УДК 517.925

В. В. Евстафьева (Санкт-Петербург. гос. ун-т, Россия)

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГИСТЕРЕЗИСНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ НУЛЕВОГО СОБСТВЕННОГО ЧИСЛА

We study an n-order system of ordinary differential equations with a nonlinearity of nonideal-relay-type with hysteresis and an external periodic perturbations. We consider the existence of solutions with periods equal or multiple to the period of the external perturbation and two points of switching within period. The problem is solved in the case where the collection of simple real eigenvalues of the matrix of the system contains an eigenvalue equal to zero. By a nonsingular transformation, the system is reduced to a canonical system of a special form that enables us to perform its analysis by analytic methods. We propose an approach to finding the points of switching for the representation point of the periodic solution and to a choice of the parameters of the nonlinearity and the feedback vector. We prove a theorem on necessary conditions for the existence of the periodic solutions of the system. Sufficient conditions for the existence of the required solutions are established. We also perform an analysis of stability of the solutions by using the point mapping and the fixed-point method. We present an example that confirms the accumulated results.

Досліджується n-вимірна система звичайних диференціальних рівнянь із нелінійністю типу неідеального реле з гістерезисом і зовнішнім періодичним збуренням. Розглядається існування розв'язків із періодом, що дорівнює і є кратним періоду зовнішнього збурення та має дві точки перемикання за період. Задачу розв'язано у випадку, коли серед дійсних, простих власних чисел матриці системи одне є нульовим. Система неособливим перетворенням зводиться до канонічної системи спеціального вигляду, що дозволяє провести дослідження аналітичними методами. Викладено підхід до знаходження точок перемикання зображуваної точки періодичного розв'язку, а також до вибору параметрів нелінійності та вектора зворотного зв'язку. Доведено теорему про необхідні умови існування періодичних розв'язків системи. Встановлено достатні умови існування шуканих розв'язків. Проведено аналіз розв'язків на стійкість за допомогою точкового відображення та методу нерухомої точки. Наведено приклад, що підтверджує отримані результати.

Введение. Динамика систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, которые подвергаются внешним возмущениям, представляет несомненный интерес. История таких исследований началась давно [1]. В данной работе предлагается подход к изучению проблемы существования периодических решений в нелинейной полностью управляемой системе с нулевым собственным числом матрицы системы и непрерывным периодическим внешним возмущением, которое воздействует на объект управления. Математические модели таких объектов управления изучались рядом авторов (см., например, работы [2 – 4]). В статье [4] исследовались устойчивые режимы в релейных системах, предложен алгоритм расчета вынужденных колебательных режимов в системах с нелинейностью типа неидеальное реле и получены условия существования устойчивых периодических режимов. В последние годы продолжается изучение и задач управления системами с разрывными нелинейностями [5], и обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными правыми частями [6 – 15].

В отличие от упомянутых выше работ в данной статье (и в статьях автора [16 – 21]) применяется иной подход, который основывается на канонических преобразованиях исходной системы, построении и решении вспомогательной трансцендентной системы. В отличие от работы [4], в которой устойчивые режимы в релейных системах изучались итеративными методами, здесь ослаблены ограничения на параметры системы и рассматриваются периодические решения не только с периодом, совпадающим с периодом внешнего возмущения, но и с кратным периодом. Воздействие непрерывного периодического внешнего возмущения изучалось автором в работах [16 – 20] для случая вещественных ненулевых собственных чисел матрицы системы и в работе [21] для случая комплексных корней характеристического уравнения системы. В работах [16, 17] рассмотрен вопрос существования периодических решений в случае, когда среди собственных чисел матрицы системы по крайней мере одно является положительным. В [16] доказана теорема о необходимых условиях существования периодических решений в системах указанного класса. В [17] сформулированы достаточные условия существования периодических решений в виде теоремы с доказательством. В [18] рассмотрен случай гурвицевой матрицы системы.

Данная работа является продолжением работ [16 – 18]. В ней исследуется случай, когда среди вещественных, простых собственных чисел матрицы одно является нулевым. Особенность этого случая состоит в каноническом преобразовании, которое отличается от преобразования для ненулевых собственных чисел матрицы, и в подходе к выбору элементов преобразованного вектора обратной связи.

1. Постановка задачи. В n-мерном евклидовом пространстве рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{Y} = AY + Bu(\sigma) + Kf(t), \quad \sigma = (C, Y), \tag{1}$$

где матрица A и векторы B, K, C являются вещественными и постоянными, Y — вектор состояний системы, $u(\sigma)$ описывает нелинейность типа неидеального гистерезисного реле с пороговыми числами ℓ_1, ℓ_2 и выходными числами m_1, m_2, функция $f(t)$ описывает внешнее возмущение.

Положим $\ell_1 < \ell_2$, $m_1 < m_2$. Функция $u(\sigma(t))$ определена для $t \geq 0$ в классе непрерывных функций и задается следующим образом: из неравенства $\sigma(t) \leq \ell_1$ следует равенство $u(\sigma) = m_1$, из неравенства $\sigma(t) \geq \ell_2$ — равенство $u(\sigma) = m_2$, а из неравенств $\ell_1 < \sigma(t) < \ell_2$ $(t_1 < t \leq t_2)$ — равенство $u(\sigma(t_1)) = u(\sigma(t_2))$. Это означает, что если $\ell_1 < \sigma(0) < \ell_2$, то $\sigma(t)$ соответствуют два значения функции $u(\sigma(t))$, а если $\sigma(0) \leq \ell_1$ или $\sigma(0) \geq \ell_2$, то одно [4].

Обход зоны неоднозначности (гистерезиса) выполняется против хода часовой стрелки на плоскости $(\sigma, u(\sigma))$. Отметим, что нелинейности такого типа довольно часто используются в прикладных задачах (см., например, работы [22 – 24]).

Внешнее воздействие на систему описывается функцией $f(t)$ вида

$$f(t) = f_0 + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + f_2 \sin(2\omega t + \varphi_2), \tag{2}$$

где f_0, f_1, f_2, φ_1, φ_2, ω — вещественные постоянные, причем f_0, f_1 и f_2 являются ненулевыми, φ_1 и φ_2 могут принимать нулевые значения, $\omega > 0$. Таким образом, функция вида (2) имеет период $T = 2\pi/\omega$ и представляет собой сумму ненулевой константы и двух гармоник.

Точкой переключения решения системы (1) в фазовом пространстве называется такое состояние системы, при котором функция σ принимает одно из пороговых чисел, а функция $u(\sigma)$ изменяет выходное число (происходит переключение реле).

В случае нулевого собственного числа матрицы системы рассматривается существование в системе (1) непрерывных периодических решений с двумя фиксированными в фазовом пространстве точками переключения и периодом, равным и кратным периоду функции внешнего возмущения. Решение данной задачи сводится к разрешимости системы трансцендентных уравнений в аналитическом виде относительно точек переключения и моментов времени переключения изображающей точки периодического решения. Второй момент времени переключения при этом совпадает с заданным периодом искомого решения системы. Общий подход к исследованию системы вида (1) и построение системы трансцендентных уравнений в общем виде представлены в работе [16].

2. Система трансцендентных уравнений. В соответствии с постановкой задачи период искомого решения системы равен kT, где k — фиксированное натуральное число. Зададим последовательность движения изображающей точки периодического решения системы (1). Пусть изображающая точка начинает свое движение в точке Y^1 на гиперплоскости $\sigma = \ell_1$ в момент времени $t_0 = 0$ и достигает точки Y^2 на гиперплоскости $\sigma = \ell_2$ в момент времени $t = t_1$ в силу правой части системы (1) при условии, что $u(\sigma) = m_1$. Затем она возвращается в точку Y^1 в момент времени $t = kT$ в силу системы (1) при условии, что $u(\sigma) = m_2$. Таким образом, согласно предписанной последовательности движения изображающей точки решения системы (1) имеем $Y(0) = Y(kT) = Y^1$, $Y(t_1) = Y^2$.

Для аналитического представления решения используем форму Коши. Тогда система трансцендентных уравнений относительно моментов времени переключения t_1, kT и точек переключения Y^1, Y^2 в общем виде такова:

$$\ell_1 = (C, Y^1), \qquad \ell_2 = (C, Y^2), \tag{3}$$

где

$$Y^2 = e^{At_1} Y^1 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} \big(Bm_1 + Kf(\tau)\big) d\tau,$$

$$Y^1 = e^{A(kT-t_1)} Y^2 + \int_{t_1}^{kT} e^{A(kT-\tau)} \big(Bm_2 + Kf(\tau)\big) d\tau.$$

Для получения аналитического решения системы (3) сначала приведем исходную систему к каноническому виду в случае, когда среди простых, вещественных собственных чисел λ_i, $i = \overline{1, n}$, матрицы A есть одно нулевое и система (1) полностью управляема по отношению ко входу $u(\sigma)$, т. е. векторы B, AB, $A^2B, \ldots,$ $A^{n-1}B$ являются линейно независимыми.

Пусть $\lambda_1 = 0$. К системе (1) применим преобразование [3]

$$y_i = -\frac{N_i(0)}{D_1(0)} x_1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{N_i(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)} x_j, \quad i = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Здесь y_i — элементы вектора Y, x_1, x_j — элементы преобразованного вектора состояний X системы, $D'(\lambda_j) = \left.\dfrac{dD(p)}{dp}\right|_{p=\lambda_j}$, $D(p) = pD_1(p)$, p — некоторый параметр, $N_i(\lambda_j) = \sum_{h=1}^{n} b_h D_{hi}(\lambda_j)$, b_h — элементы вектора B, D_{hi} — алгебраическое дополнение элемента a_{hi} матрицы A, λ_i — корни алгебраического уравнения $D(p) = \det\big[a_{hi} - \delta_{hi} p\big] = 0$, δ_{hi} — символ Кронекера.

Запишем систему (1) в каноническом виде

$$\dot{x}_1 = u(\sigma) + k_1^0 f(t),$$
$$\dot{x}_j = \lambda_j x_j + u(\sigma) + k_j^0 f(t), \quad j = \overline{2, n}, \tag{5}$$
$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i,$$

где коэффициенты γ_i вычисляются по формулам

$$\gamma_1 = -1/D_1(0) \sum_{i=1}^{n} c_i N_i(0), \qquad \gamma_j = -1/D'(\lambda_j) \sum_{i=1}^{n} c_i N_i(\lambda_j), \quad j = \overline{2, n}. \tag{6}$$

Здесь c_i — элементы вектора обратной связи C, γ_i — элементы преобразованного вектора обратной связи Γ.

Для упрощения системы трансцендентных уравнений (3) и приведения канонической системы n-го порядка к n независимым подсистемам 1-го порядка далее полагаем, что $(n-1)$ элементов γ_i, определяемых по формуле (6), равны нулю и только один элемент γ_i отличен от нуля. Индекс, при котором $\gamma_i \neq 0$, обозначим через s, т. е. $\gamma_s \neq 0$.

Случай 1. Пусть $\gamma_s \neq \gamma_1$. Точечное отображение, к примеру, гиперплоскости переключения $\sigma(t) = \ell_1$ в себя в силу решения системы (1) при внешнем возмущении (2) принимает вид

$$x_1(kT) = x_1^1 + \Theta_1(t_1, kT),$$
$$x_s(kT) = \ell_1/\gamma_s,$$
$$x_j(kT) = x_j^1 e^{\lambda_j kT} + \Theta_j(t_1, kT), \tag{7}$$
$$j = 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n,$$

где $x_1^1 = x_1(0)$, $x_j^1 = x_j(0)$ — координаты некоторой точки на гиперплоскости $\sigma(t) = \ell_1$. Константа $\Theta_1(t_1, kT)$ вычисляется по формуле

$$\Theta_1(t_1, kT) = \big(m_1 + k_1^0 f_0\big) t_1 + \big(m_2 + k_1^0 f_0\big)(kT - t_1) +$$
$$+ \frac{k_1^0 f_1}{\omega}\big(\cos\varphi_1 - \cos(\omega kT + \varphi_1)\big) + \frac{k_1^0 f_2}{2\omega}\big(\cos\varphi_2 - \cos(2\omega kT + \varphi_2)\big).$$

Константа $\Theta_j(t_1, kT)$ определяется выражением

$$\Theta_j(t_1, kT) = e^{\lambda_j kT} \left\{ \frac{m_1 + k_j^0 f_0}{\lambda_j} + \frac{k_j^0 f_1}{\lambda_j^2 + \omega^2}(\lambda_j \sin\varphi_1 + \omega\cos\varphi_1) + \right.$$
$$\left. + \frac{k_j^0 f_2}{\lambda_j^2 + 4\omega^2}(\lambda_j \sin\varphi_2 + 2\omega\cos\varphi_2) \right\} - e^{\lambda_j(kT - t_1)} \left[\frac{m_2 - m_1}{\lambda_j} \right] -$$
$$- \frac{m_2 + k_j^0 f_0}{\lambda_j} - \frac{k_j^0 f_1}{\lambda_j^2 + \omega^2}\big(\lambda_j \sin(\omega kT + \varphi_1) + \omega\cos(\omega T_B + \varphi_1)\big) -$$

$$-\frac{k_j^0 f_2}{\lambda_j^2+4\omega^2}\big(\lambda_j \sin(2\omega kT+\varphi_2)+2\omega\cos(2\omega kT+\varphi_2)\big). \tag{8}$$

Очевидно, что отображение (7) по первой координате x_1 не имеет неподвижной точки. Это означает, что нарушается условие периодичности решения по одной из координат. Следовательно, решение исходной системы не является периодическим при таком выборе ненулевого элемента вектора обратной связи.

Случай 2. Пусть $\gamma_s=\gamma_1$. В данном случае точечное отображение гиперплоскости переключения $\sigma(t)=\ell_1$ в себя принимает вид

$$x_1(kT)=\ell_1/\gamma_1, \qquad x_j(kT)=x_j^1 e^{\lambda_j kT}+\Theta_j(t_1,kT), \quad j=2,\ldots,n, \tag{9}$$

где константа $\Theta_j(t_1,kT)$ определяется по формуле (8). Отображение (9) имеет неподвижную точку, которая может быть вычислена при известных величинах $t_1,\ kT$. Существование неподвижной точки отображения (9) свидетельствует о существовании периодического решения системы (1). Поэтому при выборе элемента γ_s остановимся на случае 2. Итак, полагаем, что $\gamma_1\neq 0,\ \gamma_j=0,\ j=\overline{2,n}$.

Указанный выбор элементов преобразованного вектора обратной связи приводит к разделению системы трансцендентных уравнений (3) на систему уравнений относительно моментов времени переключения $t_1,\ kT$

$$\begin{gathered}
\ell_2=\ell_1+\gamma_1(m_1+k_1^0 f_0)t_1+\\
+\frac{\gamma_1 k_1^0 f_1}{\omega}\big[\cos\varphi_1-\cos(\omega t_1+\varphi_1)\big]+\frac{\gamma_1 k_1^0 f_2}{2\omega}\big[\cos\varphi_2-\cos(2\omega t_1+\varphi_2)\big],\\
\ell_1=\ell_2+\gamma_1(m_2+k_1^0 f_0)(kT-t_1)+\\
+\frac{\gamma_1 k_1^0 f_1}{\omega}\big[\cos(\omega t_1+\varphi_1)-\cos(\omega kT+\varphi_1)\big]+\\
+\frac{\gamma_1 k_1^0 f_2}{2\omega}\big[\cos(2\omega t_1+\varphi_2)-\cos(2\omega kT+\varphi_2)\big]
\end{gathered} \tag{10}$$

и формулы для вычисления точек переключения канонической системы $X^1=\big(x_1^1,\ldots,x_n^1\big)$, $X^2=\big(x_1^2,\ldots,x_n^2\big)$, которые принадлежат гиперплоскостям переключения $\sigma=\ell_\beta,\ \beta=1,2$:

$$x_1^1=\ell_1/\gamma_1, \qquad x_1^2=\ell_2/\gamma_1,$$

$$\begin{gathered}
x_j^1=\big(1-e^{\lambda_j kT}\big)^{-1}\left\{e^{\lambda_j kT}\left[m_1\int\limits_0^{t_1}e^{-\lambda_j\tau}d\tau+m_2\int\limits_{t_1}^{kT}e^{-\lambda_j\tau}d\tau+\right.\right.\\
\left.\left.+k_j^0 f_0\int\limits_0^{kT}e^{-\lambda_j\tau}d\tau+k_j^0 f_1\int\limits_0^{kT}e^{-\lambda_j\tau}\sin(\omega\tau+\varphi_1)d\tau+k_j^0 f_2\int\limits_0^{kT}e^{-\lambda_j\tau}\sin(2\omega\tau+\varphi_2)d\tau\right]\right\},
\end{gathered} \tag{11}$$

$$x_j^2=\big(1-e^{\lambda_j kT}\big)^{-1}e^{\lambda_j t_1}\left\{\int\limits_{t_1}^{kT}e^{-\lambda_j(kT-\tau)}\Big[m_2+\right.$$

$$+k_j^0\big(f_0+f_1\sin(\omega t+\varphi_1)+f_2\sin(2\omega t+\varphi_2)\big)\Big]d\tau+$$

$$\left.+\int\limits_0^{t_1} e^{-\lambda_j\tau}\Big[m_1+k_j^0\big(f_0+f_1\sin(\omega t+\varphi_1)+f_2\sin(2\omega t+\varphi_2)\big)\Big]d\tau\right\},\quad j=2,\ldots,n.$$

3. Основные результаты. Основными результатами работы являются теоремы 1 – 3.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(t)$ *имеет вид* (2). *Пусть система* (1) *имеет периодическое решение с рассматриваемыми свойствами и неособым преобразованием* (4) *приведена к виду* (5) *при условии, что полностью управляема по отношению ко входу* $u(\sigma)$, *и среди простых, вещественных собственных чисел матрицы* A *есть одно* (*например*, λ_1) *нулевое. Пусть только один элемент* γ_1 *преобразованного вектора обратной связи отличен от нуля и имеют место следующие условия*:

1) *выполняются неравенства* $m_1 < -k_1^0 f_0 < m_2$, $G > 0$, *где*

$$G=\frac{\gamma_1(m_1+k_1^0f_0)(m_2+k_1^0f_0)}{m_2-m_1}kT+$$

$$+\frac{\gamma_1k_1^0f_1}{\omega}\left[\cos\varphi_1-\cos\left(\frac{\omega kT(m_2+k_1^0f_0)}{m_2-m_1}+\varphi_1\right)\right]+$$

$$+\frac{\gamma_1k_1^0f_2}{2\omega}\left[\cos\varphi_2-\cos\left(\frac{2\omega kT(m_2+k_1^0f_0)}{m_2-m_1}+\varphi_2\right)\right],$$

2) *справедливо равенство* $\ell_2=\ell_1+G$.

Тогда система (10) *при заданном натуральном* k *имеет единственное решение* $t_1\in(0,kT)$, *которое определяется по формуле*

$$t_1=\frac{kT\left(m_2+k_1^0f_0\right)}{m_2-m_1}. \tag{12}$$

Доказательство. По условию теоремы 1 система (1) приведена неособым преобразованием к виду (5). Это означает, что выполняются условия обратимости, и результаты, полученные для канонической системы, можно распространить и на исходную систему, используя обратное преобразование. Система (1) имеет периодическое решение с рассматриваемыми свойствами (с двумя точками переключения на гиперплоскостях переключения и периодом kT, изображающая точка движется в предписанной ей последовательности). Следовательно, можно построить систему трансцендентных уравнений относительно точек переключения и соответствующих им моментов времени переключения изображающей точки решения. Условия ее разрешимости являются необходимыми условиями существования периодического решения с заданными свойствами. При указанном выборе элементов вектора обратной связи (только один элемент $\gamma_1\neq 0$) и в случае, когда матрица системы среди простых, вещественных собственных чисел имеет одно λ_1 нулевое, система трансцендентных уравнений (3) принимает вид (10), (11). По условию теоремы 1 периодическое решение системы (1) ищем с наперед заданным периодом, а именно, с равным или кратным периоду функции, описывающей внешнее возмущение. В этом случае система (10) зависит только от одной переменной t_1 и может быть аналитически разрешима относительно этой переменной при определенных условиях на ее параметры.

Подставив первое уравнение системы (10) во второе, после преобразования с учетом того, что $T = 2\pi/\omega$, получим формулу (12) для определения переменной t_1. Далее определим условия, при которых существует решение t_1. Поскольку переменная t_1 определена как первый момент времени переключения, то она, очевидно, должна принадлежать промежутку $(0, kT)$, где $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, по предположению $m_2 > m_1$, поэтому из формулы, определяющей переменную t_1, следует первое неравенство условия 1 теоремы 1. Второе неравенство условия 1 теоремы 1 следует из предположения, что $\ell_2 > \ell_1$. Решение t_1 является решением системы трансцендентных уравнений, если оно удовлетворяет первому уравнению системы (10). Отсюда следует условие 2 теоремы 1.

Теорема 1 доказана.

***Замечание* 1.** Система неравенств и равенств в условиях 1, 2 доказанной теоремы установлена строгими аналитическими выкладками с использованием равносильных переходов, поэтому представляется непротиворечивой. В связи с этим возможно построение примера существования решения t_1 системы трансцендентных уравнений (10) при фиксированном k. Действительно, например, пусть $f(t) = 1 + 18\sin\left(2t + \dfrac{\pi}{3}\right) + 15\sin(4t)$, тогда $T = \pi$. При $k = 2$ период искомого решения системы (1) равен $kT = 2\pi$. При $\lambda_1 = 0$ выбираем $\gamma_1 = 0{,}1$. Упомянутая система неравенств и равенств в условиях теоремы 1 справедлива при $m_1 = -6$, $m_2 = 5$, $\ell_1 = -1$, $k_1^0 = 2$. При этом $G = 2,44 > 0$, $\ell_2 = 1{,}44$. Тогда система (10) имеет единственное решение $t_1 = 1{,}71$ из промежутка $(0, 2\pi)$.

***Замечание* 2.** В теореме 1 сформулированы необходимые условия существования периодического решения канонической системы уравнений, а в силу неособого преобразования — исходной системы. Кроме того, для искомого периодического решения определен момент времени первого переключения t_1 при заданном периоде kT. Точки переключения $Y^1 = \left(y_1^1, \ldots, y_n^1\right)$, $Y^2 = \left(y_1^2, \ldots, y_n^2\right)$ вычисляются в силу преобразования (4) по формулам

$$\begin{gathered} y_i^1 = -\frac{N_i(0)}{D_1(0)} x_1^1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{N_i(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)} x_j^1, \\ y_i^2 = -\frac{N_i(0)}{D_1(0)} x_2^1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{N_i(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)} x_j^2, \\ i = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{13}$$

Сформулируем утверждение о существовании единственного kT-периодического решения системы (1) при фиксированном $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *внешнее возмущение $f(t)$ системы* (1) *является T-периодической функцией вида* (2), *где* $T = 2\pi/\omega$, $\omega > 0$;

2) *имеют место неравенства* $-(C, A^{-1}Bm_2) < \ell_1$, $-(C, A^{-1}Bm_1) > \ell_2$;

3) *система* (1) *неособым преобразованием* (4) *приведена к каноническому виду* (5), *если выполняется неравенство* $\det\|B, AB, \ldots, A^{n-1}B\| \neq 0$, *и среди простых*, *вещественных собственных чисел матрицы A есть нулевое*, *пусть* $\lambda_1 = 0$, *остальные собственные числа* $\lambda_j \neq 0$, *где* $j = \overline{2, n}$;

4) $\sum_{i=1}^{n} c_i N_i(\lambda_j) = 0$, $j = \overline{2,n}$, $\sum_{i=1}^{n} c_i N_i(0) \neq 0$, *где* c_i — *элементы вектора обратной связи* C, N_i — *определитель матрицы* A, *в которой элементы* i*-го столбца заменены элементами вектора* B;

5) (t_1, kT, X^1, X^2) — *решение системы трансцендентных уравнений* (10), (11), *построенной на предположении существования хотя бы одного* kT*-периодического решения с двумя точками переключения за период, параметры которой удовлетворяют условиям ее разрешимости* (*теореме* 1) *при фиксированном* $k \in \mathbb{N}$, *где* t_1 *и* kT — *первый и второй моменты времени переключения соответственно*, X^1, X^2 — *точки переключения изображающей точки решения канонической системы.*

Тогда существует единственное kT*-периодическое решение системы* (1) *с двумя точками переключения* Y^1, Y^2 *за период, которые принадлежат гиперплоскостям вида* $(C, Y) = \ell_\beta$, $\beta = 1, 2$, *и определяются по формулам* (13).

Доказательство для случая нулевого собственного числа матрицы проводится аналогично доказательству теоремы 1 из [17] для случая ненулевых собственных чисел матрицы A.

Далее рассмотрим условия, при которых изображающая точка решения преобразованной системы (5) достигает гиперплоскости переключения без касания во избежание режима „скольжения" в точках переключения.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 2 *и дополнительно собственные числа* λ_j, $j = \overline{2,n}$, *являются отрицательными. Кроме того, пусть имеют место следующие условия*:

1) *при* $m_1 < 0$, $m_2 > 0$ *выполняются неравенства* $-\gamma_1 m_2 < 0$, $-\gamma_1 m_1 > 0$;

2) $m_1 \neq -k_1^0 f(t_\eta)$, $m_2 \neq -k_1^0 f(t_\eta)$, $\eta = 1, 2$, *где* t_1 — *момент времени первого переключения*, $t_2 = 0$;

3) *множество* Q *описывается системой неравенств*

$$\|\bar{X}\| \leq \frac{1}{\min\limits_j |\lambda_j|} \left[\max_{\alpha=1,\,2} |m_\alpha| \left\|\bar{B}_0\right\| + M \left\|\bar{K}_0\right\| \right], \quad j = \overline{2,n},$$

$$\ell_1 \leq x_1 \gamma_1 \leq \ell_2,$$

где векторы $\bar{X}$, $\bar{B}_0$, $\bar{K}_0$ *размерности* $n-1$ *отличаются от векторов канонической системы* X, B_0, K_0 *тем, что в них исключен* 1*-й элемент, а постоянная* M *определяется из неравенства* $\left|f(t)\right| \leq |f_0| + |f_1| + |f_2| = M$, *справедливого для любого* t, *при этом* f_0, f_1, f_2 *являются постоянными коэффициентами функции* $f(t)$.

Тогда в фазовом пространстве изображающая точка периодического решения канонической системы (5), *начиная свое движение в* $X_0 \in Q$ *на одной из гиперплоскостей вида* $\sigma(t) = \ell_\beta$, $\beta = 1, 2$, *достигает второй гиперплоскости без касания в силу системы* (5).

Доказательство. Данная теорема обобщает результаты, полученные в [18], поэтому при ее доказательстве частично используются рассуждения, приведенные в упомянутой работе.

По предположению изображающая точка решения канонической системы (5) начинает свое движение из точки на гиперплоскости переключения и перемещается в предписанной ей последовательности между двумя гиперплоскостями переключения вдоль оси координат Ox_1 при условии 4 теоремы 2, при этом гиперплоскости в фазовом пространстве расположены ортогонально оси Ox_1.

Каноническую систему вида (5) представим в виде двух систем

$$\sigma(t) = \gamma_1 x_1,$$

$$\dot{x}_1 = m_\alpha + k_1^0 f(t), \quad \alpha = 1, 2,$$

и

$$\dot{\bar{X}} = \bar{A}_0\bar{X} + \bar{B}_0 m_\alpha + \bar{K}_0 f(t),$$

где $\bar{A}_0$ — матрица, на диагонали которой расположены собственные числа λ_j, $j = \overline{2, n}$, остальные элементы нулевые, $\bar{X} = (x_2, \ldots, x_n)^*$, $\bar{B}_0 = (b_2^0, \ldots, b_n^0)^* = (1, \ldots, 1)^*$, $\bar{K}_0 = (k_2^0, \ldots, k_n^0)^*$. Символ $*$ означает транспонирование.

По условию теоремы 3 собственные числа $\lambda_j < 0$. В фазовом пространстве системы (5) с помощью функций Ляпунова на гиперплоскостях переключения можно выделить ограниченное, замкнутое и выпуклое множество, которое отображается в себя в силу решения канонической системы. Поскольку нулевое решение системы $\dot{\bar{X}} = \bar{A}_0\bar{X}$ является асимптотически устойчивым, то существует положительно определенная квадратичная форма $V(\bar{X}) = \bar{X}^* V \bar{X}$. Уравнение вида $V(\bar{X}) = C_\nu$ описывает цилиндрические поверхности в n-мерном фазовом пространстве канонической системы, где C_ν — постоянные, $\nu \in \mathbb{N}$.

Для пересечения области притяжения $V(\bar{X}) \leq \min\limits_{\nu} C_\nu$ с гиперплоскостями переключения вида $(\Gamma, X) = \ell_\beta$, $\beta = 1, 2$, необходимо, чтобы при отсутствии внешнего возмущения, когда $f(t) = 0$, виртуальные точки устойчивости располагались вне гистерезиса, что обеспечивает выполнение условия 2 теоремы 2. В переменных канонической системы последнее условие принимает вид

$$-(\Gamma, A_0^{-1} B_0 m_2) < \ell_1, \qquad -(\Gamma, A_0^{-1} B_0 m_1) > \ell_2. \tag{14}$$

Согласно условию 4 теоремы 2 $n - 1$ элемент γ_j, $j \neq 1$, вектора Γ равны нулю. В случае такого выбора элементов вектора Γ неравенства (14) при $\lambda_1 = 0$ принимают упрощенный вид

$$-\gamma_1 m_2 < 0, \qquad -\gamma_1 m_1 > 0. \tag{15}$$

Система неравенств (15) выполняется, если $\gamma_1 > 0$, при этом $m_1 < 0$, $m_2 > 0$. Нетрудно видеть, что при $\gamma_1 < 0$ условия $m_1 > 0$, $m_2 < 0$ противоречат предположению $m_1 < m_2$. Отсюда следует условие 1 теоремы 3, необходимое для существования выпуклого компактного множества Q, которое является пересечением области притяжения с гиперплоскостями переключения. Данное множество описывает условие 3 теоремы 3. Если начальная точка решения принадлежит области Q, то траектория его изображающей точки в силу канонической системы (5) не выйдет из этой области фазового пространства.

Из вышеизложенного следует утверждение, что изображающая точка решения системы (5), начиная свое движение в $X_0 \in Q$ на одной из гиперплоскостей вида $\sigma(t) = \ell_\beta$, $\beta = 1, 2$, достигает за конечный промежуток времени другой гиперплоскости.

Неравенство $(\Gamma, \dot{X}) \neq 0$ означает условие, при котором изображающая точка решения системы (5) достигает гиперплоскости без касания в точках переключения $X = X^\beta$ в соответствующие моменты времени t_η, $\eta = 1, 2$, где t_1 — момент времени первого переключения, $t_2 = kT$ — момент времени второго переключения. Существование и единственность t_1 при заданном $k \in \mathbb{N}$ гарантируют условия теоремы 1.

Условие достижимости без касания гиперплоскостей переключения в точках переключения в частном случае, когда $\lambda_1 = 0$, и при условии 4 теоремы 2 принимает вид условий 2 теоремы 3. Поскольку функция $f(t)$ является T-периодической, то ее значение в момент времени второго переключения kT совпадает со значением в нуле. Поэтому в условии 2 теоремы 3 для простоты используем $t_2 = 0$.

Теорема 3 доказана.

Важно, чтобы при малых изменениях начальных условий решение сохраняло характер своего поведения при $t \to \infty$, т. е. было устойчивым. Ниже доказана асимптотически орбитальная устойчивость искомых решений.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда имеют место следующие утверждения*:

1) kT*-периодическое решение системы* (5) *с двумя точками переключения* X^β *на гиперплоскостях вида* $(\Gamma, X) = \ell_\beta$, *где* $\beta = 1, 2$, *является асимптотически устойчивым*;

2) kT*-периодическое решение системы* (1) *с двумя точками переключения* Y^β *на гиперплоскостях вида* $(C, Y) = \ell_\beta$ *является асимптотически орбитально устойчивым.*

Доказательство следствия для случая нулевого $\lambda_s = \lambda_1$ проводится аналогично доказательству следствия к теореме 3.3, приведенного в [18] для случая отрицательного λ_s, поскольку значение собственного числа λ_s не влияет на ход рассуждений. Однако здесь при доказательстве приведены дополнительные пояснения.

В условиях выбора элементов вектора обратной связи, когда один элемент $\gamma_1 \neq 0$, а остальные $n-1$ равны нулю (условие 4 теоремы 2), гиперплоскости переключения в координатах x_i, $i = \overline{1, n}$, ориентируются ортогонально оси Ox_1.

В плоскости (x_1, x_j) время перехода изображающей точки решения канонической системы с одной прямой переключения на другую является постоянной величиной и не зависит от выбора начального положения изображающей точки на прямой вида $\sigma = \ell_\beta$, $\beta = 1, 2$, в момент времени $t_0 = 0$. Равенство (9) определяет точечное отображение одной из прямой переключения в себя, при этом его неподвижная точка совпадает с точкой переключения решения.

Положим начальными при $t_0 = 0$ точку переключения $X^1 = (\ell_1/\gamma_1, x_j^1)$ на прямой $\sigma = \ell_1$ и некоторую точку $\tilde{X}^1 = (\ell_1/\gamma_1, \tilde{x}_j^1)$ из окрестности точки X^1 на этой же прямой. Пусть $\left|\tilde{x}_j^1 - x_j^1\right| = \delta$, где $\delta > 0$. Тогда имеем

$$\left|x_j\left(kT, \tilde{x}_j^1, m_\alpha\right) - x_j\left(kT, x_j^1, m_\alpha\right)\right| = e^{\lambda_j kT}\left|\tilde{x}_j^1 - x_j^1\right| = e^{\lambda_j kT}\delta.$$

По условию теоремы 3 $\lambda_j < 0$. Отсюда очевидно, что $e^{\lambda_j kT} < 1$. Отображение (9) является сжимающим по каждой j-й координате $(j = 2, \ldots, n)$, и неподвижная точка данного отображения является асимптотически устойчивой, так как $e^{\lambda_j t}\delta \to 0$ при $t \to \infty$. Из асимптотической устойчивости неподвижной точки отображения при выполнении условий теоремы 3 (достижимость изображающей точки решения гиперплоскостей переключения без касания) следует асимптотическая устойчивость периодического решения канонической системы в результате ортогонального расположения гиперплоскостей переключения относительно оси Ox_1. Первое утверждение следствия доказано.

В силу неособого преобразования kT-периодическое решение канонической системы (5) с рассматриваемыми свойствами является kT-периодическим решением с теми же свойствами и для исходной системы (1).

В общем случае время перехода изображающей точки решения с одной гиперплоскости переключения на другую не является постоянной величиной и зависит от начального положения изображающей точки на гиперплоскости переключения. Поэтому в исходной системе (1) невозможно гарантировать близость решений по времени, но можно по фазовым координатам. Отсюда следует второе утверждение следствия.

Следствие доказано.

***Замечание* 3.** Асимптотически устойчивое по Ляпунову периодическое решение преобразованной системы (5) является асимптотически орбитально устойчивым решением исходной системы (1). Отметим, что если хотя бы одно собственное число $\lambda_j,\ j = 2, \ldots, n,$ является положительным, то неподвижная точка отображения (9) существует, но является неустойчивой. В этом случае каноническая система и, следовательно, исходная система имеют неустойчивое kT-периодическое решение.

4. Пример. Пусть с помощью преобразования (4) исходная система приведена к каноническому виду

$$\dot{x}_1 = u(\sigma) + 2f(t),$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u(\sigma) + f(t),$$

$$\sigma = 0{,}1x_1.$$

Пусть $f(t) = 1 + 18\sin\left(2t + \dfrac{\pi}{3}\right) + 15\sin(4t)$. Период функции внешнего возмущения равен π. Рассмотрим вопрос существования периодических решений с периодом 2π, т. е. положим $k = 2$. Пусть параметры нелинейной функции $u(\sigma)$ принимают следующие значения: $m_1 = -6,\ m_2 = 5,\ \ell_1 = -1,\ \ell_2 = 1{,}44,$ удовлетворяющие условиям теоремы 1. Тогда согласно теореме 1 система трансцендентных уравнений (10) имеет единственное решение $t_1 = 1{,}71$. Точки переключения, рассчитанные по формулам (11), имеют следующие значения:

$$X^1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 1{,}89 \end{pmatrix}, \qquad X^2 = \begin{pmatrix} 14{,}4 \\ -284{,}02 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\lambda_2 = -1$. На основании теоремы 3 и следствия к ней в преобразованной системе существует единственное асимптотически устойчивое 2π-периодическое решение с двумя точками переключения $X^1,\ X^2$ за период, а в силу неособого преобразования в исходной системе существует единственное асимптотически орбитально устойчивое 2π-периодическое решение также с двумя точками переключения за период, причем момент первого переключения $t_1 = 1{,}71$.

Литература

1. *Minagawa S.* A proposal of a new method of phase analysis of on-off control systems with relation to sinusoidal input // Bull. JSME. – 1961. – **4**, № 16. – P. 650 – 657.
2. *Зубов В. И.* Колебания в нелинейных и управляемых системах. – Л.: Судпромгиз, 1962.
3. *Нелепин Р. А.* Точные аналитические методы в теории нелинейных автоматических систем. – Л.: Судостроение, 1967.
4. *Покровский А. В.* Существование и расчет устойчивых режимов в релейных системах // Автоматика и телемеханика. – 1986. – № 4. – С. 16 – 23.
5. *Потапов Д. К.* Оптимальное управление распределенными системами эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2013. – № 2. – С. 19 – 24.
6. *Нижник И. Л., Краснеева А. А.* Периодические решения дифференциальных уравнений второго порядка с разрывной нелинейностью // Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, № 3. – С. 381 – 389.

7. *Jacquemard A., Teixeira M. A.* Periodic solutions of a class of non-autonomous second order differential equations with discontinuous right-hand side // Phys. D. – 2012. – **241**, № 22. – P. 2003 – 2009.
8. *Потапов Д. К.* Задача Штурма – Лиувилля с разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. – 2014. – **50**, № 9. – С. 1284 – 1286.
9. *Llibre J., Teixeira M. A.* Periodic solutions of discontinuous second order differential systems // J. Singul. – 2014. – **10**. – P. 183 – 190.
10. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Solution to second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. J. Different. Equat. – 2014. – № 221. – P. 1 – 6.
11. *Потапов Д. К.* Существование решений, оценки дифференциального оператора и „разделяющее" множество в краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка с разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. – 2015. – **51**, № 7. – С. 970 – 974.
12. *Самойленко А. М., Нижник И. Л.* Дифференциальные уравнения с биустойчивой нелинейностью // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 4. – С. 517 – 554.
13. *Bonanno G., D'Agui G., Winkert P.* Sturm – Liouville equations involving discontinuous nonlinearities // Minimax Theory and Appl. – 2016. – **1**, № 1. – P. 125 – 143.
14. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Non-existence of periodic solutions to non-autonomous second-order differential equation with discontinuous nonlinearity // Electron. J. Different. Equat. – 2016. – № 04. – P. 1 – 8.
15. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Existence of solutions for second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. J. Different. Equat. – 2016. – № 124. – P. 1 – 9.
16. *Евстафьева В. В.* О необходимых условиях существования периодических решений в динамической системе с разрывной нелинейностью и внешним периодическим воздействием // Уфим. мат. журн. – 2011. – **3**, № 2. – С. 20 – 27.
17. *Yevstafyeva V. V.* Existence of a unique kT-periodic solution for one class of nonlinear systems // J. Sib. Fed. Univ. Math. and Phys. – 2013. – **6**, № 1. – P. 136 – 142.
18. *Евстафьева В. В.* Об условиях существования двухточечно-колебательного периодического решения в неавтономной релейной системе с гурвицевой матрицей // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 6. – С. 42 – 56.
19. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence // Electron. J. Different. Equat. – 2017. – № 140. – P. 1 – 10.
20. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity // J. Dyn. Control Syst. – 2017. – **23**, № 4. – P. 825 – 837.
21. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence // Int. J. Robust Nonlinear Contr. – 2017. – **27**, № 2. – P. 204 – 211.
22. *Macki J. W., Nistri P., Zecca P.* Mathematical models for hysteresis // SIAM Rev. – 1993. – **35**, № 1. – P. 94 – 123.
23. *Mayergoyz I. D.* Mathematical models of hysteresis and their applications. – Amsterdam: Elsevier, 2003.
24. *Visintin A.* Ten issues about hysteresis // Acta Appl. Math. – 2014. – **132**, № 1. – P. 635 – 647.

Получено 28.06.16,
после доработки — 25.05.18