддоками, включающих как частный случай шеддок Дуади и наследующих его комбинаторное строение и свойства симметрии. Было установлено, что все упомянутые шеддоки являются жесткими первого порядка, за исключением шеддока Дуади, двенадцатиугольной звезды и сложенного кубооктаэдра, являющихся нежесткими первого порядка (но жесткими второго порядка). Построение физических моделей шеддока Дуади, выполненное А. Д. Милкой и его учениками, как раз и выявило замечательный эффект: хотя сам шеддок Дуади не является теоретическим флексором, его физическая модель является неустойчивой и допускает существенные обратимые непрерывные деформации без видимых искажений (разрывов, растяжений, переломов) материала подобно физическим моделям теоретических флексоров Коннели, Штефана и других (см. [3, 4]). Геометрически обоснованное объяснение модельной флексорности шеддока Дуади было позже представлено в [12].

В данной работе изучается еще один класс модельных флексоров, конструкция которых предложена А. Д. Милкой. Эти многогранники названы *бирозетками* (см. рис. 1).

Каждая бирозетка $P(n)$ представляет собой симметричный многогранник, составленный из двух оснований, конгруэнтных правильному n -угольнику со стороной длины 1, и бокового „пояса”, образованного $2n$ треугольными гранями, конгруэнтными равнобедренному треуголь-

нику со стороной длины 1, и $2n$ „лепестками”, конгруэнтными ромбу со стороной длины 1, переломанному вдоль одной из диагоналей с образованием двугранного угла β .

Указанный ряд бирозеток включает как частный случай при $n = 3$ и шеддок Дуади, и обобщающее его семейство шеддоков А. Д. Милки из [3]. При каждом $n > 3$ также возникает непрерывное семейство многогранников – бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in \Sigma_n}$, наследующих комбинаторные, симметричные и метрические свойства упомянутых шеддоков. В частности, каждая бирозетка $P(n, p)$ обладает группой симметрий, порождаемой вращениями на угол $\frac{2\pi}{n}$ вокруг прямой – оси бирозетки – и центральной симметрией относительно точки – центра бирозетки, дополняемой при четных значениях n поворотами на угол $\frac{\pi}{n}$ вокруг оси бирозетки.

Параметризующим множеством в семействе бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in \Sigma_n}$ является специальная плоская алгебраическая кривая Σ_n , точки которой находятся в геометрически естественном взаимно однозначном соответствии с бирозетками. Кривая Σ_n является замкнутой и симметричной, а ее внешняя форма качественно напоминает форму лемнискаты Бернулли: Σ_n является простой замкнутой кривой при $3 \leq n \leq 5$, имеет форму восьмерки при $n = 6$ и распадается в пару простых замкнутых кривых при $n \geq 7$. Кривые Σ_n , $n \geq 3$, применяются для аналитической интерпретации семейств бирозеток и являются эффективным средством для описания геометрических свойств рассматриваемых многогранников.

Внутренне-геометрические свойства бирозетки $P(n, p)$ полностью определяются значением величины L – длины диагональных ребер лепестков бирозетки, поскольку все остальные ребра имеют длину 1¹. В работе установлено, что величина L как функция $L: \Sigma_n \rightarrow \mathbb{R}$ не может быть постоянной ни на каком участке кривой Σ_n . Это означает, что какую бы бирозетку $P(n, \hat{p})$ мы не взяли, ее непрерывная деформация в семействе бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in \Sigma_n}$ не является изгибанием в смысле Коши.

Более того, показано, что при каждом $n \geq 3$ в семействе $\{P(n, p)\}_{p \in \Sigma_n}$ существует единственная, с точностью до преобразования симметрии, бирозетка $\mathbf{P}_n = P(n, p_0)$, имеющая (локально) максимальное значение длины L диагонального ребра лепестка. Указанная бирозетка названа *экстремальной* – ее нахождение связано с решением системы двух алгебраических уравнений четвертого порядка, и при $n = 3$ она представляет собой в точности шеддок Дуади.

Отметим, что непрерывная деформация экстремальной бирозетки \mathbf{P}_n в семействе бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in \Sigma_n}$ является *короткой* или *нерастягивающей* в том смысле, что длины всех ребер многогранника в ходе деформации *не увеличиваются*. Подобные преобразования, по всей видимости, должны играть такую же важную роль в геометрической теории устойчивости оболочек, как и изометрические деформации.

С точки зрения внешней геометрии в работе рассмотрены такие характерные линейные и угловые размеры бирозеток, как расстояние T между недиагональными вершинами лепестков и внутренний двугранный угол β при диагональном ребре лепестка. Показано, что каждая из этих величин может быть взята в качестве регулярного параметра в достаточно малой окрестности I точки p_0 на Σ_n , т. е. в семействе бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in I}$, достаточно близких к экстремальной

¹Задание конкретного значения L определяет развертку бирозетки и позволяет строить конкретную физическую модель многогранника.

бирозетке \mathbf{P}_n . При этом установлено, что в ходе деформации экстремальной бирозетки \mathbf{P}_n в семействе бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in I}$ внутренне-геометрический параметр L меняется в начальный момент *квадратично* по сравнению с изменением указанных внешне-геометрических параметров T и β , т. е. при рассматриваемой деформации изменение внутренних размеров граней многогранника \mathbf{P}_n происходит на порядок менее „заметно”, чем изменение его характерных внешне-геометрических размеров.

Кроме того, для непрерывной деформации экстремальной бирозетки \mathbf{P}_n в семействе бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in I}$ построено и аппроксимирующее его на начальном этапе непрерывное линейное изгибание $\{\tilde{P}(n, p)\}_{p \in I}$ бирозетки \mathbf{P}_n . Каждый из многогранников $\tilde{P}(n, p)$ получается из соответствующей бирозетки $P(n, p)$ путем замены каждого ее лепестка на соответствующим образом изломанный лепесток экстремальной бирозетки \mathbf{P}_n , т. е. в ходе указанного линейного изгибания экстремальной бирозетки \mathbf{P}_n переламываются только ее лепестки. При этом подвижные ребра излома расположены вблизи исходных граничных ребер лепестков. Указанная деформация имеет ряд замечательных аналитических свойств. В частности, установлено, что изменение внешне-геометрических размеров линейно изгибаемого многогранника на порядок превышает внутренне-геометрическую величину отклонения подвижных ребер излома от ребер исходного многогранника.

Наконец, в работе рассмотрены специальные бесконечно малые изгибания бирозеток, при которых векторы скоростей предполагаются сохраняющими свойства симметрии бирозеток, а в вершинах оснований направлены перпендикулярно плоскостям оснований. Доказано, что среди всех бирозеток нетривиальные бесконечно малые изгибания первого порядка с указанными свойствами допускают экстремальные бирозетки и только они.

Построение физических моделей бирозеток, выполненное при малых значениях n и сопровождаемое компьютерно-графическими экспериментами, показывает, что экстремальная бирозетка \mathbf{P}_n имеет свойство модельной флексорности: хотя ее непрерывная деформация в семействе бирозеток и не является изгибанием по Коши, физическая модель этого многогранника допускает значительные непрерывные деформации без видимого искажения форм и размеров граней, подобно моделям классических теоретических флексоров.

Таким образом, к обоснованию модельной флексорности экстремальных бирозеток \mathbf{P}_n можно подойти с трех различных, но взаимосвязанных между собой позиций, используя следующие свойства \mathbf{P}_n :

1) экстремальность \mathbf{P}_n и наличие коротких деформаций, т. е. возможность деформировать \mathbf{P}_n в семействе бирозеток с неувеличением длин ребер так, что в начальный момент деформации внутренне-геометрические размеры (длины ребер) многогранника меняются как минимум квадратично по сравнению с изменением внешне-геометрических размеров;

2) существование специальных непрерывных линейных изгибаний многогранника \mathbf{P}_n , при которых незначительные отклонения подвижных ребер излома от исходных ребер приводят к значительным изменениям внешней формы многогранника — указанное отклонение является квадратичным по сравнению с изменением внешне-геометрических размеров;

3) нежесткость \mathbf{P}_n , связанную с существованием для этого многогранника специального нетривиального бесконечно малого изгибания первого порядка.

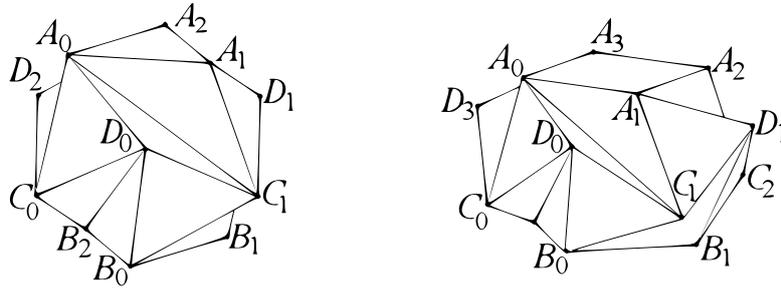


Рис. 2. Бирозетки $P(3)$ и $P(4)$.

Возможно, аналогичные подходы могут быть реализованы и для других классов модельных флексоров.

1. Определение бирозетки. Введем в рассмотрение общее понятие *бирозетки* $P(n)$, описав в явном виде вершины, ребра и грани этого многогранника.

В качестве *оснований* бирозетки $P(n)$, $n \geq 3$, возьмем конгруэнтные правильные выпуклые n -угольники $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ и $B_0B_1 \dots B_{n-1}$ с вершинами в точках

$$A_k = (R \cos(\omega k), R \sin(\omega k), H), \quad 0 \leq k \leq n - 1, \tag{1}$$

$$B_k = \left(R \cos \left(\frac{\omega}{2} + \omega k \right), R \sin \left(\frac{\omega}{2} + \omega k \right), -H \right), \quad 0 \leq k \leq n - 1, \tag{2}$$

где $\omega = \frac{2\pi}{n}$ – внутренний угол оснований. Основания расположены в плоскостях, параллельных координатной плоскости Oxy и находящихся от нее на расстоянии $H > 0$.

Далее, введем в рассмотрение два набора точек – *боковых вершин* бирозетки $P(n)$:

$$C_k = (r \cos(\omega k + \alpha), r \sin(\omega k + \alpha), -h), \quad 0 \leq k \leq n - 1, \tag{3}$$

$$D_k = \left(r \cos \left(\frac{\omega}{2} + \omega k + \alpha \right), r \sin \left(\frac{\omega}{2} + \omega k + \alpha \right), h \right), \quad 0 \leq k \leq n - 1, \tag{4}$$

положение которых определяется параметрами r , h и α .

Набор из $4n$ точек $A_k, B_k, C_k, D_k, 0 \leq k \leq n - 1$, и представляет собой совокупность вершин бирозетки $P(n)$.

Опишем теперь *боковые грани* многогранника $P(n)$, дополняющие его основания.

Одна группа граней – это треугольники $A_kC_kD_k$ и $B_kD_kC_{k+1}, 0 \leq k \leq n - 1$. Другая группа граней представлена так называемыми *лепестками* $A_kA_{k+1}C_{k+1}D_k$ и $B_kC_{k+1}D_{k+1}B_{k+1}, 0 \leq k \leq n - 1$; каждый лепесток составлен из двух треугольников ($A_kA_{k+1}C_{k+1}, A_kC_{k+1}D_k$ и $B_kC_{k+1}D_{k+1}, B_kD_{k+1}B_{k+1}$ соответственно) и может интерпретироваться как четырехугольник, переломанный вдоль одной из диагоналей, *диагонального ребра* лепестка, с образованием двугранного угла.

В совокупности все указанные грани – пара оснований, $2n$ треугольных граней и $2n$ лепестков – и составляют бирозетку $P(n)$ (см. рис. 2).

Из (1)–(4) следует, что многогранник $P(n)$ инвариантен относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{n}$ вокруг оси Oz . Кроме того, $P(n)$ инвариантен по отношению к центральной симметрии относительно начала координат O , дополненной при четном n поворотом на угол $\frac{\pi}{n}$ вокруг оси Oz . В совокупности указанные преобразования порождают группу симметрий бирозетки $P(n)$. Точку O и координатную ось Oz естественно называть *центром* и *осью* $P(n)$.

Завершая определение бирозетки $P(n)$, потребуем, чтобы оба ее основания $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ и $B_0B_1 \dots B_{n-1}$ представляли собой правильные n -угольники со сторонами длины 1, а все треугольные грани $A_kC_kD_k$ и $B_kD_kC_{k+1}$, $0 \leq k \leq n-1$, – равносторонние треугольники также со сторонами длины 1.

Первое требование, предъявляемое к основаниям $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ и $B_0B_1 \dots B_{n-1}$, очевидно обеспечивается выполнением соотношения

$$R = \frac{1}{2 \sin \frac{\omega}{2}}. \quad (5)$$

Второе требование, предъявляемое к треугольным граням $A_kC_kD_k$ и $B_kD_kC_{k+1}$, приводит к соотношениям

$$R^2 - 2Rr \cos \alpha + r^2 + (H + h)^2 = 1, \quad (6)$$

$$R^2 - 2Rr \cos \left(\frac{\omega}{2} + \alpha \right) + r^2 + (H - h)^2 = 1, \quad (7)$$

$$2r^2 \left(1 - \cos \frac{\omega}{2} \right) + 4h^2 = 1, \quad (8)$$

в чем несложно убедиться, вычисляя расстояния между соответствующими вершинами треугольников с учетом (1)–(4) и принимая во внимание свойства симметрии многогранника.

Таким образом, при заданном фиксированном значении $n \geq 3$ получаем систему из трех уравнений (6)–(8) для нахождения конкретных значений четырех параметров r , α , h , H , задающих положение вершин и тем самым полностью определяющих бирозетку $P(n)$.

Замечательным фактом является то, что система уравнений (6)–(8), решения которой определяют бирозетку $P(n)$, сводится к *одному алгебраическому уравнению четвертой степени*. Действительно, вместо „полярных” параметров r , α введем „декартовы” параметры $\xi = r \cos \alpha$, $\eta = r \sin \alpha$. Тогда соотношения (6)–(8) примут вид

$$R^2 - 2R\xi + \xi^2 + \eta^2 + (H + h)^2 = 1, \quad (9)$$

$$R^2 - 2R \left(\xi \cos \frac{\omega}{2} - \eta \sin \frac{\omega}{2} \right) + \xi^2 + \eta^2 + (H - h)^2 = 1, \quad (10)$$

$$2(\xi^2 + \eta^2) \left(1 - \cos \frac{\omega}{2} \right) + 4h^2 = 1. \quad (11)$$

Выражая $\xi^2 + \eta^2$ из (11) и подставляя в (9), (10), получаем два уравнения, из которых находим

$$\xi = - \frac{2(R^2 + (H + h)^2 - 1) \cos \frac{\omega}{2} - 2R^2 - 2(H + h)^2 + 4h^2 + 1}{4R \left(1 - \cos \frac{\omega}{2} \right)}, \quad (12)$$

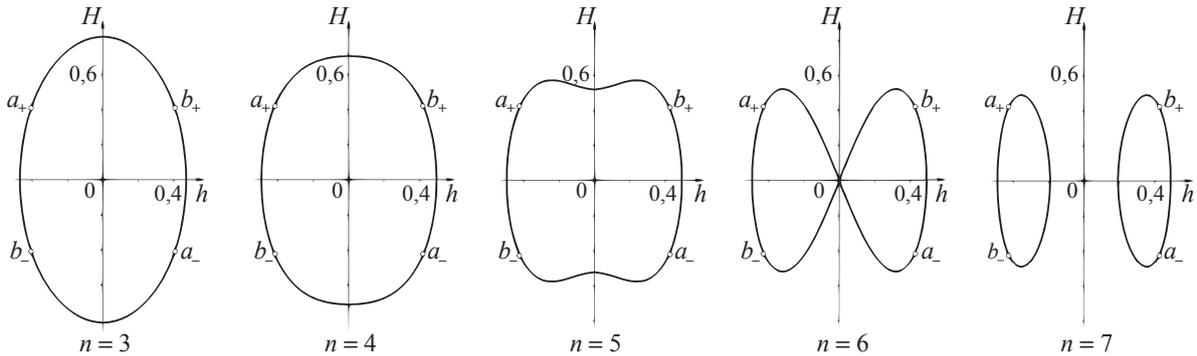


Рис. 3. Кривая Σ_n , точки $a_{\pm}(L = 0)$ и $b_{\pm}(T = 0)$.

$$\eta = \frac{2(R^2 + (H + h)^2 - 1) \cos \frac{\omega}{2} - 2R^2 - 2(H - h)^2 + 4h^2 + 1}{4R \sin \frac{\omega}{2}}. \tag{13}$$

Подставляя (12), (13) в (11), получаем следующее соотношение для параметров h, H :

$$\begin{aligned} & \left(\left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right) H^2 + \left(1 + \cos \frac{\omega}{2}\right) h^2 \right)^2 + \\ & + \left(1 + 2(R^2 - 1) \left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right) \right) \left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right) H^2 - \\ & - \left(1 - 2(R^2 + 1) \left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right) \right) \left(1 + \cos \frac{\omega}{2}\right) h^2 - \\ & - \left(R^2 + \cos \frac{\omega}{2} \right) \left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right) + R^2(R^2 - 1) \left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

При заданном $n \geq 3$ каждое решение h, H полученного алгебраического уравнения (14) и определяет, с учетом (1)–(4) и (12), (13), положение вершин бирозетки $P(n)$.

Функция $F = F(h, H)$, содержащаяся в левой части уравнения (14), представляет собой полином четвертой степени от переменных h и H с коэффициентами, зависящими от n .

Кривая Σ_n в плоскости параметров (h, H) , неявно заданная уравнением (14), представляет собой центрально-симметричную замкнутую кривую, форма которой зависит от значения n (см. рис. 3). Подобно лемнискате Бернулли, Σ_n является выпуклой кривой при $n = 3, 4$, невыпуклой кривой при $n = 5$, кривой типа „восьмерки” при $n = 6$ и, наконец, при $n \geq 7$ распадается на пару выпуклых кривых, которые при $n \rightarrow \infty$ стягиваются к паре отрезков на прямых $h = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$ с концами на биссектрисах $H = \pm h$.

Каждой точке p на кривой Σ_n соответствует своя бирозетка $P(n)$, обозначим ее $P(n, p)$. Таким образом, при каждом фиксированном $n \geq 3$ мы имеем дело с однопараметрическим семейством бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in \Sigma_n}$, параметризующим множеством этого семейства является кривая Σ_n .

Каждой паре диаметрально противоположных точек на Σ_n , связанных преобразованием симметрии $(h, H) \leftrightarrow (-h, -H)$, соответствует пара бирозеток в \mathbb{R}^3 , переводящихся друг в друга преобразованием симметрии относительно горизонтальной координатной плоскости Oxy .

Каждой паре точек на Σ_n , связанных преобразованием симметрии $(h, H) \leftrightarrow (-h, H)$, соответствует пара двойственных бирозеток в \mathbb{R}^3 : по определению, бирозетка $P(n, q)$ называется *двойственной* по отношению к бирозетке $P(n, p)$, если $P(n, q)$ получается из $P(n, p)$ заменой каждого лепестка на двойственный ему лепесток с теми же вершинами, но с иным диагональным ребром.

Следует отметить, что каждый лепесток бирозетки $P(n)$ представляет собой ромб со сторонами длины 1, переломанный вдоль одной из диагоналей (отрезки $A_k C_{k+1}$ и $B_k D_{k+1}$). Длина L диагонального ребра лепестка и расстояние T между вершинами лепестка, не принадлежащими диагональному ребру, определяются из соотношений

$$L^2 = 1 + 2r \sin \left(\frac{\omega}{2} + \alpha \right), \quad (15)$$

$$T^2 = 1 - 2r \sin \alpha, \quad (16)$$

а двугранный угол лепестка при его диагональном ребре, который обозначим β , определяется из соотношений

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{4 - L^2 - T^2}}{\sqrt{4 - L^2}}, \quad \sin \frac{\beta}{2} = \frac{T}{\sqrt{4 - L^2}}. \quad (17)$$

Для двойственных лепестков значения L и T меняются местами.

Если $L = 0$, то каждый лепесток бирозетки вырождается в пару отрезков, а сама бирозетка представляет собой антипризму с n -угольными основаниями. Таким бирозеткам соответствуют точки a_{\pm} на Σ_n , в которых

$$H = -h = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{1 + 2 \cos \frac{\omega}{2}}}{\sqrt{1 + \cos \frac{\omega}{2}}}.$$

Действительно, из того, что $L = 0$, следует, что точки A_k совпадают с точками C_{k+1} , а точки B_k — с точками D_{k+1} . Отсюда в силу (1)–(4) получаем $H = -h$. Подставляя это в соотношение (14), находим решения уравнения четвертой степени и выбираем те из них, для которых $L = 0$. Это и приводит к указанным выражениям.

Аналогично, если $T = 0$, то двугранный угол β при диагональных ребрах лепестков становится равным нулю, т. е. лепестки схлопываются. В этом случае основания бирозетки вместе с боковыми гранями в форме равносторонних треугольников образуют антипризму с n -угольными основаниями, а внутри этой антипризмы расположены схлопнувшиеся лепестки. Таким бирозеткам соответствуют точки на b_{\pm} на Σ_n , в которых

$$H = h = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{1 + 2 \cos \frac{\omega}{2}}}{\sqrt{1 + \cos \frac{\omega}{2}}}.$$

Действительно, из того, что $T = 0$, следует, что точки D_k совпадают с точками A_{k+1} , а точки B_k – с точками C_k . Отсюда в силу (1)–(4) получаем $H = h$. Снова подставляя это значение в (14), находим решения уравнения четвертой степени и выбираем те из них, для которых $T = 0$, что и приводит к указанным выражениям.

Замечание 1. Бирозетки, вообще говоря, могут иметь самопересечения, в том числе и самоналожения граней. По непрерывности, кривая Σ_n разбивается на замкнутые и открытые дуги, точки которых соответствуют бирозеткам с самопересечениями и без самопересечений соответственно. Проведенный нами компьютерный графический анализ, требующий дальнейшего строгого математического обоснования, позволяет сформулировать следующие предположения.

При $3 \leq n \leq 5$ кривая Σ_n , ориентированная по часовой стрелке, разбивается точками a_{\pm} и b_{\pm} на четыре дуги: a_+b_+ , b_+a_- , a_-b_- , b_-a_+ (см. рис. 3). Точкам на открытых дугах a_+b_+ и a_-b_- соответствуют бирозетки без самопересечений, а точкам на замкнутых дугах b_+a_- и b_-a_+ – бирозетки с самопересечениями.

При $n = 6$ кривая Σ_n , ориентированная по часовой стрелке, разбивается точками a_{\pm} , b_{\pm} и началом координат O на шесть дуг a_+O , Ob_+ , b_+a_- , a_-O , Ob_- , b_-a_+ (см. рис. 3). Точкам на открытых дугах a_+O , Ob_+ и a_-O , Ob_- соответствуют бирозетки без самопересечений, а точкам на замкнутых дугах b_+a_- и b_-a_+ – бирозетки с самопересечениями. Точке O соответствует бирозетка в форме дважды покрытого „триангулированного” правильного 12-угольника.

При $n \geq 7$ ситуация с самопересечениями становится более сложной. Каждая из двух замкнутых кривых – компонент кривой Σ_n – разбивается на четыре дуги, точкам которых соответствуют бирозетки без самопересечений и с самопересечениями соответственно. При этом концами указанных дуг являются точки a_{\pm} , b_{\pm} и еще две пары специальных точек на Σ_n .

Замечание 2. Если многогранник $P(n)$ разрезать вдоль замкнутой ломаной $C_0D_0C_1D_1 \dots C_{n-1}D_{n-1}C_0$, то $P(n)$ распадется на две конгруэнтные части, каждая из которых по внешней форме напоминает *розетку*. Поэтому и представляется естественным применять к многограннику $P(n)$, составленному из двух розеток, термин *бирозетка*, предложенный А. Д. Милкой.

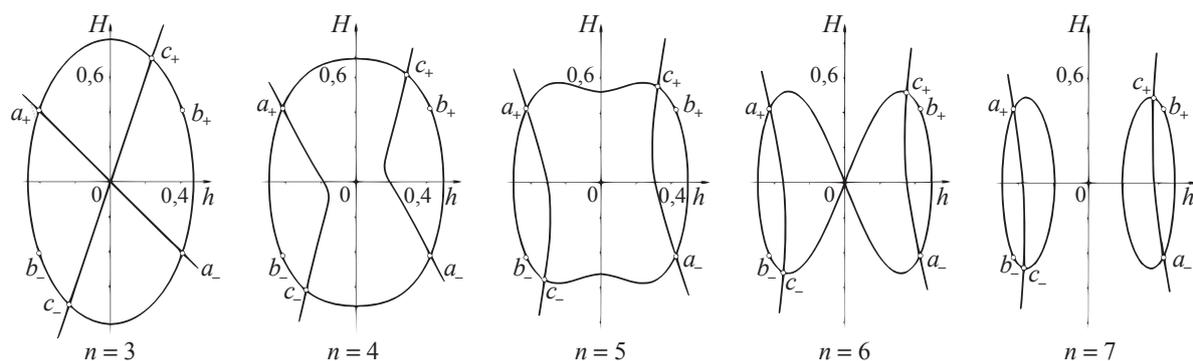
2. Внутренняя геометрия бирозеток. Внутренне-геометрические свойства бирозетки, в частности ее развертка, полностью определяются длиной L диагональных ребер ее лепестков. Из соотношения (15) с учетом замены $\xi = r \cos \alpha$, $\eta = r \sin \alpha$ и формул (12), (13) несложно получить выражение для L в терминах h и H :

$$L^2 = -2(H - h)^2 \left(1 + \cos \frac{\omega}{2}\right) + 2R^2 \left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right) + 4H^2 + 2 \cos \frac{\omega}{2}, \quad (18)$$

где, напомним, h и H удовлетворяют условию (14), $\omega = \frac{2\pi}{n}$, а $R = \frac{1}{2} \sin \frac{\omega}{2}$.

Найдем экстремальные значения величины L , рассматриваемой как функция на множестве бирозеток Σ_n при фиксированном n . Очевидно, что минимум L равен 0 и, как было указано выше, он достигается в точках $a_{\pm} \in \Sigma_n$. Чтобы найти максимальное значение $L_0 = \max_{(h,H) \in \Sigma_n} L(h, H)$, воспользуемся произвольной натуральной параметризацией $h = h(t)$, $H = H(t)$ кривой Σ_n и продифференцируем (18). Тогда получим

$$\frac{1}{2}L \frac{dL}{dt} = \left(H \left(1 + \cos \frac{\omega}{2}\right) - h \left(1 + \cos \frac{\omega}{2}\right) \right) \frac{dh}{dt} + \left(H \left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right) + h \left(1 + \cos \frac{\omega}{2}\right) \right) \frac{dH}{dt}. \quad (19)$$

Рис. 4. Кривые Σ_n и Λ_n при разных значениях n .

Поскольку H и h связаны соотношением (14), то

$$\left(\frac{dh}{dt}, \frac{dH}{dt} \right) = \frac{1}{|\nabla F|} \left(-\frac{dF}{dH}, \frac{dF}{dh} \right),$$

где F — полином четвертой степени, содержащийся в левой части (14). Вычисляя указанные частные производные и подставляя в (19), получаем

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla F|}{2} L \frac{dL}{dt} &= \left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right)^2 H^4 - 2 \left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right)^2 H^3 h - \\ &- 2 \left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{\omega}{2}\right) H h^3 - \left(1 + \cos \frac{\omega}{2}\right)^2 h^4 + \\ &+ \left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right) \left(R^2 \left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right) + \cos \frac{\omega}{2} - \frac{1}{2} \right) H^2 - 2R^2 \left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right)^2 H h + \\ &+ \left(1 + \cos \frac{\omega}{2}\right) \left(-R^2 \left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right) + \cos \frac{\omega}{2} - \frac{1}{2} \right) h^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Выражение $\Phi = \Phi(h, H)$, содержащееся в правой части (20), представляет собой полином четвертой степени от переменных h и H с коэффициентами, зависящими от n . При каждом фиксированном $n \geq 3$ уравнение $\Phi(h, H) = 0$ задает на плоскости параметров (h, H) некоторую алгебраическую кривую четвертого порядка, которую мы обозначим Λ_n .

Утверждение 1. *Каково бы ни было $n \geq 3$, кривая Λ_n пересекает кривую Σ_n в точках a_+ , a_- и еще в некоторой паре взаимно симметричных точек c_+ и c_- , а при $n = 6$ еще и в точке O (начале координат).*

Доказательство этого утверждения может быть проведено средствами элементарного математического анализа с учетом того, что функции $F(h, H)$ и $\Phi(h, H)$ являются полиномами четвертой степени. Рис. 4 иллюстрирует приведенное утверждение.

Точки a_+ и a_- , очевидно, соответствуют минимальному значению $L = 0$. Точки c_+ и c_- являются точками максимума для L на Σ_n . С геометрической точки зрения эти точки соответствуют взаимно симметричным бирозеткам $P(n, c_+)$ и $P(n, c_-)$, длина L диагонального ребра

лепестка которых является (локально) максимальной по сравнению с другими бирозетками². Таким образом, из утверждения 1 вытекает следующее.

Следствие 1. *Каково бы ни было $n \geq 3$, среди бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in \Sigma_n}$ имеется единственная пара взаимно симметричных бирозеток $P(n, c_+)$ и $P(n, c_-)$ с (локально) максимальным значением длины L диагонального ребра лепестка.*

В дальнейшем указанные бирозетки $P(n, c_+)$ и $P(n, c_-)$, которые являются основным объектом рассмотрения в данной статье, будем называть *экстремальными*. Для простоты, с учетом свойств симметрии, рассмотрение будем проводить только для экстремальной бирозетки $\mathbf{P}_n = P(n, c_+)$.

Нахождение точек c_{\pm} и, как следствие, нахождение координат вершин экстремальных бирозеток $P(n, c_{\pm})$ и их характерных размеров, в том числе соответствующего максимального значения L_0 для величины L , может быть проведено численно³ при каждом конкретном значении n (см. таблицу в завершающем пункте статьи). Отметим лишь, что ни при каком $n \geq 3$ точки c_{\pm} не могут совпадать ни с точками a_{\pm} , ни с точками b_{\pm} , и не могут лежать на координатных осях.

При условии, что правильны приведенные выше предположения о наличии самопересечений у бирозеток, которые опираются на тщательный компьютерный графический анализ, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2. *Каково бы ни было $n \geq 3$, экстремальная бирозетка \mathbf{P}_n не имеет самопересечений.*

Отсутствие самопересечений у \mathbf{P}_n позволяет строить реальные физические модели этого многогранника и делает возможным их эффективное применение в инженерных, технических и архитектурных конструкциях.

Заметим также, что поскольку Σ_n и Λ_n пересекаются в изолированных точках, то величина L не является постоянной ни на каком участке кривой Σ_n . Это означает, что для любой бирозетки $P(n, \tilde{p})$ ее непрерывная деформация в семействе бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in \Sigma_n}$ не является изгибанием в смысле Коши, так как при такой деформации меняется длина L диагональных ребер лепестков.

Утверждение 3. *Какую бы бирозетку мы не взяли, ее непрерывная деформация в семействе бирозеток не является непрерывным изгибанием.*

Замечание 3. При фиксированном $n \geq 3$ кривая Σ_n без точек a_{\pm} , c_{\pm} распадается на четыре открытые дуги, для каждой из которых величину $L \in (0, L_0)$ можно использовать в качестве регулярной параметризации. Соответственно, если из семейства всех бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in \Sigma_n}$ удалить бирозетки – антипризмы $P(n, a_{\pm})$ и экстремальные бирозетки $P(n, c_{\pm})$, то получим четыре набора непрерывных однопараметрических семейств бирозеток, в каждом из которых величину $L \in (0, L_0)$ можно использовать в качестве параметра семейства.

Замечание 4. При фиксированном $n \geq 3$ задание конкретного значения $0 \leq L \leq L_0$ полностью определяет развертку бирозетки. При $0 < L < L_0$ каждая развертка реализуется в виде четырех (двух пар взаимно симметричных) бирозеток, изометричных между собой. В каждом

²При $n = 6$ пересечение кривых Λ_6 и Σ_6 содержит и точку O . Но это объясняется равенством нулю в этой точке величины ∇F , а не $\frac{dL}{dt}$, поэтому O не является точкой экстремума для $L: \Sigma_6 \rightarrow R$.

³Выражения для координат точек c_{\pm} , удовлетворяющих системе уравнений $F(h, H) = 0$ и $\Phi(h, H) = 0$, можно получить и в явном виде, учитывая, что оба уравнения являются алгебраическими четвертой степени, но эти выражения будут весьма громоздкими.

же из граничных — экстремальных — случаев, при $L = 0$ и $L = L_0$, развертка реализуется в виде одной пары взаимно симметричных бирозеток — антипризм и экстремальных бирозеток соответственно.

3. Внешняя геометрия бирозеток. Для оценки внешней формы бирозетки будем использовать такие характерные геометрические „размеры”, как расстояние T между недиагональными ребрами лепестка и двугранный угол β при диагональном ребре лепестка. Очевидно, что внешне-геометрические величины T и β , аналогично рассмотренной ранее внутренне-геометрической величине L , представляют собой некоторые функции от произвольно выбранного натурального параметра t на кривой Σ_n .

Проанализируем сначала поведение T . Из выражения (16) с учетом замены $\xi = r \cos \alpha$, $\eta = r \sin \alpha$ и формул (12), (13) путем элементарных преобразований получаем выражение для T в терминах h и H :

$$T^2 = -2(H + h)^2 \left(1 + \cos \frac{\omega}{2}\right) + 2R^2 \left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right) + 4H^2 + 2 \cos \frac{\omega}{2}. \quad (21)$$

Сравнивая (18) и (21), видим, что $T(h, H) = L(-h, H)$. Это объясняется тем, что, как отмечалось выше, преобразование симметрии $(h, H) \rightarrow (-h, H)$ связывает точки на Σ_n , соответствующие двойственным бирозеткам, у лепестков которых значения L и T меняются местами.

Как следствие, минимальное значение величины T как функции на кривой Σ_n равно нулю и достигается в точках b_{\mp} , симметричных точкам a_{\pm} , а максимальное значение $\max_{(h,H) \in \Sigma_n} T(h, H)$ равно $L_0 = \max_{(h,H) \in \Sigma_n} L(h, H)$ и достигается в точках, симметричных точкам c_{\pm} относительно координатной прямой H .

Следует отметить, что сами точки $c_{\pm} \in \Sigma_n$ не могут быть точками экстремумов функции $T: \Sigma_n \rightarrow \mathbb{R}$, поскольку, как отмечалось ранее, c_{\pm} не могут совпадать с b_{\mp} или лежать на координатной прямой $h = 0$. Поэтому величину T можно использовать для локальной параметризации кривой Σ_n в некоторой окрестности $I \subset \Sigma_n$ точки c_+ . Иначе говоря, величину T можно использовать в качестве параметра для семейства бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in I}$, достаточно близких к экстремальной бирозетке $\mathbf{P}_n = P(n, c_+)$. При этом \mathbf{P}_n характеризуется тем свойством, что $\frac{dL}{dT}(T_0) = 0$, т. е.

$$L(T) = L_0 + \frac{1}{2}L_0'' \cdot (T - T_0)^2 + o((T - T_0)^2), \quad L_0'' < 0, \quad (22)$$

где L_0 и T_0 — значения L и T , соответствующие многограннику \mathbf{P}_n .

Проанализируем теперь поведение двугранного угла лепестков β , рассматривая эту величину как функцию на кривой Σ_n . Используя произвольную локальную параметризацию t кривой Σ_n и дифференцируя (17), получаем

$$\frac{d\beta}{dt} = 2 \frac{(4 - L^2) \frac{dT}{dt} + T L \frac{dL}{dt}}{(4 - L^2) \sqrt{4 - L^2 - T^2}}. \quad (23)$$

В точке c_+ , соответствующей экстремальной бирозетке \mathbf{P}_n , имеем $\frac{dL}{dt} = 0$, $\frac{dT}{dt} \neq 0$, а значит ⁴,

$$\frac{d\beta}{dt} = 2 \frac{\frac{dT}{dt}}{\sqrt{4 - L^2 - T^2}} \neq 0. \quad (24)$$

Поэтому величину β можно использовать вместо T для регулярной параметризации кривой Σ_n в окрестности точки c_+ . Иначе говоря, *величину β можно использовать в качестве параметра для семейства бирозеток, достаточно близких к экстремальной бирозетке \mathbf{P}_n . При этом \mathbf{P}_n характеризуется тем свойством, что*

$$L(\beta) = L_0 + \frac{1}{2}L_0'' \cdot (\beta - \beta_0)^2 + o((\beta - \beta_0)^2), \quad L_0'' < 0, \quad (25)$$

где β_0 – значение двугранного угла β , соответствующее многограннику \mathbf{P}_n .

С геометрической точки зрения, равенства (22) и (25) означают, что экстремальная бирозетка \mathbf{P}_n характеризуется в семействе бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in \Sigma_n}$ тем, что при ее непрерывной деформации в этом семействе ее внешне-геометрические параметры изменяются на порядок „более заметно”, чем внутренне-геометрические параметры.

В частности, если рассмотреть непрерывную деформацию \mathbf{P}_n в семействе бирозеток с относительным изменением $\delta L = \frac{|L - L_0|}{L_0}$ не более 0,001, то, как показывает численный анализ, такая деформация будет сопровождаться относительным изменением $\delta T = \frac{|T - T_0|}{T_0}$ не менее 0,076 при $n = 3$; 0,103 при $n = 4$; 0,128 при $n = 5$; 0,151 при $n = 6$; 0,176 при $n = 7$ и т. д. Заметим, что относительная вариация порядка 0,1% для внутренне-геометрических параметров считается незначительной и ненаблюдаемой в реальных физических моделях (ср. с [14, с. 2]), тогда как относительные вариации порядка 7,6% и более во внешней форме, очевидно, являются существенными и легко наблюдаемыми на практике.

4. Жесткость первого порядка. Рассмотрим бесконечно малую деформацию произвольной бирозетки $P(n, p)$, порождаемую векторами скоростей

$$v(A_j) = (0, 0, Z), \quad (26)$$

$$v(B_j) = (0, 0, -Z) \quad (27)$$

в вершинах оснований A_j и B_j и векторами скоростей

$$v(C_j) = (X_1 \cos k\omega - X_2 \sin k\omega, X_1 \sin k\omega + X_2 \cos k\omega, X_3), \quad (28)$$

$$v(D_j) = (Y_1 \cos k\omega - Y_2 \sin k\omega, Y_1 \sin k\omega + Y_2 \cos k\omega, Y_3) \quad (29)$$

в боковых вершинах C_j и D_j , $0 \leq j \leq n-1$, соответственно. Эта бесконечно малая деформация сохраняет все свойства симметрии бирозетки и не является тривиальной при $Z \neq 0$.

⁴Равенство нулю знаменателя $4 - L^2 - T^2 = 0$ после подстановки (18) и (21) принимает вид полиномиального соотношения второй степени для h и H . Элементарные, но громоздкие технические вычисления показывают, что это соотношение не может выполняться одновременно с уравнениями четвертой степени $F(h, H) = 0$ и $\Phi(h, H) = 0$, характеризующими точки c_{\pm} .

Записывая для указанных векторов стандартные соотношения первого порядка, характеризующие бесконечно малые *изгибания*, получаем следующую систему уравнений (приведенных последовательно для ребер $A_j C_j$, $A_j C_{j+1}$, $B_j C_{j+1}$, $A_j D_j$, $B_j D_j$, $B_j D_{j+1}$ и $C_j D_j$ соответственно):

$$X_1(r \cos \alpha - R) + X_2(r \sin \alpha) - X_3(H + h) + Z(H + h) = 0, \quad (30)$$

$$X_1(r \cos \alpha - R \cos \omega) + X_2(R \sin \omega + r \sin \alpha) - X_3(H + h) + Z(H + h) = 0, \quad (31)$$

$$X_1 \left(r \cos \alpha - R \cos \frac{\omega}{2} \right) + X_2 \left(r \sin \alpha + R \sin \frac{\omega}{2} \right) + X_3(H - h) + Z(H - h) = 0, \quad (32)$$

$$Y_1 \left(r \cos \left(\frac{\omega}{2} + \alpha \right) - R \right) + Y_2 \left(r \sin \left(\frac{\omega}{2} + \alpha \right) \right) - Y_3(H - h) + Z(H - h) = 0, \quad (33)$$

$$Y_1 \left(R \cos \frac{\omega}{2} - r \cos \left(\frac{\omega}{2} + \alpha \right) \right) + \\ + Y_2 \left(R \sin \frac{\omega}{2} - r \sin \left(\frac{\omega}{2} + \alpha \right) \right) - Y_3(H + h) - Z(H + h) = 0, \quad (34)$$

$$Y_1 \left(r \cos \left(\frac{\omega}{2} + \alpha \right) - R \cos \frac{\omega}{2} \right) + Y_2 \left(r \sin \left(\frac{\omega}{2} + \alpha \right) + R \sin \frac{\omega}{2} \right) + \\ + Y_3(H + h) + Z(H + h) = 0, \quad (35)$$

$$(X_1 - Y_1) \left(r \cos \left(\frac{\omega}{2} + \alpha \right) - r \cos \alpha \right) + \\ + (X_2 - Y_2) \left(r \sin \left(\frac{\omega}{2} + \alpha \right) - r \sin \alpha \right) + (X_3 - Y_3)(2h) = 0. \quad (36)$$

Это однородная линейная система из семи уравнений для семи неизвестных X_1 , X_2 , X_3 , Y_1 , Y_2 , Y_3 , Z . Из уравнений (30)–(35) находим

$$X_1 = 2(H^2 - h^2) \cos \frac{\omega}{2} \Lambda, \quad X_2 = -2(H^2 - h^2) \sin \frac{\omega}{2} \Lambda, \quad (37)$$

$$X_3 = - \left(R(H - h) \cos \frac{\omega}{2} + 2hr \cos \left(\frac{\omega}{2} + \alpha \right) - (H + h)R \right) \Lambda, \quad (38)$$

$$Y_1 = 2(H^2 - h^2) \Lambda, \quad Y_2 = 0, \quad (39)$$

$$Y_3 = \left(R(H - h) \cos \frac{\omega}{2} + 2hr \cos \left(\frac{\omega}{2} + \alpha \right) - (H + h)R \right) \Lambda,$$

$$Z = \left(R(H - h) \cos \frac{\omega}{2} - 2Hr \cos \left(\frac{\omega}{2} + \alpha \right) + (H + h)R \right) \Lambda, \quad (40)$$

где Λ – произвольное. Подставляя (37)–(40) в уравнение (36), получаем

$$\Lambda \left(r \cos \left(\frac{\omega}{2} + \alpha \right) \left(H^2 \left(\cos \frac{\omega}{2} - 1 \right) - h^2 \left(\cos \frac{\omega}{2} + 1 \right) \right) + \right. \\ \left. + hR \left(H \left(1 - \cos \frac{\omega}{2} \right) + h \left(1 + \cos \frac{\omega}{2} \right) \right) \right) = 0. \quad (41)$$

Как следствие, если выражение в круглых скобках в (41) не равно нулю, то $\Lambda = 0$, а значит, бирозетка $P(n)$ не допускает нетривиального бесконечно малого изгибания формы (26)–(29).

Несложно проверить, что условие

$$r \cos \left(\frac{\omega}{2} + \alpha \right) \left(H^2 \left(\cos \frac{\omega}{2} - 1 \right) - h^2 \left(\cos \frac{\omega}{2} + 1 \right) \right) + \\ + hR \left(H \left(1 - \cos \frac{\omega}{2} \right) + h \left(1 + \cos \frac{\omega}{2} \right) \right) = 0 \quad (42)$$

в терминах h и H с учетом замены $\xi = r \cos \alpha$, $\eta = r \sin \alpha$ и формул (12), (13) принимает вид

$$\left(1 - \cos \frac{\omega}{2} \right)^2 H^4 - 2 \left(1 - \cos \frac{\omega}{2} \right)^2 H^3 h - 2 \left(1 - \cos \frac{\omega}{2} \right) \left(1 + \cos \frac{\omega}{2} \right) H h^3 - \\ - \left(1 + \cos \frac{\omega}{2} \right)^2 h^4 + \left(1 - \cos \frac{\omega}{2} \right) \left(R^2 \left(1 - \cos \frac{\omega}{2} \right) + \cos \frac{\omega}{2} - \frac{1}{2} \right) H^2 - \\ - 2R^2 \left(1 - \cos \frac{\omega}{2} \right)^2 H h + \left(1 + \cos \frac{\omega}{2} \right) \left(-R^2 \left(1 - \cos \frac{\omega}{2} \right) + \cos \frac{\omega}{2} - \frac{1}{2} \right) h^2 = 0. \quad (43)$$

С учетом (20) условие (43) означает, что $\nabla FL \frac{dL}{dt} = 0$. Как было показано выше, на кривой Σ_n данному условию удовлетворяют в точности пара точек a_+ , a_- , если L принимает минимальное значение $L = 0$, и пара точек c_+ , c_- , если L принимает максимальное значение L_0 , а также точка O при $n = 6$.

В точках a_{\pm} имеем

$$H = -h = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{1 + 2 \cos \frac{\omega}{2}}}{\sqrt{1 + \cos \frac{\omega}{2}}}.$$

Подставляя это выражение в (37)–(40), а затем в (26)–(29), получаем, что все векторы скоростей бесконечно малой деформации в этом случае равны нулю. Аналогичная ситуация имеет место и в исключительном случае при $n = 6$ в точке O , где $h = H = 0$.

Напротив, в точках c_{\pm} имеем $H \neq \pm h$. Подставляя это выражение в (37)–(40), а затем в (26)–(29), убеждаемся, что некоторые векторы скорости бесконечно малой деформации не равны нулю, в частности $Z \neq 0$, и, как следствие, задают нетривиальное бесконечно малое изгибание многогранника.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 4. *Каково бы ни было $n \geq 3$, среди бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in \Sigma_n}$ нетривиальное бесконечно малое изгибание с векторами скоростей вида (26)–(29) допускают экстремальные бирозетки $P(n, c_+)$, $P(n, c_-)$ и только они.*

Естественность доказанного утверждения объясняется тем, что деформация произвольной бирозетки $P(n, \tilde{p})$ в однопараметрическом семействе бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in \Sigma_n}$ порождает в точности бесконечно малую деформацию вида (26)–(29). При этом данная бесконечно малая деформация представляет собой бесконечно малое изгибание тогда и только тогда, когда длины ребер деформируемой бирозетки являются стационарными в начальный момент. Поскольку у бирозеток в ходе деформации меняется только длина L диагональных ребер лепестков, рассматриваемая бесконечно малая изгибаемость и характеризует экстремальные бирозетки с максимальным значением L .

5. Линейное изгибание экстремальной бирозетки. В данном пункте мы покажем, что если рассматривать непрерывную деформацию экстремальной бирозетки $\mathbf{P}_n = P(n, c_+)$ в классе бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in \Sigma_n}$, то такую деформацию, по крайней мере на начальном этапе при $p \in \Sigma_n$, близких к c_+ , можно аппроксимировать специальным непрерывным линейным изгибанием многогранника \mathbf{P}_n .

Построение будет опираться на базовую конструкцию — линейное изгибание лепестка. Как и выше, под лепестком $\Xi = KUMV$ мы понимаем геометрическую фигуру, образованную из двух конгруэнтных равнобедренных треугольников KUM и KVM с общим основанием KM . Треугольники KUM и KVM называются гранями лепестка, стороны KU , UM , MV и VK — граничными ребрами лепестка, а основание треугольников KM — диагональю лепестка. Предполагается, что все граничные ребра имеют длину 1. Внутренние размеры лепестка определяются длиной $0 < L < 2$ его диагонали KM , а его внешняя форма определяется расстоянием $0 < T < \frac{1}{2}\sqrt{4 - L^2}$ между недиагональными вершинами U и V .

Рассмотрим лепестки $\Xi_1 = K_1U_1M_1V_1$ и $\Xi_2 = K_2U_2M_2V_2$ такие, что $L_1 \geq L_2$. Считая, что лепесток $K_2U_2M_2V_2$ зафиксирован, построим линейное изгибание лепестка $K_1U_1M_1V_1$, при котором вершины и граничные ребра $K_1U_1M_1V_1$ переходят в вершины и граничные ребра $K_2U_2M_2V_2$ соответственно.

Для этого лепесток Ξ_1 расположим, изменив при необходимости двугранный угол при диагональном ребре K_1M_1 , таким образом, чтобы недиагональные вершины лепестков совпали, $U_1 = U_2$, $V_1 = V_2$, а диагональные ребра K_1M_1 , K_2M_2 были параллельными и находились по одну сторону от общей опорной плоскости лепестков, проходящей через точки $U_1 = U_2$, $V_1 = V_2$ (см. рис. 5, а).

Заметим, что поскольку $L_1 > L_2$, то двугранный угол лепестка Ξ_1 больше, чем двугранный угол лепестка Ξ_2 . Кроме того, поскольку при изменении двугранного угла лепестка Ξ_1 расстояние между недиагональными вершинами U_1 и V_1 изменяется в пределах от 0 (когда двугранный угол равен 0) до $\sqrt{4 - L_1^2}$ (когда двугранный угол равен π), то указанную выше операцию можно выполнить тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{4 - L_1^2} \geq T_2, \quad (44)$$

где T_2 — расстояние между недиагональными вершинами U_2 , V_2 лепестка $K_2U_2M_2V_2$.

Далее, проведем через точки $U_1 = U_2$, $V_1 = V_2$ плоскость Π_M , симметрия относительно которой переводит треугольник $U_1M_1V_1$ в конгруэнтный ему треугольник $U_2M_2V_2$. Указанная плоскость пересекает лепесток Ξ_1 по паре отрезков U_1J , V_1J , где J — некоторая точка на

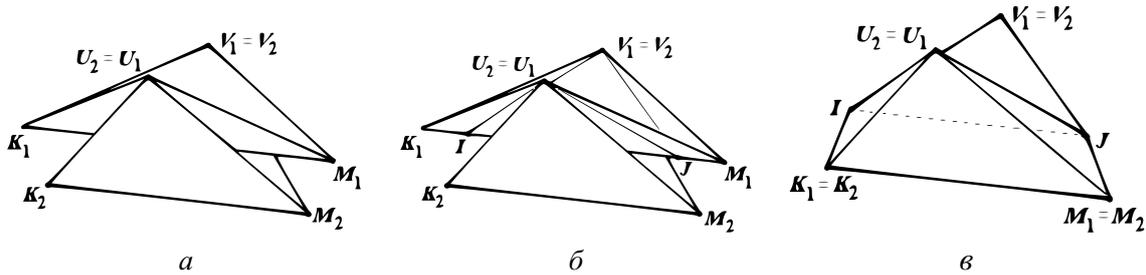


Рис. 5. Линейное изгибание лепестка.

диагональном ребре K_1M_1 . Отразим части U_1JM_1 и V_1JM_1 лепестка Ξ_1 симметрично относительно плоскости Π_M . При такой симметрии происходит переламывание граней лепестка Ξ_1 вдоль отрезков U_1J , V_1J , и граничные ребра U_1M_1 , V_1M_1 лепестка Ξ_1 переходят в граничные ребра U_2M_2 , V_2M_2 лепестка Ξ_2 (см. рис. 5, б, в).

Аналогично, проведем через точки $U_1 = U_2$, $V_1 = V_2$ плоскость Π_N , симметрия относительно которой переводит треугольник $U_1N_1V_1$ в конгруэнтный ему треугольник $U_2N_2V_2$. Указанная плоскость пересекает лепесток $K_1U_1M_1V_1$ по паре отрезков U_1I , V_1I , где I – некоторая точка на диагональном ребре K_1M_1 . Отразим части U_1IK_1 и V_1IK_1 лепестка Ξ_1 симметрично относительно плоскости Π_N . При такой симметрии происходит переламывание граней лепестка Ξ_1 вдоль отрезков U_1I , V_1I , и граничные ребра U_1K_1 , V_1K_1 лепестка Ξ_1 переходят в граничные ребра U_2K_2 , V_2K_2 лепестка Ξ_2 (см. рис. 5, б, в).

Тогда получим линейное изгибание лепестка Ξ_1 с переламыванием граней вдоль отрезков U_1J , V_1J , U_1I , V_1I , в результате чего возникает *переломанный лепесток* $\hat{\Xi}_1$, составленный из граней U_2IJ , V_2IJ , U_2IK_2 , V_2IK_2 , U_2JM_2 , V_2JM_2 . При этом все граничные вершины и ребра переломанного лепестка $\hat{\Xi}_1$ совпадают с соответствующими граничными вершинами и ребрами лепестка Ξ_2 . Необходимым и достаточным условием существования такого линейного изгибания является условие (44).

Путем элементарных вычислений несложно получить выражение для расстояния s от точек излома I , J до соответствующих точек K_1 и M_1 :

$$s = (L_1 - L_2) \frac{(L_1 + L_2)(4 - T_2^2)}{2 \left(\sqrt{4 - L_1^2 - T_2^2} + \sqrt{4 - L_2^2 - T_2^2} \right) \left(L_2 \sqrt{4 - L_1^2 - T_2^2} + L_1 \sqrt{4 - L_2^2 - T_2^2} \right)}. \tag{45}$$

С одной стороны, значение s определяет внутреннее отклонение ребер излома лепестка Ξ_1 по отношению к его граничным ребрам. С другой стороны, посредством s можно оценить, насколько внешняя форма переломанного лепестка $\hat{\Xi}_1$ близка к внешней форме лепестка Ξ_2 , в частности насколько близко расположены внутренние вершины I и J переломанного лепестка $\hat{\Xi}_1$ к соответствующим вершинам K_2 и M_2 лепестка Ξ_2 .

Если считать, что Ξ_2 непрерывно меняется с течением времени t так, что $\Xi_2(0) = \Xi_1$, его граничные ребра остаются единичными, а величины $L_2(t)$ и $T_2(t)$ удовлетворяют условиям $L_2(t) \leq L_1$ и $T_2(t) \leq \sqrt{4 - L_1^2}$, то возникает непрерывное линейное изгибание лепестка Ξ_1 , представленное семейством переломанных лепестков $\hat{\Xi}_1(t)$. Непрерывность изменения

положения подвижных ребер излома на исходном лепестке Ξ_1 следует из того, что функция $s(t)$ непрерывна в силу (45), при этом $s(0) = 0$.

Рассмотрим теперь экстремальную бирозетку $\mathbf{P}_n = P(n, c_+)$ и его непрерывную деформацию в классе бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in \Sigma_n}$. При этом ограничимся рассмотрением бирозеток $P(n, p)$, достаточно близких к $P(n, c_+)$ в том смысле, что соответствующие им точки $p \in \Sigma_n$ принадлежат достаточно малой окрестности $\mathcal{J} \subset \Sigma_n$ точки c_+ такой, что выполняется условие $\sqrt{4 - L(c_+)} \geq T(p)$. При этом, по определению $P(n, c_+)$, выполнено $L(p) < L(c_+)$ для всех рассматриваемых точек $p \in \mathcal{J} \subset \Sigma_n$, отличных от c_+ .

Возьмем любую из рассматриваемых бирозеток $P(n, p)$. С помощью описанной выше конструкции заменим каждый из лепестков многогранника $P(n, p)$ переломанным лепестком бирозетки $P(n, c_+)$. В результате вместо $P(n, p)$ получим новый многогранник $\hat{P}(n, p)$. Указанный многогранник изометричен $P(n, c_+)$: он имеет ту же пару оснований и те же грани в форме равносторонних треугольников, что и $P(n, c_+)$, а также включает переломанные лепестки, получающиеся с помощью линейного изгиба лепестков многогранника $P(n, c_+)$.

Как следствие, непрерывная деформация экстремальной бирозетки $P(n, c_+)$ в классе бирозеток $\{P(n, p)\}_{p \in \mathcal{J}}$ приближается, по крайней мере на начальном этапе, непрерывным линейным изгибанием многогранника $P(n, c_+)$, представленным семейством многогранников $\{\hat{P}(n, p)\}_{p \in \mathcal{J}}$. При таком линейном изгибании переламыванию подвергаются только лепестки многогранника $P(n, c_+)$, а подвижные ребра излома расположены вблизи граничных ребер лепестков.

Непрерывное линейное изгибание экстремальной бирозетки $\mathbf{P}_n = P(n, c_+)$, представленное семейством многогранников $\{\hat{P}(n, p)\}_{p \in \mathcal{J}}$, имеет специальные аналитические свойства, а именно, как было установлено ранее, окрестность $\mathcal{J} \subset \Sigma_n$ точки c_+ можно параметризовать параметром T . Тогда T можно использовать в качестве параметра рассматриваемого непрерывного линейного изгиба экстремальной бирозетки \mathbf{P}_n : с геометрической точки зрения, T представляет собой расстояние между недиагональными вершинами переломанных лепестков изгибаемого многогранника. Величина s , описывающая положение подвижных ребер излома на \mathbf{P}_n , представляет собой функцию от T :

$$s = \frac{(L_0 - L(T))(L_0 + L(T))(4 - T^2)}{2 \left(\sqrt{4 - L_0^2 - T^2} + \sqrt{4 - L^2(T) - T^2} \right) \left(L(T) \sqrt{4 - L_0^2 - T^2} + L_0 \sqrt{4 - L^2(T) - T^2} \right)}. \quad (46)$$

Дифференцируя (46) по T и подставляя T_0 , с учетом $\frac{dL}{dT}(T_0) = 0$ получаем $\frac{ds}{dT}(T_0) = 0$, а значит,

$$s(T) = \frac{1}{2} s_0'' \cdot (T - T_0)^2 + \bar{o}((T - T_0)^2). \quad (47)$$

Таким образом, при рассматриваемом линейном изгибании экстремальной бирозетки \mathbf{P}_n внутренне-геометрический параметр s в начальный момент изменяется квадратично по сравнению с изменением внешне-геометрического параметра T .

Если бы мы рассматривали аналогичную конструкцию не для \mathbf{P}_n , а для какой-либо иной бирозетки, то при ее линейном изгибании внутренне-геометрический параметр s изменялся бы в начальный момент линейно по сравнению с изменением внешне-геометрического параметра T . Таким образом, описанная квадратичная зависимость между изменениями s и T характеризует именно экстремальную бирозетку \mathbf{P}_n .

6. Характерные размеры экстремальной бирозетки. Приведем приближенные численные значения характерных геометрических величин — линейных и угловых — для экстремальной бирозетки \mathbf{P}_n при различных малых значениях n . В таблице приведены упомянутые ранее параметры h и H , R , r и α , L и T , β , а в последнем столбце — значения двугранного угла θ многогранника \mathbf{P}_n при его ребре, принадлежащем основанию.

n	H_0	h_0	R	r_0	α_0	L_0	T_0	β_0	θ_0
3	0,707...	0,235...	0,577...	0,882...	10,893...	1,632...	0,816...	90	90
4	0,617...	0,285...	0,707...	1,072...	14,903...	1,689...	0,669...	77,507...	92,401...
5	0,556...	0,323...	0,850...	1,234...	15,680...	1,713...	0,576...	68,039...	95,019...
6	0,518...	0,351...	1	1,373...	15,837...	1,723...	0,500...	59,096...	95,952...
7	0,494...	0,371...	1,152...	1,502...	15,612...	1,727...	0,437...	51,438...	95,941...
8	0,478...	0,385...	1,306...	1,631...	15,116...	1,729...	0,386...	45,246...	95,606...
9	0,468...	0,395...	1,461...	1,761...	14,475...	1,730...	0,345...	40,280...	95,199...

Значения углов α , β , θ указаны в градусном измерении. При этом β понимается как внешний двугранный угол, а θ — как внутренний двугранный угол многогранника \mathbf{P}_n .

Знание приближенного значения $L = L_0$ при каждом n позволяет строить конкретную развертку экстремальной бирозетки \mathbf{P}_n , знание двугранных углов позволяет явным образом по заданной развертке построить конкретную физическую модель для \mathbf{P}_n .

Отметим, что при $n = 3$ экстремальной бирозеткой \mathbf{P}_n является в точности шеддок Дуади, все двугранные углы которого равны $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$.

Численный анализ показывает, что при $n \rightarrow \infty$ указанные в таблице величины ведут себя следующим образом:

горизонтальные размеры R и r увеличиваются, стремясь к бесконечности, при этом r/R стремится к 1;

вертикальные размеры h и H уменьшаются, стремясь к $\frac{\sqrt{3}}{4}$;

значение L увеличивается, стремясь к $\approx 1,732 \dots$;

значение T уменьшается, стремясь к 0;

двугранный угол β уменьшается, стремясь к 0;

двугранный угол θ стремится к $\frac{\pi}{2}$.

В завершение отметим, что при всех $n \geq 3$ значение двугранного угла θ экстремальной бирозетки \mathbf{P}_n незначительно превышает $\frac{\pi}{2}$. Этот факт полезно учитывать при изготовлении физических моделей многогранника \mathbf{P}_n .

Литература

1. Берже М. Геометрия. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 560 с.
2. Александров А. Д. Выпуклые многогранники. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 428 с.
3. Милка А. Д. Линейные изгибания правильных выпуклых многогранников // *Мат. физика, анализ, геометрия*. – 1994. – **1**. – С. 116–130.
4. Милка А. Д. Линейные изгибания правильных выпуклых многогранников // *Intern. Congr. Math. (Berlin, August 18–27, 1998): Abstrs Short Communs and Poster Sess.* – Berlin, 1998.
5. Милка А. Д. Нежесткие звездчатые бипирамиды А. Д. Александрова и С. М. Владимировой // *Труды по анализу и геометрии*. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. – С. 414–430.
6. Милка А. Д. Изгибания поверхностей, бифуркации динамических систем и устойчивость оболочек // *Чебышев. сб.* – 2006. – **7**. – С. 109–144.
7. Милка А. Д. Линейные изгибания звездчатых бипирамид // *Proc. Intern. Geom. Center.* – 2008. – **1**, № 1-2. – P. 71–96.
8. Douady A. Le shaddock à six becs // *Bull. A. P. M. E. P.* – 1971. – **281**. – P. 699.
9. Connelly R. A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra // *Publ. Math. I'NHES.* – 1977. – **47**. – P. 333–338.
10. Cromwell P. *Polyhedra.* – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
11. Fuchs D., Tabachnikov S. *Mathematical omnibus: thirty lectures on classic mathematics.* – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007.
12. Gorkavyy V., Kalinin D. On model flexibility of the Jessen orthogonal icosahedron // *Contrib. Algebra and Geom.* – 2016. – **57**, № 3. – P. 607–622.
13. Milka A. D. Linear bending of star-like pyramids // *C. R. Mec.* – 2003. – **331**, № 12. – P. 805–810.
14. Pogorelov A. V. *Bendings of surfaces and stability of shells* // *Transl. Math. Monogr.* – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1988. – **72**. – 77 p.

Получено 13.11.17