УДК 517.5

Р. В. Шанин (Ин-т математики, экономики и механики, Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

ОЦЕНКИ РАВНОИЗМЕРИМЫХ ПЕРЕСТАНОВОК В АНИЗОТРОПНОМ СЛУЧАЕ

We study the classes of functions satisfying the reverse Hölder inequality on segments in the multidimensional case. For these classes, we obtain sharp estimates of the "norms" of equimeasurable rearrangements.

Вивчаються класи функцій, що задовольняють обернену нерівність Гьольдера на сегментах у багатовимірному випадку. Для таких функцій отримано точні оцінки „норм" рівновимірних переставлень.

1. Введение. Обозначим через Ψ класс неотрицательных, непрерывных и строго монотонных на $(0,+\infty)$ функций. Для $\alpha\in\Psi$ будем считать, что $\alpha(0):=\alpha(0+)$ (возможно, равное нулю или бесконечности). Для функций g_1 и g_2 их композицию будем обозначать так:

$$(g_1\circ g_2)(x):=g_1(g_2(x)).$$

В работе изучаются измеримые и неотрицательные функции, за исключением специально отмеченных случаев.

Для функции f средним порядка $\alpha\in\Psi$ на измеримом множестве $E\subset\mathbb{R}^d$, $0<|E|<\infty$, будем называть величину

$$M_\alpha(f,E):=\alpha^{-1}\left(\frac{1}{|E|}\int\limits_E\alpha(f(x))\,dx\right),$$

где $|E|$ — лебегова мера множества E. Если $\alpha(t)=t^p$, $p\neq 0$, то средние порядка α будем обозначать через $M_p(f,E)$. В случае $p=1$ индекс будем опускать.

Сегментом $R\subset\mathbb{R}^d$ будем называть параллелепипед со сторонами, параллельными осям координат. Сегменты, внутренности которых не пересекаются, будем называть дизъюнктивными. Для $\alpha\in\Psi$ и сегмента $R\subset\mathbb{R}^d$ положим

$$\alpha(L)=\alpha(L(R)):=\left\{f:\int\limits_R\alpha(f(x))\,dx<\infty\right\}.$$

Пусть сегмент $R\subset\mathbb{R}^d$, функции α и β принадлежат Ψ. Для того чтобы неравенство

$$M_\alpha(f,R)\le M_\beta(f,R) \tag{1}$$

выполнялось для всех $f\in\alpha(L)\cap\beta(L)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi=\beta\circ\alpha^{-1}$ была выпуклая вниз[1], когда β возрастает, и выпуклая вверх[2], когда β убывает [1, с. 69]. Если $\alpha(t)=t^r$, $\beta(t)=t^s$, где $r<s$, $rs\neq 0$, то неравенство (1) принимает вид

$$M_r(f,R)\le M_s(f,R).$$

[1] $\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)$ для всех $0\le\lambda\le 1$ и всех $x,y\in D_\varphi$.
[2] $\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)\ge\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)$ для всех $0\le\lambda\le 1$ и всех $x,y\in D_\varphi$.

В частности, последнее неравенство — это простое следствие неравенства Гельдера [1, с. 139; 2, с. 37]. Обратные к нему, в том или ином смысле, неравенства возникают в различных разделах анализа. Так, при исследовании весовых пространств возникают классы Макенхаупта [3], в теории квазиконформных отображений — классы Геринга [4], при изучении пространства H^1 [5, 6] возникает пространство BMO функций с ограниченным средним колебанием. Заметим, что при изучении свойств всех упомянутых выше классов важную роль играют оценки равноизмеримых перестановок (см., например, [7–9]).

Пусть функции $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ принадлежат Ψ и $\varphi = \beta \circ \alpha^{-1}$ выпуклая вниз, когда β возрастает, и выпуклая вверх, когда β убывает. Обозначим

$$c(\gamma) := \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \gamma \quad \text{возрастает}, \\ -1, & \text{если} \quad \gamma \quad \text{убывает}. \end{cases}$$

Зафиксируем сегмент $R_0 \subset \mathbb{R}^d$ и определим классы функций, удовлетворяющих обратному неравенству Гельдера, следующим образом:

$$RH_{\alpha,\beta,\gamma}(R_0) := \left\{ f \in \alpha(L(R_0)) \cap \beta(L(R_0)) \colon \langle f \rangle_{RH_{\alpha,\beta,\gamma}(R_0)} < +\infty \right\},$$

где

$$\langle f \rangle_{\alpha,\beta,\gamma} := \langle f \rangle_{RH_{\alpha,\beta,\gamma}(R_0)} := \sup_{R \subseteq R_0} \left(\frac{\gamma(M_\beta(f,R))}{\gamma(M_\alpha(f,R))} \right)^{c(\gamma)}$$

и верхняя грань берется по всем сегментам $R \subseteq R_0$.

***Пример* 1.** Зафиксируем $r < s,\ rs \neq 0$, и положим $\alpha(t) = t^r,\ \beta(t) = t^s$. Тогда при любом $\gamma(t) = t^k$, где $k \neq 0$, класс $RH_{\alpha,\beta,\gamma}$ совпадает с общеизвестным классом $RH_{r,s}$ функций, удовлетворяющих обратному неравенству Гельдера.

***Пример* 2.** Положим $\alpha(t) = t,\ \beta(t) = t^2$ и $\gamma(t) = e^{t^2}$. Тогда условие

$$\sup_{R \subseteq R_0} \left(\frac{\gamma(M_\beta(f,R))}{\gamma(M_\alpha(f,R))} \right)^{c(\gamma)} = \sup_{R \subseteq R_0} \exp(M_2^2(f,R) - M^2(f,R)) < \infty$$

равносильно условию

$$\sup_{R \subseteq R_0} (M_2^2(f,R) - M^2(f,R)) < \infty,$$

откуда следует, что класс $RH_{\alpha,\beta,\gamma}$ совпадает с подмножеством всех неотрицательных функций из пространства BMO.

***Пример* 3.** Зафиксируем $r < s,\ rs \neq 0,\ k \neq 0$, и положим $\alpha(t) = t^r,\ \beta(t) = t^s,\ \gamma(t) = e^{t^k}$. Любая функция $f \in RH_{\alpha,\beta,\gamma}(R_0)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{R \subseteq R_0} \left(\frac{\gamma(M_\beta(f,R))}{\gamma(M_\alpha(f,R))} \right)^{c(\gamma)} = \sup_{R \subset R_0} \exp(M_s^k(f,R) - M_r^k(f,R)) < \infty.$$

Это условие равносильно условию

$$\sup_{R \subseteq R_0} \left(M_s^k(f,R) - M_r^k(f,R) \right) < \infty,$$

из которого следует, что класс $RH_{\alpha,\beta,\gamma}$ совпадает с классом $RH'_{r,s,k}$, некоторые свойства которого изучались в работах [10 – 12]. В частности, в работе [10] установлено, что

$$f \in RH'_{1,p,p}(I_0) \quad \Leftrightarrow \quad f^{p/2} \in BMO(I_0),$$

где $1 < p \leq 2$, интервал $I_0 \subset \mathbb{R}$. В работе [11] получены оценки равноизмеримых перестановок функций из $RH'_{r,s,k}(I_0)$, где интервал $I_0 \subset \mathbb{R}$.

В настоящей работе получены оценки равноизмеримых перестановок функций из $RH_{\alpha,\beta,\gamma}(R_0)$. Для того чтобы сформулировать основной результат, напомним определение равноизмеримых перестановок функций.

Определение 1. *Равноизмеримыми перестановками функции f (невозрастающей и неубывающей соответственно) называются функции*

$$f^*(t) \equiv \inf\{y > 0 \colon |\{x \in E \colon f(x) > y\}| \leq t\}, \quad t \in (0, |E|),$$

$$f_*(t) \equiv \sup\{y > 0 \colon |\{x \in E \colon f(x) < y\}| \leq t\}, \quad t \in (0, |E|).$$

Определенные таким образом перестановки — непрерывные справа функции.

Замечание. Если $|E| < +\infty$ и $t \in (0, |E|)$ — точка непрерывности функции f^*, то

$$f_*(t) = f^*(|E| - t). \tag{2}$$

Основной результат работы заключается в следующей оценке равноизмеримых перестановок функции.

Теорема. *Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \Psi$, сегмент $R_0 \subset \mathbb{R}^d$, $f \in RH_{\alpha,\beta,\gamma}(R_0)$ и $J_0 = (0, |R_0|)$. Тогда $f^*,\ f_* \in RH_{\alpha,\beta,\gamma}(J_0)$ и*

$$\langle f^* \rangle_{\alpha,\beta,\gamma} \leq \langle f \rangle_{\alpha,\beta,\gamma}\,, \qquad \langle f_* \rangle_{\alpha,\beta,\gamma} \leq \langle f \rangle_{\alpha,\beta,\gamma}\,.$$

2. Вспомогательные определения и результаты. Для произвольной функции f через D_f будем обозначать ее область определения, через $f(D_f)$ — область значений. Для произвольного свойства P обозначим

$$E(P) := \{x \in E \colon P(x)\}.$$

Лемма 1. *Пусть $\alpha \in \Psi$ и f задана на множестве E, $0 < |E| < \infty$. Тогда*:

1) *если α возрастает, то*

$$(\alpha \circ f)^*(t) = (\alpha \circ f^*)(t), \qquad (\alpha \circ f)_*(t) = (\alpha \circ f_*)(t); \tag{3}$$

2) *если α убывает, то*

$$(\alpha \circ f)^*(t) = (\alpha \circ f_*)(t), \qquad (\alpha \circ f)_*(t) = (\alpha \circ f^*)(t). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть α возрастает, $t \in (0, |E|)$ и $y \in \{y > 0 \colon |E(\alpha \circ f > y)| \leq t\}$. Тогда $|E(\alpha \circ f > y)| \leq t < |E|$ и, таким образом, $E \setminus E(\alpha \circ f > y) \neq \varnothing$. Отсюда следует, что $y \geq (\alpha \circ f)(x)$ для некоторого $x \in E$ и, следовательно, $y \geq \alpha(0)$. С другой стороны, так как $(\alpha \circ f)(x) \leq \alpha(+\infty)$ для всех $x \in E$, то $E(\alpha \circ f > y) = \varnothing$ для всех $y \geq \alpha(+\infty)$. Таким образом,

$$(\alpha \circ f)^*(t) = \inf\{y \in \alpha(D_\alpha) \colon |E(\alpha \circ f > y)| \leq t\}.$$

Обозначая $z = \alpha^{-1}(y)$ и учитывая, что

$$\big((\alpha \circ f)(x) > y\big) \Leftrightarrow \big(f(x) > \alpha^{-1}(y)\big)$$

для любых $x \in E$ и $y \in \alpha(D_\alpha)$, имеем

$$\big\{y \in \alpha(D_\alpha) \colon |E(\alpha \circ f > y)| \leq t\big\} = \big\{\alpha(z) \in \alpha(D_\alpha) \colon |E(f > z)| \leq t\big\}.$$

Таким образом,

$$(\alpha \circ f)^*(t) = \inf\big\{y > 0 \colon |E(\alpha \circ f > y)| \leq t\big\} =$$
$$= \inf\big\{\alpha(z) \in \alpha(D_\alpha) \colon |E(f > z)| \leq t\big\} =$$
$$= \alpha\left(\inf\big\{z > 0 \colon |E(f > z)| \leq t\big\}\right) = (\alpha \circ f^*)(t).$$

Доказательство второго равенства в (3) аналогично, и мы его опускаем.

Пусть теперь α убывает, $t \in (0, |E|)$ и

$$y \in \big\{y > 0 \colon |E(\alpha \circ f > y)| \leq t\big\}.$$

Тогда $|E(\alpha \circ f > y)| \leq t < E$ и, таким образом, $E \setminus E(\alpha \circ f > y) \neq \varnothing$. Отсюда $y \geq (\alpha \circ f)(x) \geq \geq \alpha(+\infty)$ для всех $x \in E \setminus E(\alpha \circ f > y)$. С другой стороны, так как $(\alpha \circ f)(x) \leq \alpha(0+)$ для всех $x \in E$, то

$$\big|E(\alpha \circ f > y)\big| = 0 \quad \text{для всех} \quad y \geq \alpha(0+).$$

Таким образом,

$$(\alpha \circ f)^*(t) = \inf\big\{y \in \alpha(D_\alpha) \colon |E(\alpha \circ f > y)| \leq t\big\}.$$

Обозначая $z = \alpha^{-1}(y)$ и учитывая, что

$$\big(\alpha(f(x)) > y\big) \Leftrightarrow \big(f(x) < \alpha^{-1}(y)\big)$$

для любых $x \in E$ и $y \in \alpha(D_\alpha)$, получаем

$$\big\{y \in \alpha(D_\alpha) \colon |E(\alpha \circ f > y)| \leq t\big\} = \big\{\alpha(z) \in \alpha(D_\alpha) \colon |E(f < z)| \leq t\big\}.$$

Таким образом,

$$(\alpha \circ f)^*(t) = \inf\big\{y > 0 \colon |E(\alpha \circ f > y)| \leq t\big\} =$$
$$= \inf\big\{\alpha(z) \in \alpha(D_\alpha) \colon |E(f < z)| \leq t\big\} =$$
$$= \alpha\left(\sup\big\{z > 0 \colon |E(f < z)| \leq t\big\}\right) = (\alpha \circ f_*)(t).$$

Второе равенство в (4) доказывается аналогично, поэтому мы его опускаем.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2 [9]. *Пусть φ выпуклая вниз на интервале $(a, b) \subseteq (0, +\infty)$, J_1 — интервал из $\mathbb{R}$. Если функция f принадлежит $\varphi(L(J_1)) \cap L(J_1)$, монотонна на J_1 и интервал $J_2 \subset J_1$ такой, что $M(f, J_1) = M(f, J_2)$, то*

$$M(\varphi \circ f, J_2) \leq M(\varphi \circ f, J_1).$$

Во многих вопросах анализа важную роль играют леммы о покрытиях. Для дальнейшего изложения нам нужны две леммы, которые являются разновидностями известной леммы Рисса „о восходящем солнце". При этом лемма 3 используется для работы с невозрастающей перестановкой, а лемма 4 — для работы с неубывающей перестановкой.

Лемма 3 [7, 13]. *Пусть сегмент* $R_0 \subset \mathbb{R}^d$, *функция* $f \in L(R_0)$ *и число* $A \geq M(f, R_0)$. *Тогда существует такое семейство попарно дизъюнктивных сегментов* $R_j \subset R_0$, $j \in \mathbb{N}$, *что* $M(f, R_j) = A$, $j = 1, 2, \ldots$, *и для почти любой точки* $x \in R_0 \setminus \bigcup_{j \geq 1} R_j$ *имеет место неравенство* $f(x) \leq A$.

Лемма 4 [7, 13]. *Пусть сегмент* $R_0 \subset \mathbb{R}^d$, *функция* $f \in L(R_0)$ *и число* $A \leq M(f, R_0)$. *Тогда существует такое семейство попарно дизъюнктивных сегментов* $R_j \subset R_0$, $j \in \mathbb{N}$, *что* $M(f, R_j) = A$, $j = 1, 2, \ldots$, *и для почти любой точки* $x \in R_0 \setminus \bigcup_{j \geq 1} R_j$ *имеет место неравенство* $f(x) \geq A$.

Для оценки интегралов от композиции функций нам нужна следующая лемма.

Лемма 5 [1, c. 170]. *Пусть функции* g_1 *и* g_2 *не возрастают на отрезке* $[a, b]$. *Для того чтобы для любой выпуклой вниз функции* φ *имело место неравенство*

$$\int\limits_a^b \varphi(g_1(x))\,dx \leq \int\limits_a^b \varphi(g_2(x))\,dx,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_a^b g_1(x)\,dx = \int\limits_a^b g_2(x)\,dx,$$

$$\int\limits_a^x g_1(x)\,dx \leq \int\limits_a^x g_2(x)\,dx, \quad a \leq x \leq b.$$

В леммах 6 и 7 устанавливается свойство перестановок, которое играет важную роль в дальнейшем изложении.

Лемма 6 [11]. *Пусть* f *задана на сегменте* R_0, *измеримое множество* $E \subset R_0$, $g = f|_E$ — *сужение* f *на* E, $0 \leq a \leq |R_0| - |E|$. *Тогда существуют такие* a_1, a_2, $a \leq a_1 \leq a_2 \leq a + |E|$, *что*:

a) $g^*(t - a) > f^*(t)$ *для почти всех* $t \in (a, a_1)$;

b) $g^*(t - a) = f^*(t)$ *для почти всех* $t \in (a_1, a_2)$;

c) $g^*(t - a) < f^*(t)$ *для почти всех* $t \in (a_2, a + |E|)$.

Лемма 7 [11]. *Пусть* f *задана на интервале* R_0, *измеримое множество* $E \subset R_0$, $g = f|_E$ — *сужение* f *на* E, $0 \leq a \leq |R_0| - |E|$. *Тогда существуют такие* a_1, a_2, $a \leq a_1 \leq a_2 \leq a + |E|$, *что*:

a) $g_*(t - a) < f_*(t)$ *для почти всех* $t \in (a, a_1)$;

b) $g_*(t - a) = f_*(t)$ *для почти всех* $t \in (a_1, a_2)$;

c) $g_*(t - a) > f_*(t)$ *для почти всех* $t \in (a_2, a + |E|)$.

3. Доказательство основного результата. Приведенная далее лемма представляет собой основной технический результат работы. Доказательство этой леммы основано на применении лемм 5 – 7. Подобный результат был получен в работе [9] другими методами.

Лемма 8. *Пусть непрерывная и неотрицательная функция* φ *выпуклая вниз на интервале* $(a,b) \subseteq (0,+\infty)$, *сегмент* $R_0 \subset \mathbb{R}^d$, *функция* f *такая, что* $f(x) \in [a,b]$ *для всех* $x \in R_0$, $f \in \varphi(L(R_0)) \cap L(R_0)$ *и* F — *одна из перестановок* f^* *или* f_*. *Тогда для любого интервала* $J \subset (0,|R_0|)$ *найдется такой набор дизъюнктивных сегментов* $R_n \subset R_0$, $n \geq 1$, *что* $M(f,R_n) = M(F,J)$ *для всех* $n \geq 1$ *и*

$$M(\varphi(F),J) \leq \sup_n M(\varphi(f),R_n).$$

Доказательство. Пусть $F = f^*$. Сначала докажем утверждение леммы для интервалов $J_\delta = (0,\delta)$. Для этого применим к сегменту R_0 лемму 3 с $A = M(f^*,J_\delta)$. В результате получим набор таких дизъюнктивных сегментов $R_n \subset R_0$, $n \geq 1$, что $M(f,R_n) = A$ и $f(x) \leq A$ для почти всех $x \in R_0 \setminus E$, где $E = \cup_n R_n$, т. е. $E \supset \{x \in R_0 \colon f(x) > A\} \setminus \Omega$, где Ω — некоторое множество нулевой меры. Поскольку

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_0^\delta f^*(t)\,dt = \frac{1}{|E|}\int\limits_E f(x)\,dx \leq \frac{1}{|E|}\int\limits_0^{|E|} f^*(t)\,dt$$

и функция f^* не возрастает, то $|E| \leq |J_\delta| = \delta$.

Обозначим через $g := f|_E$ сужение функции f на множество E и

$$a_1 = \sup\big\{t \in (0,|R_0|) \colon f^*(t) > A\big\}.$$

Тогда $g^*(t) = f^*(t) > A$ при $0 < t < a_1$ и $g^*(t) \leq f^*(t) \leq A$ при $a_1 < t \leq |E|$. На интервале J_δ определим функцию h следующим образом:

$$h(t) = \begin{cases} g^*(t), & 0 < t < a_1, \\ A, & a_1 \leq t < a_1 + \delta - |E|, \\ g^*(t-\delta+|E|), & a_1 + \delta - |E| \leq t < \delta, \end{cases}$$

и докажем неравенство

$$\int\limits_0^\delta \varphi(f^*(t))\,dt \leq \int\limits_0^\delta \varphi(h(t))\,dt.$$

В силу леммы 5 достаточно показать, что

$$\int\limits_0^\delta f^*(t)\,dt = \int\limits_0^\delta h(t)\,dt = A\delta, \tag{5}$$

$$\int\limits_0^T f^*(t)\,dt \leq \int\limits_0^T h(t)\,dt, \quad 0 \leq T \leq \delta. \tag{6}$$

Равенство (5) получаем простыми преобразованиями

$$\int\limits_0^\delta h(t)\,dt = \int\limits_0^{a_1} g^*(t)\,dt + \int\limits_{a_1}^{a_1+\delta-|E|} A\,dt + \int\limits_{a_1+\delta-|E|}^{\delta} g^*(t-\delta+|E|)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{a_1} g^*(t)\,dt + A(\delta-|E|) + \int\limits_{a_1}^{|E|} g^*(t)\,dt = \int\limits_0^{|E|} g^*(t)\,dt + A(\delta-|E|) =$$

$$= \int\limits_E f(t)\,dt + A(\delta-|E|) = A|E| + A(\delta-|E|) = A\delta.$$

Для доказательства неравенства (6) покажем, что функция

$$G(T) = \int\limits_0^T (h(t)-f^*(t))\,dt \geq 0, \quad 0 \leq T \leq \delta.$$

Функция G непрерывна и $G(0)=G(\delta)=0$. Применив к функциям f и g лемму 6 с $a=\delta-|E|$, найдем такое $t_0 \in (\delta-|E|,\delta)$, что

$$f^*(t) \leq g^*(t-\delta+|E|) \quad \text{при} \quad t \in (\delta-|E|, t_0),$$

$$f^*(t) \geq g^*(t-\delta+|E|) \quad \text{при} \quad t \in (t_0, \delta).$$

Таким образом, если $a_2 = \max\{t_0, a_1+\delta-|E|\}$, то $h(t) \geq f^*(t)$ при $t \in (0,a_2)$ и $h(t) \leq$ $\leq f^*(t)$ при $t \in (a_2,\delta)$. Отсюда следует, что $G(T) \geq 0$ для $T \in (0,\delta)$, что равносильно (6). Следовательно,

$$\int\limits_0^\delta \varphi(f^*(t))\,dt \leq \int\limits_0^\delta \varphi(h(t))\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{a_1} \varphi(g^*(t))\,dt + \int\limits_{a_1}^{a_1+\delta-|E|} \varphi(A)dt + \int\limits_{a_1+\delta-|E|}^{\delta} \varphi(g^*(t-(\delta-|E|)))\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{|E|} \varphi(g^*(t))\,dt + \varphi(A)(\delta-|E|).$$

Учитывая неравенство $\varphi(A) = \varphi(M(f^*,J_\delta)) \leq M(\varphi\circ f^*, J_\delta)$, которое является следствием неравенства Йенсена, получаем

$$0 \leq \int\limits_0^\delta \varphi(f^*(t))\,dt - \varphi(A)\delta \leq \int\limits_0^{|E|} \varphi(g^*(t))\,dt - \varphi(A)|E|.$$

Умножая почленно полученное неравенство на неравенство $\dfrac{1}{\delta} \leq \dfrac{1}{|E|}$, имеем

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_0^{\delta}\varphi(f^*(t))\,dt-\varphi(A)\leq\frac{1}{|E|}\int\limits_0^{|E|}\varphi(g^*(t))\,dt-\varphi(A).$$

Отсюда

$$M(\varphi\circ f^*,J_\delta)=\frac{1}{\delta}\int\limits_0^{\delta}\varphi(f^*(t))\,dt\leq\frac{1}{|E|}\int\limits_0^{|E|}\varphi(g^*(t))\,dt=\frac{1}{|E|}\int\limits_E\varphi(f(x))\,dx=$$

$$=M(\varphi\circ f,E)=\frac{1}{|E|}\sum_{n\geq 1}|R_n|M(\varphi\circ f,R_n)\leq$$

$$\leq\frac{1}{|E|}\sup_{n\geq 1}M(\varphi\circ f,R_n)\sum_{n\geq 1}|R_n|=\sup_{n\geq 1}M(\varphi\circ f,R_n).$$

Доказательство случая $J_\delta=(\delta,|R_0|)$ аналогично доказательству случая $J_\delta=(0,\delta)$, только вместо леммы 3 надо применить лемму 4, поэтому мы его не приводим.

Рассмотрим теперь произвольный интервал $J\subset(0,|R_0|)$. Если $M(f^*,J)\geq M(f,R_0)$, то найдется такой интервал $J_\delta=(0,\delta)\supset J$, что $M(f^*,J)=M(f^*,J_\delta)$, а если $M(f^*,J)<$ $< M(f,R_0)$, то найдется такой интервал $J_\delta=(\delta,|R_0|)\supset J$, что $M(f^*,J)=M(f^*,J_\delta)$. Применяя лемму 2 к интервалам J и J_δ, получаем

$$M(\varphi\circ f^*,J)\leq M(\varphi\circ f^*,J_\delta).$$

Отсюда следует, что существует набор таких дизъюнктивных сегментов $R_n\subset R_0$, $n\geq 1$, что $M(f,R_n)=M(f^*,J)$ для всех $n\geq 1$ и

$$M(\varphi\circ f^*,J)\leq\sup_n M(\varphi\circ f,R_n).$$

Для $F=f_*$ утверждение леммы следует из (2) и предыдущей части доказательства.

Лемма 8 доказана.

Доказательство теоремы проведем в несколько шагов для $F=f^*$. Для $F=f_*$ оно аналогично, и поэтому мы его не приводим.

Пусть β возрастает и $J=(a,b)\subseteq(0,|R_0|)$ — произвольный интервал. Обозначим

$$J'=\begin{cases}(a,b), & \text{если } \alpha \text{ возрастает},\\ (|R_0|-b,|R_0|-a), & \text{если } \alpha \text{ убывает}.\end{cases}$$

Применяя к функции $\alpha\circ f$ и интервалу J' лемму 8 с $\varphi(t)=(\beta\circ\alpha^{-1})(t)$, получаем такой набор дизъюнктивных сегментов $R_n\subset R_0$, $n\geq 1$, что $M((\alpha\circ f)^*,J')=M(\alpha\circ f,R_n)$ и

$$M(\varphi\circ(\alpha\circ f)^*,J')\leq\sup_n M(\beta\circ f,R_n).$$

Отсюда, применяя (3), если α возрастает, и (4), если α убывает, а также учитывая (2), имеем

$$M((\alpha\circ f)^*, J') = M(\alpha\circ f^*, J), \qquad M(\varphi\circ(\alpha\circ f)^*, J') = M(\beta\circ f^*, J).$$

Таким образом,

$$M_\alpha(f^*, J) = M_\alpha(f, R_n), \quad n\ge 1, \tag{7}$$

$$M_\beta(f^*, J) \le \sup_n M_\beta(f, R_n). \tag{8}$$

Отсюда для $f\in RH_{\alpha,\beta,\gamma}(R_0)$ получаем

$$\left(\frac{\gamma(M_\beta(f^*,J))}{\gamma(M_\alpha(f^*,J))}\right)^{c(\gamma)} \le \sup_n \left(\frac{\gamma(M_\beta(f,R_n))}{\gamma(M_\alpha(f,R_n))}\right)^{c(\gamma)} \le \langle f\rangle_{RH_{\alpha,\beta,\gamma}(R_0)}. \tag{9}$$

Пусть теперь функция β убывает. Если функция α убывает, то $\beta\circ\alpha^{-1}$ возрастает и выпуклая вверх. Обратная к ней функция $\varphi=\alpha\circ\beta^{-1}$ тоже возрастает и выпуклая вниз. Применяя к функции $\beta\circ f$ и интервалу

$$J' = \big(|R_0| - b, |R_0| - a\big)$$

лемму 8 с $\varphi(t) = (\alpha\circ\beta^{-1})(t)$, получаем такой набор дизъюнктивных сегментов $R_n\subset R_0$, $n\ge 1$, что

$$M((\beta\circ f)^*, J') = M(\beta\circ f, R_n), \quad n\ge 1,$$

$$M(\varphi\circ(\beta\circ f)^*, J') \le \sup_n M(\alpha\circ f, R_n).$$

Применяя (4) и (2), находим

$$M((\beta\circ f)^*, J') = M(\beta\circ f^*, J), \qquad M(\varphi\circ(\beta\circ f)^*, J') = M(\alpha\circ f^*, J).$$

Таким образом,

$$M_\beta(f^*, J) = M_\beta(f, R_n), \quad n\ge 1, \tag{10}$$

$$M_\alpha(f^*, J) \ge \sup_n M_\alpha(f, R_n). \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует (9).

Осталось рассмотреть случай, когда функция β убывает, а α возрастает. Композиция $\beta\circ\alpha^{-1}$ убывает и выпуклая вверх. Обратная к ней функция $\alpha\circ\beta^{-1}$ тоже убывает и выпуклая вверх. Таким образом, метод, использованный в предыдущей части доказательства, здесь неприменим. Отметим, что функция $\beta\circ\alpha^{-1}$ ограничена. Пусть

$$K := \sup\big\{(\beta\circ\alpha^{-1})(t) : t\in\alpha^{-1}((0,\infty))\big\}.$$

Тогда функция $\varphi(t) = K - (\beta\circ\alpha^{-1})(t)$ возрастает и выпуклая вниз. Применяя к функции $\alpha\circ f$ и интервалу J лемму 8, получаем такой набор дизъюнктивных сегментов $R_n\subset R_0$, $n\ge 1$, что $M((\alpha\circ f)^*, J) = M(\alpha\circ f, R_n)$ и

$$M(\varphi\circ(\alpha\circ f)^*, J) \le K - \sup_n M(\beta\circ f, R_n).$$

Отсюда, применяя (3), имеем

$$M((\alpha\circ f)^*,J)=M(\alpha\circ f,J),\qquad M(\varphi\circ(\alpha\circ f)^*,J)=K-M(\beta\circ f^*,J).$$

Учитывая, что функция β убывает, получаем

$$M_\alpha(f^*,J)=M_\alpha(f,R_n),\quad n\geq 1, \tag{12}$$

$$M_\beta(f^*,J)\leq\sup_n M_\beta(f,R_n). \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует (9).

Теорема доказана.

Литература

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.* Inequalities. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1934. – 314 p.
2. *Либ Э., Лосс М.* Анализ. – Пер. с англ. – Новосибирск: Науч. книга, 1998. – 276 с.
3. *Muckenhoupt B.* Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **165**. – P. 207 – 226.
4. *Gehring F. W.* The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasicinformal mapping // Acta Math. – 1973. – **130**, № 1. – P. 265 – 277.
5. *Fefferman C. L., Stein E. M.* H^p spaces of several variables // Acta Math. – 1972. – **129**. – P. 137 – 193.
6. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Communs Pure and Appl. Math. – 1961. – **14**, Issue 3. – P. 415 – 426.
7. *Korenovskii A. A.* Mean oscillations and equimeasurable rearrangements of functions // Lecture Notes Unione Mat. Ital. – 2007. – 189 p.
8. *Sbordone C.* Rearrangement of functions and reverse Jensen inequalities // Proc. Sympos. Pure Math. – 1986. – **45**, Pt II. – P. 325 – 329.
9. *Кореновский А. А.* О точном продолжении обратного неравенства Гельдера и условия Макенхаупта // Мат. заметки. – 1992. – **52**, вып. 6. – С. 32 – 44.
10. *Fiorenza A.* BMO regularity for one-dimensional minimizers of some Lagrange problems // J. Convex Anal. – 1997. – **4**, № 2. – P. 289 – 303.
11. *Shanin R.* Equimeasurable rearrangements of functions satisfying the reverse Hölder or the reverse Jensen inequality // Ric. Mat. – 2015. – **64**. – P. 217 – 228.
12. *Шанин Р. В.* Об обратных неравенствах Гельдера и Йенсена // Вiсн. Одес. нац. ун-ту. Математика, механiка. – 2012. – **17**, вип. 3(15). – С. 60 – 67.
13. *Korenovskyy A. A., Lerner A. K., Stokolos A. M.* On a multidimensional form of F. Riesz „rising sun” lemma // Proc. Amer. Math. Soc. – 2005. – **133**, № 5. – P. 1437 – 1440.

Получено 14.08.17