УДК 517.5

Е. А. Севостьянов, С. А. Скворцов (Житомир. гос. ун-т им. И. Франко)

О СХОДИМОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С ПРЯМЫМИ И ОБРАТНЫМИ МОДУЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

For mappings in metric spaces satisfying one inequality with respect to the modulus of families of curves, we establish the property of lightness of the limit mapping. It is shown that the uniform limit of these mappings is a light mapping, whenever the function responsible for the distortion of the families of curves, is of finite mean oscillation at every point. In addition, for one class of homeomorphisms of metric spaces, we prove theorems on the equicontinuity of the families of inverse mappings.

Для відображень метричних просторів, що задовольняють одну оцінку модуля сімей кривих, отримано результат про нульвимірність граничного відображення. Доведено, що рівномірною границею послідовності вказаних відображень є нульвимірне відображення, як тільки мажоранта, що відповідає за спотворення сімей кривих, має скінченне середнє коливання в кожній точці. Крім того, для одного класу гомеоморфізмів метричних просторів отримано теореми про одностайну неперервність сімей обернених відображень.

1. Введение. Настоящая работа посвящена изучению емкостно-модульной техники и квазиконформных отображений в метрических пространствах. Как известно, указанные вопросы активно исследуются последнее время (см., например, [1 – 6]). Основная цель статьи — изучить сходимость отображений в метрических пространствах, в которых принципиально возможно применение аппарата модулей семейств кривых. В статье поочередно рассматриваются отображения с прямыми и обратными модульными условиями. В пункте 2 рассмотрены обратные модульные неравенства, которым удовлетворяют прямые отображения, в пункте 3, наоборот, модульные условия — прямые, а рассматриваемые отображения — обратные. Круг изучаемых вопросов включает в себя также глобальное поведение отображений (сходимость отображений в замыкании заданной области). Основные определения и обозначения, используемые в статье, можно найти в монографиях [7, 8].

Как известно, частью определения квазиконформных отображений является неравенство

$$M(\Gamma) \le KM(f(\Gamma)), \qquad (1)$$

где M — модуль семейств кривых Γ, а K — коэффициент квазиконформности (см. [9]). Неравенство (1) также выполнено для квазиконформных отображений с ветвлением, которые принято называть квазирегулярными отображениями (см. [7]). В последнем случае в (1) следует взять $K := N(f,A)K_O(f)$, где $K_O = \operatorname{vrai\,sup} K_O(x,f)$, $K_O(x,f)$ — внешняя дилатация, а $N(f,A)$ — максимальная кратность отображения f на множестве A, которому принадлежат образы кривых семейства Γ (см. [10], теорема 3.2, либо [7], теорема 6.7, гл. II). По поводу отображений с ограниченным искажением евклидового пространства также установлено, что они открыты и дискретны и, в частности, являются нульмерными отображениями (см. [7], теорема I.4.1). (Отображение $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ называется *нульмерным*, если $\dim\{f^{-1}(y)\} = 0$ для каждого $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$, где $\dim$ обозначает топологическую размерность множества [11].)

Рассмотрим следующий вопрос: будет ли произвольное отображение, удовлетворяющее оценке (1), открытым и дискретным (нульмерным)? Положительный ответ для пространства

$\mathbb{R}^n$ дан в работе [12], где рассматривается даже более общее условие вида

$$M(\Gamma) \leq \int\limits_{D'} Q(y)\rho_*^n(y)\, d\mu'(y). \qquad (2)$$

Здесь Q — заданная измеримая по Лебегу функция, удовлетворяющая условию типа FMO [8], ρ_* — произвольная неотрицательная борелевская функция такая, что $\int_{\gamma_*} \rho_*(y)ds \geq 1$ $\forall\, \gamma_* \in f(\Gamma)$, область $D' = f(D)$, а M — конформный модуль семейства кривых. Более того, достаточно, чтобы f было пределом последовательности отображений, удовлетворяющих условию (2) (см. [13], теорема), а вместо показателя n в правой части (2) можно брать произвольное число $p \in (n-1, n]$.

В настоящей статье мы хотим распространить указанный результат на метрические пространства и, тем самым, подытожить наши исследования в этом направлении. Ниже мы покажем, что аналогичное утверждение имеет место в пространствах, регулярных по Альфорсу, в которых выполнено так называемое $(1,p)$-неравенство Пуанкаре, где $p \in (\alpha-1, \alpha]$ и α — хаусдорфова размерность рассматриваемого метрического пространства. Вместо неравенства (2) можно использовать несколько более общее соотношение, которое приведено ниже.

Всюду далее $(X,\, d, \mu)$ и $(X',\, d', \mu')$ — произвольные метрические пространства с метриками d и d', наделенные локально конечными борелевскими мерами μ и μ', и конечными хаусдорфовыми размерностями $\alpha \geq 2$ и $\alpha' \geq 2$ соответственно. Далее мы считаем известными определения, связанные с кривыми в метрическом пространстве, длинами дуг, интегралами, условиями допустимости и т. д. (см. [8], раздел 13). Определения, связанные с регулярностью по Альфорсу, и $(1;p)$-неравенство Пуанкаре можно найти, например, в [4] (раздел 7.22).

Пусть G — область в метрическом пространстве (X, d, μ). Следуя [8] (раздел 13.4), будем говорить, что локально интегрируемая в X функция $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in \overline{G}$ $\big($пишем $\varphi \in FMO(x_0)\big)$, если $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\ \dfrac{1}{\mu(G(x_0,\varepsilon))} \displaystyle\int_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\, d\mu(x) < < \infty$, где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \dfrac{1}{\mu(G(x_0,\varepsilon))} \displaystyle\int_{G(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, d\mu(x)$ — среднее интегральное значение функции $\varphi(x)$ над множеством $G(x_0,\varepsilon) = B(x_0,\varepsilon) \cap G = \{x \in X : d(x,x_0) < \varepsilon\} \cap G$ по отношению к мере μ. Пусть $p \geq 1$, тогда *p-модулем* семейства кривых Γ в метрическом пространстве X называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_X \rho^p(x)\, d\mu(x).$$

Областью D *в метрическом пространстве* X называется множество D, являющееся линейно связным в X. Пусть $E,\ F \subset X$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E,F,D)$ семейство всех кривых $\gamma\colon [a,b] \to X$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a,b)$. Пусть D — область в X. Для $y_0 \in f(D)$ и чисел $0 < r_1 < r_2 < \infty$ обозначим

$$A(y_0, r_1, r_2) = \big\{y \in X' : r_1 < d(y,y_0) < r_2\big\}, \quad S(y_0, r) = \{y \in X' : d(y,y_0) = r\}. \qquad (3)$$

Пусть G' — область в X' и $Q\colon G'\to[0,\infty]$ — измеримая относительно меры μ' функция. Если $f\colon G\to G'$ — заданное отображение, то для фиксированного $y_0\in f(G)$ и произвольных $0<r_1<r_2<\infty$ обозначим через $\Gamma(y_0,r_1,r_2)$ семейство всех кривых γ в области G таких, что $f(\gamma)\in\Gamma(S(y_0,r_1),S(y_0,r_2),A(y_0,r_1,r_2))$. Для заданных $p,q>1$ вместо (1) рассмотрим неравенство

$$M_p(\Gamma(y_0,r_1,r_2))\leq\int\limits_{G'}Q(y)\eta^q(d'(y,y_0))d\mu'(y), \tag{4}$$

выполненное для любой неотрицательной измеримой по Лебегу функции $\eta\colon(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)dr\geq 1. \tag{5}$$

Пусть (X,d) и (X',d') — метрические пространства с расстояниями d и d' соответственно. Говорят, что последовательность отображений $f_k\colon X\to X'$, $k=1,2,\ldots$, сходится *локально равномерно* к отображению $f\colon X\to X'$, если $\sup_{x\in C}d'(f_k(x),f(x))\to 0$ при $k\to\infty$ на любом компакте $C\subset X$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $(X,\,d,\mu)$ и $(X',\,d',\mu')$ — метрические пространства с метриками d и d', наделенные локально конечными борелевскими мерами μ и μ', а G и G' — области в X и X', имеющие конечные хаусдорфовы размерности $\alpha\geq 2$ и $\alpha'\geq 2$ соответственно. Предположим, кроме того, что G — локально компактное и локально связное пространство, α-регулярное по Альфорсу, в котором выполнено $(1;p)$-неравенство Пуанкаре при некотором $p\in(\alpha-1,\alpha]$.*

Пусть $f_m\colon G\to G'$, $m=1,2,\ldots$, — последовательность непрерывных отображений, сходящаяся локально равномерно к некоторому отображению $f\colon G\to G'$. Тогда если f_m при каждом $m\in\mathbb{N}$ удовлетворяет (4) *в каждой точке $y_0\in f(G)$ при некотором $q\in(1,\alpha']$ и любой неотрицательной измеримой по Лебегу функции $\eta\colon(r_1,r_2)\to[0,\infty]$, удовлетворяющей условию* (5), *и $Q\in FMO$ в каждой точке $y_0\in f(G)$, то отображение f либо нульмерно, либо постоянно в G.*

2. Формулировка и доказательство основной леммы. Доказательство теоремы 1. Связный компакт $C\subset X$ будем называть *континуумом*. Следующая лемма включает в себя основной результат настоящей работы в наиболее общем случае.

Лемма 1. *Предположим, что $(X,\,d,\mu)$ и $(X',\,d',\mu')$ — метрические пространства с метриками d и d', наделенные локально конечными борелевскими мерами μ и μ', а G и G' — области в X и X', имеющие конечные хаусдорфовы размерности $\alpha\geq 2$ и $\alpha'\geq 2$ соответственно. Кроме того, предположим, что G — локально компактное и локально связное пространство, α-регулярное по Альфорсу, в котором выполнено $(1;p)$-неравенство Пуанкаре при некотором $p\in(\alpha-1,\alpha]$.*

Далее, предположим, что при некотором $q\in(1,\alpha']$ и каждом $y_0\in f(G)$ найдется $\varepsilon_0>0$, для которого выполнено соотношение

$$\int\limits_{A(y_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(y)\psi^q(d'(y,y_0))d\mu'(y) \;=\; o\left(I^q(\varepsilon,\varepsilon_0)\right) \tag{6}$$

для некоторой измеримой по Лебегу функции $\psi(t)\colon (0,\infty)\to(0,\infty)$ *такой, что*

$$0 < I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt < \infty$$

при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, *где* $A(y_0,\varepsilon,\varepsilon_0)$ *определено в* (3) *при* $r_1=\varepsilon,\ r_2=\varepsilon_0$. *Потребуем также, чтобы* $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\to\infty$ *при* $\varepsilon\to 0$.

Пусть $f_m\colon G\to G'$, $m=1,2,\ldots,$ *— последовательность отображений, сходящаяся локально равномерно к некоторому отображению* $f\colon G\to G'$. *Тогда если* f_m *при каждом* $m\in\mathbb{N}$ *удовлетворяет* (4) *в каждой точке* $y_0\in f(G)$ *при некотором* $q\in(1,\alpha']$ *и любой неотрицательной измеримой по Лебегу функции* $\eta\colon(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ *с условием* (5), *то* f *либо нульмерно, либо постоянно.*

Доказательство. Если отображение f постоянно, доказывать нечего. Пусть $f\not\equiv \mathrm{const}$. Предположим противное, а именно, что отображение f не нульмерно. Тогда найдется такое $y_0\in G'$, что множество $\{f^{-1}(y_0)\}$ не является всюду разрывным. Следовательно, по определению, существует невырожденное связное множество $C\subset\{f^{-1}(y_0)\}$. Поскольку пространство X локально компактно, можно считать, что C — континуум.

Так как по предположению $f\not\equiv y_0$, вследствие непрерывности отображения f найдутся такие $x_0\in G$ и $\delta_0>0$, что $\overline{B(x_0,\delta_0)}\subset G$ и

$$f(x)\neq y_0 \qquad \forall\, x\in\overline{B(x_0,\delta_0)}.$$

Вследствие локальной компактности G можно считать, что $\overline{B(x_0,\delta_0)}$ — компакт в X. Кроме того, в силу локальной связности G найдется связная окрестность $U\subset B(x_0,\delta_0)$. По определению U содержит некоторый шар $B(x_0,\overline{\delta_0})\subset U$. Заметим, что вследствие регулярности по Альфорсу метрического пространства X шар $B(x_0,\overline{\delta_0})$ не может быть одноточечным множеством. Тогда $\overline{U}$ — невырожденный континуум в G.

Согласно предложению 4.7 [1] при $p\in(\alpha-1,\alpha]$ имеем

$$M_p\left(\Gamma\left(C,\overline{U},G\right)\right)>0. \tag{7}$$

При достаточно большом $m\in\mathbb{N}$ рассмотрим семейство кривых $f_m\left(\Gamma\left(C,\overline{U},G\right)\right)$. Заметим, что в силу локально равномерной сходимости f_m к f может быть построена подпоследовательность f_{m_k} такая, что $d'(f_{m_k}(x),y_0)<1/2^k$ при всех $k\in\mathbb{N}$ и всех $x\in C$. С другой стороны, $f(\overline{U})$ — компакт в X' как непрерывный образ компакта, поэтому $d'\left(y_0,f(\overline{U})\right)\geq\sigma_0>0$. Поскольку f_m сходится к f локально равномерно, то

$$d'(f_m(x),y_0)\geq d'(f(x),y_0)-d'(f_m(x),f(x))\geq\sigma_0/2$$

при всех $x\in\overline{U}$ и $m\geq m_0$. В таком случае каждая кривая $\gamma\in f_{m_k}\left(\Gamma\left(C,\overline{U},G\right)\right)$ имеет подкривую $\gamma'\in\Gamma(S(y_0,1/2^k),S(y_0,\sigma_0/2),A(y_0,1/2^k,\sigma_0/2))$ при достаточно больших $k\geq k_0$ (см. [8], предложение 13.3). Отсюда $\Gamma\left(C,\overline{U},G\right)>\Gamma_{f_{m_k}}(y_0,1/2^k,\sigma_0/2)$ и, значит, вследствие минорирования модуля (см. [14], теорема 1)

$$M_p\left(\Gamma\left(C,\overline{U},G\right)\right)\le M_p(\Gamma_{f_{m_k}}(y_0,1/2^k,\sigma_0/2)). \tag{8}$$

Рассмотрим функцию

$$\eta_k(t)=\begin{cases}\psi(t)/I(1/2^k,\sigma_0/2), & t\in[1/2^k,\sigma_0/2],\\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus[1/2^k,\sigma_0/2],\end{cases}$$

где $I(1/2^k,\sigma_0/2)=\displaystyle\int\limits_{1/2^k}^{\sigma_0/2}\psi(t)dt$. Заметим, что функция η_k удовлетворяет условию вида (5) при $r_1=1/2^k$ и $r_2=\sigma_0/2$. Тогда согласно неравенствам (4), (6) и (8) получаем, что

$$M_p\left(\Gamma\left(C,\overline{U},G\right)\right)\le\frac{1}{I^q(1/2^k,\sigma_0/2)}\int\limits_{A(y_0,1/2^k,\sigma_0/2)}Q(y)\psi^q(d'(y,y_0))\,d\mu'(y)\ \le$$

$$\le\frac{C}{I^q(1/2^k,\varepsilon_0)}\int\limits_{A(y_0,1/2^k,\sigma_0/2)}Q(y)\psi^q(d'(y,y_0))\,d\mu'(y)\to 0 \tag{9}$$

при $k\to\infty$. Однако соотношение (9) противоречит неравенству (7). Полученное противоречие доказывает, что отображение f является нульмерным, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1 следует из леммы 1 и леммы 13.2 [8].

3. О сходимости обратных отображений в метрических пространствах. Теперь рассмотрим вопрос о сходимости отображений, удовлетворяющих „обратному" к (4) неравенству. Такие результаты в пространстве $\mathbb{R}^n$ были получены в работе [15] (теорема 6.1), однако имеющееся в ней условие фиксации двух точек области нас не вполне устраивает (например, среди дробно-линейных автоморфизмов единичного круга на себя не более одного такого отображения). Поэтому мы упомянутое условие нормировки заменим условием $\operatorname{diam} f(A)\ge\delta>0$, которое будем требовать для всех отображений f из рассматриваемого класса и фиксированного континуума A. Предположим, что $f\colon D\to D'$ — фиксированное отображение, α и α' — хаусдорфовы размерности областей $D\subset X$ и $D'\subset X'$ соответственно и вместо требования (4) выполнено более сильное условие

$$M_{\alpha'}(f(\Gamma))\le\int\limits_D Q(x)\rho^{\alpha}(x)\,d\mu(x), \tag{10}$$

где $Q\colon D\to[1,\infty]$ — фиксированная измеримая функция, а $\rho\colon D\to[0,\infty]$ пробегает класс борелевских функций, подчиненных неравенству $\displaystyle\int\limits_{\gamma}\rho(x)|dx|\ge 1$. Будем говорить, что f — *Q-гомеоморфизм* в D, если f удовлетворяет условию (10) для каждого семейства кривых Γ в D и произвольной $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$.

В работах [6, 16] был решен вопрос о возможности непрерывного продолжения отображений данного вида в метрических пространствах (см. [6], лемма 6.1 и теорема 6.1, и [16], лемма 5 и теорема 3). Кроме того, в работе первого автора получено свойство равностепенной непрерывности указанных отображений в замыкании области в $\mathbb{R}^n$ (см. [15], теорема 6.1). Целью настоящего пункта является описание сходимости отображений с условием (10) в метрических пространствах.

Напомним некоторые определения. Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с мерой μ. Определим *функцию Левнера* $\phi_\alpha\colon (0,\infty)\to[0,\infty)$ *на* X по правилу

$$\phi_\alpha(t)=\inf\{M_\alpha(\Gamma(E,F,X))\colon \Delta(E,F)\le t\}, \tag{11}$$

где инфимум берется по всем произвольным невырожденным непересекающимся континуумам E, F в X, относительно которых величина $\Delta(E,F)$ определяется так:

$$\Delta(E,F):=\frac{\operatorname{dist}(E,F)}{\min\{\operatorname{diam}E,\operatorname{diam}F\}}. \tag{12}$$

Пространство X называется *пространством Левнера,* если функция $\phi_n(t)$ положительна при всех положительных значениях t (см. [8], раздел 2.5, либо [4], гл. 8). Область D в X будем называть *областью квазиэкстремальной длины относительно* p*-модуля* (сокр. QED*-областью*), если $M_\alpha(\Gamma(E,F,X))\le AM_\alpha(\Gamma(E,F,D))$ для конечного числа $A\ge 1$ и всех континуумов E и F в D. Область D будем называть *локально линейно связной в точке* $x_0\in\overline{D}$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V\subset U$ такая, что множество $V\cap D$ линейно связно. В частности, будем говорить, что D локально линейно связна на границе ∂D, если D локально линейно связна в каждой точке $x_0\in\partial D$. Докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Предположим, что* $D\subset X$ *и* $D'\subset X'$ *— области с конечными хаусдорфовыми размерностями* $\alpha\ge 2$ *и* $\alpha'\ge 2$ *соответственно,* X' *—* α'*-регулярное по Альфорсу пространство Левнера. Пусть также* D' *является* QED*-областью. Тогда*:

1) *в* D' *имеет место свойство сближающихся континуумов*: *если* E_k, F_k *— произвольные континуумы в* D' *такие, что* $\min\{\operatorname{diam}E_k,\operatorname{diam}F_k\}\ge\delta$, *где* $\delta>0$ *— фиксированное число, и* $\operatorname{dist}(E_k,F_k)\to 0$ *при* $k\to\infty$, *то* $M_{\alpha'}(\Gamma(E_k,F_k,D'))\to\infty$ *при* $k\to\infty$;

2) *граница области* D' *является слабо плоской, т. е. какова бы ни была точка* $x_0\in\partial D'$, *для каждого* $P>0$ *и для любой окрестности* U *точки* x_0 *найдется окрестность* $V\subset U$ *этой же точки такая, что* $M_{\alpha'}(\Gamma(E,F,D'))>P$ *для произвольных континуумов* $E,F\subset D'$, *пересекающих* ∂U *и* ∂V.

Предположим, кроме того, что область D *локально линейно связна на* $\overline{D}$. *Тогда*:

3) *если* U *— окрестность континуума* $E_0\subset\overline{D}$, *то найдется окрестность* $V\subset U$ *континуума* E_0 *такая, что* $V\cap D$ *— линейно связное множество.*

Пусть, кроме того, $\overline{D}$ *и* $\overline{D'}$ *— компакты в* X *и* X' *соответственно и* $Q\in L^1(D)$. *Тогда*:

4) *если* $f\colon D\to D'$ *—* Q*-гомеоморфизм области* D *на область* D', *то* $g=f^{-1}$ *продолжается до непрерывного отображения* $\overline{g}\colon\overline{D}\to\overline{D'}$, *при этом* $\overline{g}(\overline{D'})=\overline{D}$;

5) *если никакая связная компонента границы* $\partial D'$ *не вырождается в точку и* $f_m\colon D\to D'$ *— последовательность* Q*-гомеоморфизмов области* D *на область* D', *удовлетворяющих для некоторого* (*фиксированного*) *континуума* $A\subset D$ *условию* $\operatorname{diam}f_m(A)\ge\delta>0$ *при всех* $m=1,2,\ldots$, *то найдется* $\delta_1>0$ *такое, что* $\operatorname{dist}(f_m(A),\partial D')>\delta_1>0$ *для всех* $m\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Установим вначале свойство 1. Поскольку X' по предположению является пространством Левнера и, кроме того, является α'-регулярным по Альфорсу, то $\phi_{\alpha'}(t)\to\infty$ при $t\to 0$ (см. [4], теорема 8.23). Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и для него найдем такое $t_0=t_0(\varepsilon)$, что при $t\in(0,t_0)$ выполнено $\phi_{\alpha'}(t)>\varepsilon$. Положим $\Delta(E_k,F_k)=t$, где $\Delta(E_k,F_k)$ определено в (12). Тогда в силу (11)

$$\varepsilon<M_{\alpha'}(\Gamma(E_k,F_k,X')), \tag{13}$$

как только $t \in (0, t_0)$ и $\Delta(E_k, F_k) = t$. Заметим, что $\Delta(E_k, F_k) \leq \frac{1}{\delta}\operatorname{dist}(E_k, F_k)$, и если $\operatorname{dist}(E_k, F_k) \in (0, t_0\delta)$, то $\Delta(E_k, F_k) = t \in (0, t_0)$, а значит, имеет место соотношение (13). Окончательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ нашлось такое $t_0' = t_0\delta$, что как только $\operatorname{dist}(E_k, F_k) \in (0, t')$, выполняется условие (13). Из того, что D' является QED-областью (либо, соответственно, QED-областью относительно $\overline{D'}$), вытекает, что

$$\varepsilon/L < M_{\alpha'}(\Gamma(E_k, F_k, D')),$$

где L — некоторая фиксированная постоянная, откуда и следует, что $M_{\alpha'}(\Gamma(E_k, F_k, D')) \to \infty$ при $\operatorname{dist}(E_k, F_k) \to 0,\ k \to \infty$.

Теперь докажем свойство 2. Для этого воспользуемся свойством 1. Пусть теперь $x_0 \in \partial D'$ — произвольная точка. Возьмем произвольную окрестность U точки x_0 и произвольное $P > 0$. Для числа $k \in \mathbb{N}$ найдем окрестность V_k точки x_0, лежащую в шаре $\overline{B(x_0, 2^{-k})}$. Рассмотрим континуумы E и F, пересекающие ∂U и ∂V_k. Заметим, что $\min\{\operatorname{diam} \mathrm{E}, \operatorname{diam} F\} \geq \delta > 0$ при достаточно больших k, поскольку U — фиксированная окрестность, $\operatorname{dist}(\partial V_k, x_0) \to 0$ при $k \to \infty$, а $\operatorname{diam} \mathrm{E}$ и $\operatorname{diam} F$ не меньше расстояния между ∂U и ∂V_k. Кроме того, $\operatorname{dist}(E, F) \leq \leq \operatorname{diam} \partial V_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда в силу свойства 1 $M_{\alpha'}(\Gamma(E, F, D')) = \alpha_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Подберем k_0 так, чтобы $\alpha_k > P$ при $k \geq k_0$ (это число k_0 полностью определяется числом P). Положим $V := V_{k_0}$. Тогда получим, что $M_{\alpha'}(\Gamma(E, F, D')) > P$ для произвольных континуумов $E, F \subset D'$, пересекающих ∂U и ∂V, что и требовалось установить.

Доказательство свойства 3 дословно повторяет доказательство леммы 2.2 в [17], и поэтому мы его не приводим. Свойство 4, за исключением равенства $\overline{g}(\overline{D'}) = \overline{D}$, $g := f^{-1} = \overline{g}|_{D'}$, следует из пункта 2 и теоремы 3 в [16]. Равенство $\overline{g}(\overline{D'}) = \overline{D}$ может быть установлено аналогично заключительной части теоремы 6.1 в [2].

Установим, наконец, свойство 5). Предположим противное, т. е. что для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует $m = m_k \colon \operatorname{dist}(f_{m_k}(A), \partial D') < 1/k$. Без ограничения общности можем считать последовательность m_k монотонно возрастающей. По условию $\overline{D'}$ — компакт, поэтому и $\partial D'$ также компакт как замкнутое подмножество компакта $\overline{D'}$. Кроме того, $f_{m_k}(A)$ — компакт как непрерывный образ компакта A при отображении f_{m_k}. Тогда найдутся такие $x_k \in f_{m_k}(A)$ и $y_k \in \partial D'$, что $\operatorname{dist}(f_{m_k}(A), \partial D') = d'(x_k, y_k) < 1/k$ (см. рис. 1). Поскольку $\partial D'$ — компакт, можно считать, что $y_k \to y_0 \in \partial D'$, $k \to \infty$. Пусть K_0 — связная компонента $\partial D'$, содержащая точку y_0. По условию K_0 — невырожденный континуум в $\partial D'$, так что $\operatorname{diam} K_0 > a_0 > 0$.

Согласно пункту 4, при каждом $k \in \mathbb{N}$ отображение $g_{m_k} := f_{m_k}^{-1}$ продолжается до непрерывного отображения $\overline{g}_{m_k} \colon \overline{D'} \to \overline{D}$, более того, $\overline{g}_{m_k}$ равномерно непрерывно на $\overline{D'}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_k = \delta_k(\varepsilon) < 1/k$, что

$$d(\overline{g}_{m_k}(x), \overline{g}_{m_k}(x_0)) < \varepsilon \quad \forall\, x, x_0 \in \overline{D'}, \quad d'(x, x_0) < \delta_k, \quad \delta_k < 1/k. \tag{14}$$

Пусть далее $\varepsilon > 0$ — произвольное число с условием

$$\varepsilon < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\partial D, A), \tag{15}$$

где A — континуум из условия леммы. При каждом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество $B_k := \bigcup_{x_0 \in K_0} B(x_0, \delta_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что B_k — открытое множество, содержащее K_0. Другими словами, B_k — некоторая окрестность континуума K_0. В силу пункта 3 существует такая окрестность $U_k \subset B_k$ континуума K_0, что $U_k \cap D'$ линейно связно. Пусть $\operatorname{diam} K_0 = m_0$,

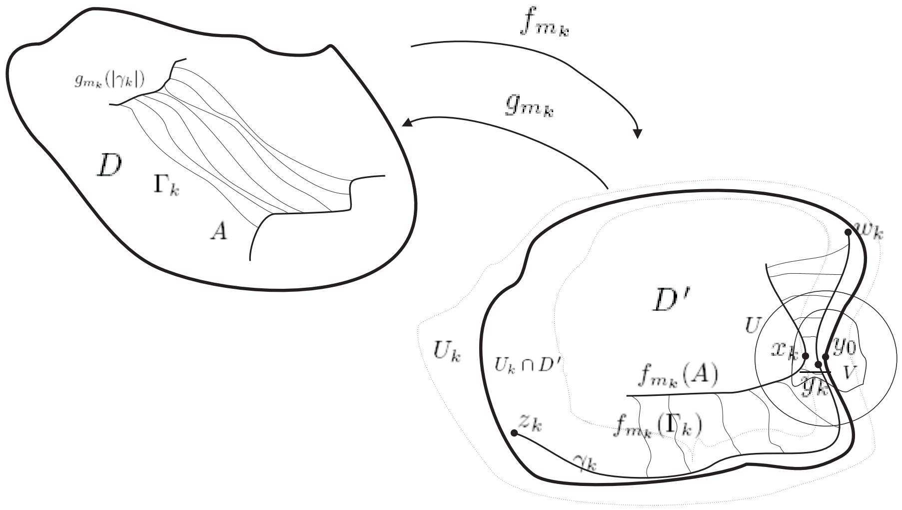

Рис. 1

тогда найдутся такие $z_0, w_0 \in K_0$, что $\operatorname{diam} K_0 = d'(z_0, w_0) = m_0$. Следовательно, можно выбрать последовательности $\overline{y_k} \in U_k \cap D'$, $z_k \in U_k \cap D'$ и $w_k \in U_k \cap D'$ так, что $z_k \to z_0$, $\overline{y_k} \to y_0$ и $w_k \to w_0$ при $k \to \infty$. Можно считать, что

$$d(z_k, w_k) > m_0/2 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Соединим последовательно точки z_k, $\overline{y_k}$ и w_k кривой γ_k в $U_k \cap D'$ (это возможно, поскольку $U_k \cap D'$ линейно связно). Пусть $|\gamma_k|$ — как обычно, носитель (образ) кривой γ_k в D'. Тогда $g_{m_k}(|\gamma_k|)$ — компакт в D. Пусть $x \in |\gamma_k|$, тогда найдется такое $x_0 \in K_0$, что $x \in B(x_0, \delta_k)$. Зафиксируем $\omega \in A \subset D$. Поскольку $x \in |\gamma_k|$, то x — внутренняя точка области D', так что мы можем писать $g_{m_k}(x)$ вместо $\overline{g}_{m_k}(x)$ для указанных x. Из (14) и (15), в силу неравенства треугольника для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$, получаем

$$d(g_{m_k}(x), \omega) \geq d(\omega, \overline{g}_{m_k}(x_0)) - d(\overline{g}_{m_k}(x_0), g_{m_k}(x)) \geq$$

$$\geq \operatorname{dist}(\partial D, A) - \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\partial D, A) = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\partial D, A) > \varepsilon. \tag{17}$$

Переходя в (17) к инфимуму по всем $x \in |\gamma_k|$ и $\omega \in A$, имеем

$$\operatorname{dist}(g_{m_k}(|\gamma_k|), A) > \varepsilon \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots. \tag{18}$$

В силу (18) длина произвольной кривой, соединяющей компакты $g_{m_k}(|\gamma_k|)$ и A в D, не меньше ε. Положим $\Gamma_k := \Gamma(g_{m_k}(|\gamma_k|), A, D)$, тогда функция $\rho(x) = 1/\varepsilon$ при $x \in D$ и $\rho(x) = 0$ при $x \notin D$ допустима для Γ_k. По определению отображений f_{m_k} в (10) выполняется

$$M_{\alpha'}(f_{m_k}(\Gamma_k)) \leq \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \int\limits_D Q(x)\, d\mu(x) = c = c(\varepsilon, Q) < \infty, \tag{19}$$

поскольку по условию $Q \in L^1(D)$.

Однако соотношение (19) противоречит пункту 1. Действительно, $\Gamma(f_{m_k}(A), |\gamma_k|, D') = = f_{m_k}(\Gamma(A, g_{m_k}(|\gamma_k|), D)) = f_{m_k}(\Gamma_k)$, $\mathrm{diam}\, f_{m_k}(A) \geq \delta$ по условию, $\mathrm{diam}\,|\gamma_k| \geq d(z_k, w_k) > > m_0/2$ в силу (16), кроме того, $\mathrm{dist}\,(f_{m_k}(A), |\gamma_k|) \leq d'(x_k, \overline{y_k}) \to 0$ при $k \to \infty$, поскольку каждая из последовательностей x_k и $\overline{y_k}$ сходится при $k \to \infty$ к точке y_0. Тогда в силу пункта 1 $M_{\alpha'}(\Gamma(f_{m_k}(A), |\gamma_k|, D')) = M_{\alpha'}(f_{m_k}(\Gamma_k)) \to \infty$ при $k \to \infty$, что противоречит (19). Полученное противоречие опровергает предположение о неравенстве $\mathrm{dist}\,(f_{m_k}(A), \partial D') < 1/k$.

Лемма 2 доказана.

Будем рассматривать в дальнейшем области $D \subset X$, удовлетворяющие условию **A**: *любые две пары точек $a \in D$, $b \in \overline{D}$ и $c \in D$, $d \in \overline{D}$ можно соединить непересекающимися между собой кривыми C_1 и C_2 в области D.* В настоящей работе мы покажем, что области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с локально связной границей всегда удовлетворяют условию **A** (см. предложение 1).

Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon X \to X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех x таких, что $d(x, x_0) < \delta$, и для всех $f \in \mathfrak{F}$. Семейство $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$. Для областей $D \subset X$, $D' \subset X'$ и произвольной измеримой по Лебегу функции $Q\colon X \to [1, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, обозначим через $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ семейство всех гомеоморфизмов $g\colon D' \to D$ области D' на область D таких, что $f = g^{-1}$, $f\colon D \to D'$ — Q-гомеоморфизм в D. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что $D \subset X$ и $D' \subset X'$ — области с конечными хаусдорфовыми размерностями $\alpha \geq 2$ и $\alpha' \geq 2$ соответственно. Пусть также*:

1) *пространство X' является α'-регулярным по Альфорсу пространством Левнера*,

2) *область D локально линейно связна на $\overline{D}$, $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ — компакты в X и X' соответственно, кроме того, ∂D содержит не менее двух точек*,

3) *область D' является QED-областью*,

4) *выполнено условие* **A**,

5) $Q \in L^1(D)$.

Тогда семейство $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ является равностепенно непрерывным в D'.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что семейство $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ не является равностепенно непрерывным в некоторой точке $y_0 \in D'$. Другими словами, найдутся такие $y_0 \in D'$ и $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют элемент $y_m \in D'$ с условием $d'(y_m, y_0) < 1/m$ и гомеоморфизм $g_m \in \mathfrak{R}_Q(D, D')$ такие, что

$$d(g_m(y_m), g_m(y_0)) \geq \varepsilon_0. \tag{20}$$

Поскольку по условию $\overline{D}$ является компактом, можем считать, что последовательности $g_m(y_m)$ и $g_m(y_0)$ сходятся при $m \to \infty$ к точкам $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2} \in \overline{D}$. В силу неравенства (20) по непрерывности метрики $d(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \geq \varepsilon_0$. Соединим точку $\overline{x_1}$ с точкой $x_1 \in \partial D$, а точку $\overline{x_2}$ с точкой $x_2 \in \partial D$, $x_1 \neq x_2$, непересекающимися кривыми γ_1 и γ_2 соответственно, так что $\gamma_i(t) \in D$ при $0 < t < 1$, $\gamma_1(0) = \overline{x_1}$, $\gamma_1(1) = x_1$, $\gamma_2(0) = \overline{x_2}$, $\gamma_2(1) = x_2$ (это возможно по условию теоремы, см. рис. 2). В случае, когда одна из точек $\overline{x_1}$ или $\overline{x_2}$ граничная, отрезки γ_1 и γ_2 вырождаются в точку по определению.

Пусть U_1 и U_2 — непересекающиеся окрестности точек $\overline{x_i}$, $i = 1, 2$, такие, что $W_i := U_i \cap D$ — связное множество. Пусть также P_i — непересекающиеся окрестности точек x_i, $i = 1, 2$, такие, что $L_i := P_i \cap D$ — связное множество (все такие окрестности существуют, поскольку по условию D локально связна на ∂D). Если $\overline{x_i}$, $i = 1, 2$, — внутренние точки области D, то можно выбрать окрестности так, что $\overline{L_i} \cap \overline{W_j} = \varnothing$, $i, j = 1, 2$. Положим $f_m := g_m^{-1}$. Построим

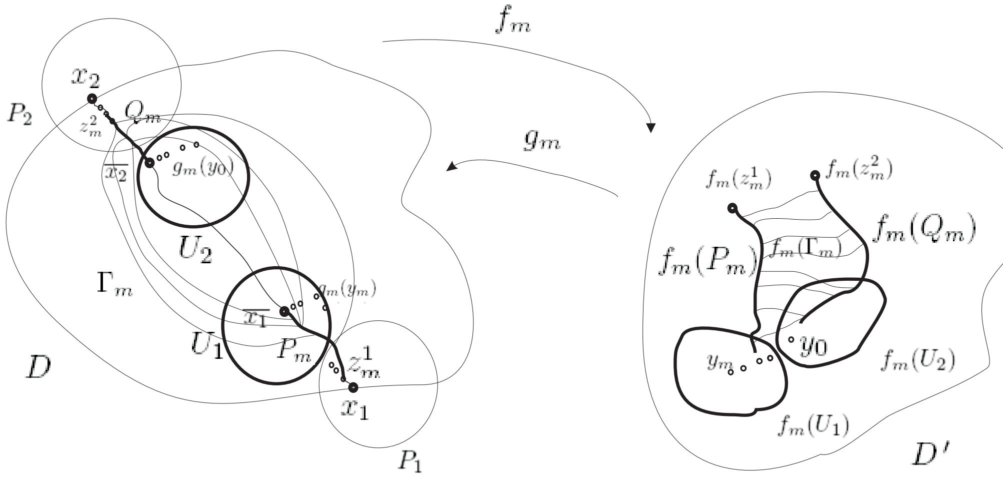

Рис. 2

две последовательности $z_m^1 \to x_1$ и $z_m^2 \to x_2$ при $m \to \infty,\ m = 1, 2, \ldots,$ следующим образом. Поскольку f_m — гомеоморфизм, то предельное множество $C(f_m, x_1)$ лежит на $\partial D'$ (см. [8], предложение 13.5). Поэтому найдется такая точка $z_m^1 \in D$, что $\operatorname{dist}(f_m(z_m^1), \partial D') < 1/m$. Так как $\overline{D'}$ — компакт, то можно считать, что последовательность $f_m(z_m^1) \to p_1 \in \partial D'$ при $m \to \infty$. Аналогично строим последовательность z_m^2 : можно считать, что $f_m(z_m^2) \to p_2 \in \partial D'$ при $m \to \infty$. Кроме того, можно считать, что $z_m^1 \in L_1$ и $z_m^2 \in L_2$ при всех $m \in \mathbb{N}$.

Если точка $\overline{x_1}$ принадлежит D, то последовательность $z_m^1 \in D$ можно выбрать так, что $z_m^1 \in D \cap |\gamma_1|$. В этом случае пусть P_m^1 обозначает часть кривой $|\gamma_1|$, соединяющую точки $\overline{x_1}$ и z_m^1. Тогда положим $P_m := P_m^1 \cup \overline{W_1}$. В противном случае, если $\overline{x_1}$ принадлежит ∂D, пусть P_m — кривая, соединяющая точки z_m^1 и $g_m(y_m)$ в W_1.

Аналогично, если точка $\overline{x_2}$ принадлежит D, то последовательность $z_m^2 \in D$ можно выбрать так, что $z_m^2 \in D \cap |\gamma_2|$. В этом случае пусть P_m^2 обозначает часть отрезка $|\gamma_2|$, соединяющую точки $\overline{x_2}$ и z_m^2. Тогда положим $Q_m := P_m^2 \cup \overline{W_2}$. В противном случае, если $\overline{x_2}$ принадлежит ∂D, пусть Q_m — кривая, соединяющая точки z_m^2 и $g_m(y_0)$ в W_2. По построению P_m и Q_m — непересекающиеся континуумы в D такие, что $l_m := \operatorname{dist}(P_m, Q_m) > l > 0$. Пусть $\Gamma_m = \Gamma(P_m, Q_m, D)$, тогда функция $\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & x \in D, \\ 0, & x \notin D, \end{cases}$ является допустимой для семейства Γ_m, поскольку для произвольной (локально спрямляемой) кривой $\gamma \in \Gamma_m$ выполнено $\int_\gamma \rho(x)|dx| \geq \dfrac{l(\gamma)}{l} \geq 1$ (здесь $l(\gamma)$ обозначает длину кривой γ). Поскольку по условию отображения f_m удовлетворяют (10), получаем

$$M_{\alpha'}(f_m(\Gamma_m)) \leq \frac{1}{l^\alpha} \int\limits_D Q(x)\, d\mu(x) := c < \infty, \tag{21}$$

так как $Q \in L^1(D)$. С другой стороны, $\operatorname{diam} f_m(P_m) \geq d'(y_m, f_m(z_m^1)) \geq (1/2)d'(y_0, p_1) > 0$ и $\operatorname{diam} f_m(Q_m) \geq d'(y_0, f_m(z_m^2)) \geq (1/2)d'(y_0, p_2) > 0$, кроме того, $\operatorname{dist}(f_m(P_m), f_m(Q_m)) \leq d'(y_m, y_0) \to 0,\ m \to \infty$. Тогда в силу пункта 1 леммы 2

$$M_{\alpha'}(f_m(\Gamma_m)) = M_{\alpha'}(f_m(P_m), f_m(Q_m), D') \to \infty, \quad m \to \infty,$$

что противоречит соотношению (21). Полученное противоречие указывает на ошибочность предположения в (20), что и завершает доказательство теоремы.

Для числа $\delta > 0$, областей $D \subset X$, $D' \subset X'$, континуума $A \subset D$ и произвольной измеримой по Лебегу функции $Q(x) \colon X \to [1, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, обозначим через $\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(D, D')$ семейство всех Q-гомеоморфизмов $f : D \to D'$, $f(D) = D'$, таких, что $\mathrm{diam}\, f(A) \geq \delta$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 2 *каждый элемент* g *семейства*

$$\mathfrak{H}^{-1}_{\delta,A,Q}(D, D') := \left\{ g = f^{-1} \colon D' \to D,\ f \in \mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(D, D') \right\}$$

может быть продолжен по непрерывности до отображения $\overline{g} = \overline{f^{-1}} \colon \overline{D'} \to \overline{D}$, *причем* $g(\overline{D'}) = \overline{D}$ *и семейство* $\mathfrak{H}^{-1}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D'}) := \{\overline{g} \colon \overline{D'} \to \overline{D},\ \overline{g}|_{D'} = g,\ g \in \mathfrak{H}^{-1}_{\delta,A,Q}(D, D')\}$ *является равностепенно непрерывным в* $\overline{D'}$.

Доказательство. Возможность непрерывного продолжения каждого $\mathfrak{H}^{-1}_{\delta,A,Q}(D, D')$ на границу области D' — утверждение пункта 3 леммы 2, а равностепенная непрерывность семейства $\mathfrak{H}^{-1}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$ в D' следует из теоремы 2. Равенство $g(\overline{D'}) = \overline{D}$ для $g \in \mathfrak{H}^{-1}_{\delta,A,Q}$ является утверждением пункта 4 леммы 2. Осталось показать равностепенную непрерывность семейства $\mathfrak{H}^{-1}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$ на границе области D'.

Предположим противное, т. е. найдутся точка $z_0 \in \partial D'$, число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательности $z_m \in \overline{D'}$, $z_m \to z_0$ при $m \to \infty$ и $\overline{g}_m \in \mathfrak{H}^{-1}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$ такие, что

$$d(\overline{g}_m(z_m), \overline{g}_m(z_0)) \geq \varepsilon_0, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{22}$$

Положим $g_m := \overline{g}_m|_{D'}$. Поскольку g_m по непрерывности продолжается на границу D', можно считать, что $z_m \in D'$, а значит, $\overline{g}_m(z_m) = g_m(z_m)$. Кроме того, найдется еще одна последовательность $z'_m \in D'$, $z'_m \to z_0$ при $m \to \infty$, такая, что $d(g_m(z'_m), \overline{g}_m(z_0)) \to 0$ при $m \to \infty$. Так как $\overline{D}$ — компакт, можем считать, что последовательности $g_m(z_m)$ и $g_m(z_0)$ являются сходящимися при $m \to \infty$. Пусть $g_m(z_m) \to \overline{x_1}$ и $\overline{g}_m(z_0) \to \overline{x_2}$ при $m \to \infty$. По непрерывности модуля из (22) следует, что $d(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \geq \varepsilon_0$. Более того, так как гомеоморфизмы сохраняют границу, $\overline{x_2} \in \partial D$. Пусть x_1 и x_2 — произвольные различные точки континуума A, ни одна из которых не совпадает с $\overline{x_1}$. В силу условия **A** можно соединить точки x_1 и $\overline{x_1}$ кривой $\gamma_1 : [0, 1] \to \overline{D}$, а точки x_2 и $\overline{x_2}$ кривой $\gamma_2 \colon [0, 1] \to \overline{D}$ так, что $|\gamma_1| \cap |\gamma_2| = \varnothing$, $\gamma_i(t) \in D$ при всех $t \in (0, 1)$, $i = 1, 2$, $\gamma_1(0) = x_1$, $\gamma_1(1) = \overline{x_1}$, $\gamma_2(0) = x_2$ и $\gamma_2(1) = \overline{x_2}$. Так как D локально связна на своей границе, найдутся непересекающиеся окрестности U_1 и U_2 точек $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ соответственно такие, что $W_i := D \cap U_i$ — линейно связное множество. За счет уменьшения окрестностей U_i, если это необходимо, можем считать, что $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \varnothing$ и $\overline{U_1} \cap |\gamma_2| = \varnothing = \overline{U_2} \cap |\gamma_1|$. Мы также можем считать, что $g_m(z_m) \in W_1$ и $g_m(z'_m) \in W_2$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Пусть a_1 и a_2 — произвольные точки, принадлежащие $|\gamma_1| \cap W_1$ и $|\gamma_2| \cap W_2$. Пусть t_1, t_2 таковы, что $\gamma_1(t_1) = a_1$ и $\gamma_2(t_2) = a_2$. Соединим точку a_1 с точкой $g_m(z_m)$ кривой $\alpha_m : [t_1, 1] \to W_1$ такой, что $\alpha_m(t_1) = a_1$ и $\alpha_m(1) = g_m(z_m)$. Аналогично, соединим точку a_2 с точкой $g_m(z'_m)$ кривой $\beta_m : [t_2, 1] \to W_2$ так, что $\beta_m(t_2) = a_2$ и $\beta_m(1) = g_m(z'_m)$ (см. рис. 3).

Положим теперь $C^1_m(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [0, t_1], \\ \alpha_m(t), & t \in [t_1, 1], \end{cases}$ $C^2_m(t) = \begin{cases} \gamma_2(t), & t \in [0, t_2], \\ \beta_m(t), & t \in [t_2, 1]. \end{cases}$ Пусть, как обычно, $|C^1_m|$ и $|C^2_m|$ — носители кривых C^1_m и C^2_m соответственно. Заметим, что по построе-

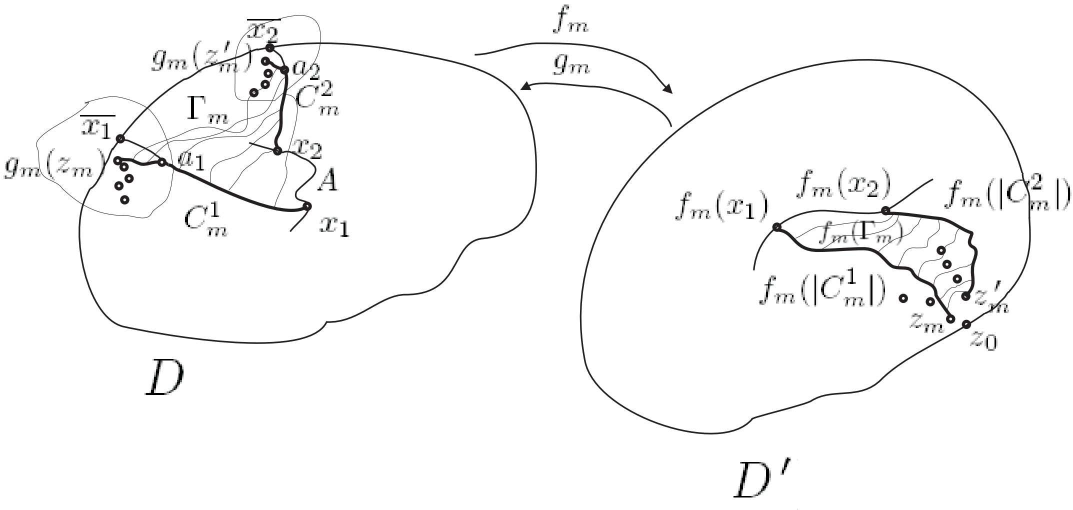

Рис. 3

нию $|C_m^1|$ и $|C_m^2|$ — два непересекающихся континуума в D, причем существует такое $l_0 > 0$, что $\mathrm{dist}\,(|C_m^1|, |C_m^2|) > l_0 > 0$ при всех $m = 1, 2, \ldots$. Пусть теперь Γ_m — семейство кривых, соединяющих $|C_m^1|$ и $|C_m^2|$ в D. Тогда функция $\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{l_0}, & x \in D, \\ 0, & x \notin D, \end{cases}$ является допустимой для семейства Γ_m и, поскольку по условию отображения f_m, $f_m = g_m^{-1}$, удовлетворяют (10), получаем

$$M_{\alpha'}(f_m(\Gamma_m)) \leq \frac{1}{l_0^\alpha} \int\limits_D Q(x)\, d\mu(x) := c = c(l_0, Q) < \infty,$$

так как $Q \in L^1(D)$. С другой стороны, в силу пункта 5 леммы 2 найдется число такое $\delta_1 > 0$, что $\mathrm{dist}\,(f_m(A), \partial D') > \delta_1 > 0$, $m = 1, 2, \ldots$. Поэтому найдется некоторый номер $m_1 > m_0$, $m_0 \in \mathbb{N}$, такой, что при всех $m \geq m_1$

$$\begin{aligned} \mathrm{diam}\, f_m(|C_m^1|) \geq d'(z_m, f_m(x_1)) \geq \frac{1}{2} \mathrm{dist}\,(f_m(A), \partial D') > \delta_1/2, \\ \mathrm{diam}\, f_m(|C_m^2|) \geq d'(z'_m, f_m(x_2)) \geq \frac{1}{2} \mathrm{dist}\,(f_m(A), \partial D') > \delta_1/2. \end{aligned} \tag{23}$$

Кроме того, $\mathrm{dist}\,(f_m(|C_m^1|, f_m(|C_m^2|) \leq d'(z_m, z'_m) \to 0$ по выбору z_m и z'_m. Тогда в силу пункта 1 леммы 2 $M_{\alpha'}(f_m(\Gamma_m)) = M_{\alpha'}(\Gamma(f_m(|C_m^1|), f_m(|C_m^2|), D')) \to \infty$ при $m \to \infty$, но это противоречит соотношению (23). Полученное противоречие указывает на ошибочность предположения в (22), что и доказывает теорему.

Заметим, что при $Q(x) = \mathrm{const}$ теорема 3 является ослабленным вариантом теоремы Някки – Палка о равностепенной непрерывности семейства квазиконформных отображений в замыкании области (см. [19], теорема 3.1).

4. О выполнении условия A в евклидовом пространстве. Для открытого, замкнутого, либо полуоткрытого интервала $I \subset \mathbb{R}$ и кривой $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$, как обычно, полагаем $|\gamma| = \{x \in$

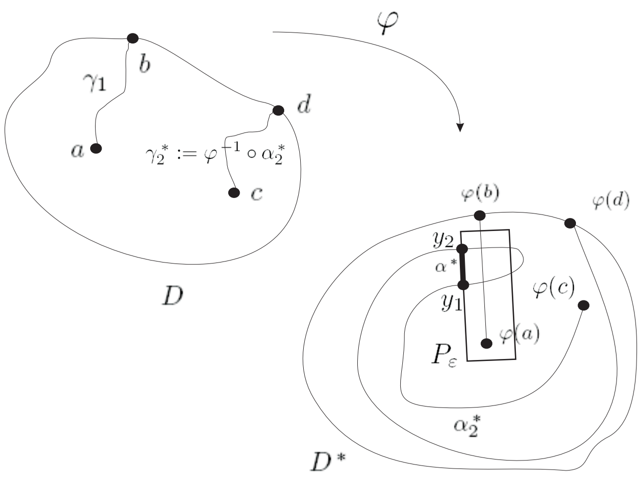

Рис. 4

$\in \mathbb{R}^n : \exists\, t \in [a, b] : \gamma(t) = x\}$. Как известно, кривая $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ называется *жордановой дугой*, если γ — гомеоморфизм на I. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, локально связная на своей границе. Тогда любые две пары точек $a \in D, b \in \overline{D}$ и $c \in D, d \in \overline{D}$ можно соединить непересекающимися между собой кривыми $\gamma_1 : [0,1] \to \overline{D}$ и $\gamma_2 : [0,1] \to \overline{D}$ так, что $\gamma_i(t) \in D$ при всех $t \in (0,1)$, $i = 1, 2$, $\gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(1) = b$, $\gamma_2(0) = c$, $\gamma_2(1) = d$.*

Доказательство. В случае $n \geq 3$ доказательство очевидно, так как точки области, локально связной на границе, являются достижимыми изнутри области посредством кривых (см. [8], предложение 13.2), а множества топологической размерности 1 не разбивают область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ (см. [11], следствие 1.5.IV). Пусть теперь $n = 2$, тогда снова точки c и d не разбивают область D [11] (следствие 1.5.IV). В таком случае также можно соединить точки a и b жордановой дугой γ_1 в D, не проходящей через точки c и d. В силу теоремы Антуана (см. [20], теорема 4.3, § 4) область D можно отобразить на некоторую область D^* посредством плоского гомеоморфизма $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ так, что $\varphi(\gamma_1) = J$ и J — отрезок в D^* (см. рис. 4).

Заметим также, что точки границы области D^* являются достижимыми изнутри D^* посредством кривых. Таким образом, мы можем соединить точки $\varphi(c)$ и $\varphi(d)$ в D^* посредством жордановой кривой $\alpha_2\colon [0,1] \to \overline{D^*}$, которая целиком лежит в D^*, кроме, возможно, своей концевой точки $\alpha_2(1) = \varphi(d)$.

Осталось показать, что кривую α_2 можно выбрать так, что она не будет пересекать отрезок J. Действительно, пусть α_2 пересекает J, а t_1 и t_2 — соответственно наибольшее и наименьшее значения $t \in [0,1]$, для которых $\alpha_2(t) \in |J|$. Пусть также

$$J = J(s) = \varphi(a) + (\varphi(b) - \varphi(a))s, \quad s \in [0,1],$$

— параметризация отрезка J. Пусть $\widetilde{s_1}$ и $\widetilde{s_2} \in (0,1)$ таковы, что $J(\widetilde{s_1}) = \alpha_2(t_1)$ и $J(\widetilde{s_2}) = \alpha_2(t_2)$. Положим $s_2 := \max\{\widetilde{s_1}, \widetilde{s_2}\}$. Пусть $e_1 = \varphi(b) - \varphi(a)$ и e_2 — единичный вектор, ортогональный e_1. Тогда множество

$$P_\varepsilon = \{x = \varphi(a) + x_1 e_1 + x_2 e_2, \quad x_1 \in (-\varepsilon, s_2 + \varepsilon), \quad x_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}, \quad \varepsilon > 0,$$

представляет собой прямоугольник, содержащий $|J_1|$, где J_1 — сужение J на отрезок $[0, s_2]$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $\varphi(c) \notin P_\varepsilon$, $\operatorname{dist}(P_\varepsilon, \partial D^*) > \varepsilon$. В силу теоремы 1.I в [18] (гл. 5, § 46) кривая α_2 пересекает ∂P_ε при некоторых $T_1 < t_1$ и $T_2 > t_2$. Пусть $\alpha_2(T_1) = y_1$ и $\alpha_2(T_2) = y_2$. Поскольку ∂P_ε — связное множество, можно соединить точки y_1 и y_2 кривой $\alpha^*(t) \colon [T_1, T_2] \to \partial P_\varepsilon$. Можно также считать, что кривая α^* не проходит через точку $z_0 :$ $\varphi(a) + (s_2 + \varepsilon)e_1$, так как $\partial P_\varepsilon \setminus z_0$ также связно. Окончательно положим

$$\alpha_2^*(t) \quad = \begin{cases} \alpha_2(t), & t \in [0,1] \setminus [T_1, T_2], \\ \alpha^*(t), & t \in [T_1, T_2], \end{cases}$$

и $\gamma_2^* := \varphi^{-1} \circ \alpha_2^*$. Тогда γ_1 соединяет a и b в D, а γ_2^* — c и d в D, при этом γ_1 и γ_2^* не пересекаются, что и следовало установить.

***Пример* 1.** Как известно, дробно-линейные автоморфизмы единичного круга $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ на себя задаются формулой $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$, $z \in \mathbb{D}$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Указанные отображения f являются 1-гомеоморфизмами; все условия теоремы 3 выполняются, кроме условия $\operatorname{diam} f(A) \geq \delta$, выполнение которого зависит от конкретного вида этих отображений.

Если, например, $\theta = 0$ и $a = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, то $f_n(z) = \dfrac{z - 1/n}{1 - z/n} = \dfrac{nz-1}{n-z}$. Положим $A = [0, 1/2]$, тогда $f_n(0) = -1/n \to 0$ и $f_n(1/2) = \dfrac{n-2}{2n-1} \to 1/2$, $n \to \infty$. Отсюда видно, что последовательность f_n удовлетворяет условию $\operatorname{diam} f_n(A) \geq \delta$, например, при $\delta = 1/4$. Путем непосредственных вычислений убеждаемся в том, что $f_n^{-1}(z) = \dfrac{z + 1/n}{1 + z/n}$, а значит, f_n^{-1} равномерно сходится к $f^{-1}(z) \equiv z$. Таким образом, последовательность $f_n^{-1}(z)$ равностепенно непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$ (что, впрочем, независимо от прямых вычислений следует из теоремы 3).

Если же взять $f_n^{-1}(z) = \dfrac{z - (n-1)/n}{1 - z(n-1)/n} = \dfrac{nz - n + 1}{n - nz + 1}$, то, как легко видеть, такая последовательность локально равномерно (*но не равномерно!*) сходится к -1 в $\mathbb{D}$. В то же время $f_n^{-1}(1) = 1$. Следовательно, f_n^{-1} не является равностепенно непрерывной в точке 1. В этом случае $f_n(z) = \dfrac{z + (n-1)/n}{1 + z(n-1)/n}$ и условие $\operatorname{diam} f_n(A) \geq \delta$ ни при каком $\delta > 0$, не зависящем от n, не может быть выполнено в силу теоремы 3 (что, впрочем, непосредственно видно, поскольку $f_n(z) \to 1$ при $n \to \infty$ локально равномерно, но не равномерно, в $\mathbb{D}$).

***Пример* 2.** Пусть $p \geq 1$ настолько велико, что число $n/p(n-1)$ меньше 1, и, кроме того, $\alpha \in (0, n/p(n-1))$ — произвольное число. Рассмотрим последовательность отображений $f_m : \mathbb{B}^n \to B(0,2)$ шара $\mathbb{B}^n$ на шар $B(0,2)$ следующим образом:

$$f_m(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + |x|^\alpha}{|x|} \cdot x, & 1/m \leq |x| \leq 1, \\[2ex] \dfrac{1 + (1/m)^\alpha}{(1/m)} \cdot x, & 0 < |x| < 1/m\,. \end{cases}$$

Заметим, что f_m являются Q-гомеоморфизмами в $\mathbb{B}^n$ при $Q = \left(\dfrac{1 + |x|^{\,\alpha}}{\alpha|x|^{\,\alpha}}\right)^{n-1} \in L^1(\mathbb{B}^n)$ (см. [15], доказательство теоремы 7.1), $B(0,2)$ является QED-областью (см. [21], лемма 4.3) и $\mathbb{R}^n$ является пространством Левнера (см. [4], теорема 8.2). По построению отображения

f_m фиксируют бесконечное число точек единичного шара при всех $m \geq 2$. Равностепенная непрерывность семейства отображений $g_m := f_m^{-1}$ в $B(0,2)$,

$$g_m(y) := f_m^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y}{|y|}(|y|-1)^{1/\alpha}, & 1 + 1/m^\alpha \leq |y| < 2, \\ \frac{(1/m)}{1+(1/m)^\alpha} \cdot y, & 0 < |y| < 1 + 1/m^\alpha \ , \end{cases}$$

следует из теоремы 3, однако может быть установлена и непосредственно. Из этой же теоремы следует равностепенная непрерывность продолженного по непрерывности семейства $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ на $\overline{B(0,2)}$.

Следует отметить тот факт, что хотя семейство отображений $\mathfrak{G} = \{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывно в $B(0,2)$, таковым не является «обратное» к ним семейство $\mathfrak{F} = \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ (действительно, $|f_m(x_m) - f(0)| = 1 + 1/m \not\to 0$ при $m \to \infty$, где $|x_m| = 1/m$).

Теперь исследуем последовательность g_m в контексте утверждения теоремы 1. Нетрудно проверить, что последовательность g_m равномерно сходится в $B(0,2)$ к отображению

$$g(y) := \begin{cases} \frac{y}{|y|}(|y|-1)^{1/\alpha}, & 1 < |y| < 2, \\ 0, & 0 < |y| < 1 + 1/m^\alpha \ , \end{cases}$$

которое не является ни постоянным, ни нульмерным. В силу теоремы 7.1 в [15] заключаем, что g_m удовлетворяет условию (2) (и тем более условию (4) при $p = q = n$) при $Q = \left(\frac{1+|x|^{\alpha}}{\alpha|x|^{\alpha}}\right)^{n-1} \in L^p$, где p — число, выбранное в начале рассмотрения данного примера. Последнее указывает на то, что условия на функцию Q, содержащиеся в теореме 1, являются точными в следующем смысле: требование $Q \in FMO$ нельзя заменить условием $Q \in L^p$ ни для какого (сколь угодно большого) $p > 1$.

Литература

1. *Adamowicz T., Shanmugalingam N.* Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – **35.** – P. 609 – 626.
2. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yakubov E.* The Beltrami equations and prime ends // J. Math. Sci. – 2015. – **210**, № 1. – P. 22 – 51.
3. *Hajlasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincare // Mem. Amer. Math. Soc. – 2000. – **145**, № 688. – P. 1 – 101.
4. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. – New York: Springer Science+Business Media, 2001.
5. *Onninen J., Rajala K.* Quasiregular mappings to generalized manifolds // J. Anal. Math. – 2009. – **109.** – P. 33 – 79.
6. *Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2007. – **4**, № 2. – С. 199 – 234.
7. *Rickman S.* Quasiregular mappings // Results Math. and Relat. Areas. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – **26**, № 3. – 213 p.
8. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009. – 367 p.
9. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lecture Notes Math. – 1971. – **229**.
10. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 1969. – **448**. – P. 1 – 40.
11. *Hurewicz W., Wallman H.* Dimension theory. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1948. – 165 p.
12. *Севостьянов Е. А.* Об открытости и дискретности отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 8. – С. 1128 – 1134.

13. *Севостьянов Е. А.* О нульмерности предела последовательности обобщенно квазиконформных отображений // Мат. заметки. – 2017. – **102**, № 4. – С. 586 – 596.
14. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – **98**. – P. 171–219.
15. *Севостьянов Е. А.* О равностепенной непрерывности гомеоморфизмов с неограниченной характеристикой // Мат. тр. – 2012. – **15**, № 1. – С. 178 – 204.
16. *Смоловая Е. С.* Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2012. – **62**, № 5. – С. 682 – 689.
17. *Herron J., Koskela P.* Quasiextremal distance domains and conformal mappings onto circle domains // Complex Var. Theor. Appl. – 1990. – **15**. – P. 167 – 179.
18. *Куратовский К.* Топология. – М.: Мир, 1969. – Т. 2.
19. *Näkki R., Palka B.* Uniform equicontinuity of quasiconformal mappings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – **37**, № 2. – P. 427 – 433.
20. *Келдыш Л. В.* Топологические вложения в евклидово пространство // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1966. – **81**. – P. 3 – 184.
21. *Vuorinen M.* On the existence of angular limits of n-dimensional quasiconformal mappings // Ark. Mat. – 1980. – **18**. – P. 157 – 180.

Получено 30.01.18