УДК 517.5

О. Карлова (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича),
В. Михайлюк (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, Ун-т ім. Я. Кохановського в Кельцах, Польща)

ВЕРХНІЙ ТА НИЖНІЙ КЛАСИ ЛЕБЕГА БАГАТОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ДВОХ ЗМІННИХ

We introduce a functional Lebesgue classification of multivalued mappings and obtain results on upper and lower Lebesgue classifications of multivalued mappings $F\colon X \times Y \multimap Z$ for wide classes of spaces X, Y and Z.

Введено функціональні класи Лебега багатозначних відображень і отримано результати про верхню та нижню лебегівські класифікації багатозначних відображень $F\colon X \times Y \multimap Z$ для широких класів просторів X, Y і Z.

1. Вступ. Дослідження лебегівської класифікації нарізно неперервних однозначних функцій (тобто функцій декількох змінних, які неперервні відносно кожної змінної) та їх аналогів розпочали Лебег [9] та Куратовський [6]. Ці дослідження були продовжені у працях багатьох математиків (див., наприклад, [1, 2, 4, 7, 10, 12] і наведену там бібліографію).

Деякі аналоги класифікації Лебега відомі також і для багатозначних відображень та пов'язані з напівнеперервністю зверху і знизу. А саме, багатозначне відображення $F\colon X \multimap [0,1]$, визначене на топологічному просторі X, називається *напівнеперервним зверху* (*знизу*) *в точці* $x_0 \in X$, якщо для кожної відкритої множини $U \subseteq [0,1]$ із властивістю $F(x_0) \subseteq U$ ($F(x_0) \cap U \neq \varnothing$) множина

$$F^+(U) = \{x \in X : F(x) \subseteq U\}$$

$$\big(F^-(U) = \{x \in X : F(x) \cap U \neq \varnothing\}\big)$$

є околом точки x_0 в X. Багатозначне відображення $F\colon X \multimap [0,1]$ є *неперервним у точці* $x_0 \in \in X$, якщо воно одночасно напівнеперервне зверху і знизу в точці x_0. Відомо, що багатозначне відображення $F\colon X \multimap [0,1]$ неперервне в точці $x_0 \in X$ тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці x_0 як однозначне відображення зі значеннями у просторі всіх непорожніх підмножин відрізка $[0,1]$ з топологією В'єторіса.

Для топологічних просторів X та Y символами $\mathrm{U}(X,Y)$ $(\mathrm{L}(X,Y))$ будемо позначати сукупність усіх напівнеперервних зверху (знизу) багатозначних відображень $F\colon X \multimap Y$.

Нехай X та Y — топологічні простори і $\alpha < \omega_1$. Багатозначне відображення $F\colon X \multimap Y$ належить до

α-го верхнього класу Лебега, якщо для довільної відкритої множини $A \subseteq Y$ множина $F^+(A)$ належить до α-го адитивного класу в X;

α-го нижнього класу Лебега, якщо для довільної відкритої множини $A \subseteq Y$ множина $F^-(A)$ належить до α-го адитивного класу в X.

Зауважимо, що класи Лебега також називають класами Бореля.

Для топологічних просторів X та Y сукупність усіх багатозначних відображень $F\colon X \multimap Y$ верхнього (нижнього) лебегівського класу α ми позначатимемо через $\mathrm{U}_\alpha(X,Y)$ $\big(\mathrm{L}_\alpha(X,Y)\big)$.

Для багатозначного відображення $F\colon X \times Y \multimap Z$, точок $x \in X$ та $y \in Y$ ми позначаємо $F^x(y) = F_y(x) = F(x,y)$.

Нагадаємо, що топологічний простір називається *досконалим*, якщо кожна його замкнена множина є типу G_δ.

Квєціньська [8] отримала наступний результат про лебегівську класифікацію багатозначних відображень двох змінних.

Теорема 1.1 [8]. *Нехай* (X, d) *— метричний простір,* $\mathcal{T}$ *— топологія на просторі* X, $D \subseteq \subseteq X$ *— не більш ніж зліченна множина,* $(U(x) : x \in X)$ *— сім'я* $\mathcal{T}$*-відкритих множин* $U(x) \subseteq \subseteq X$, Y *і* Z *— досконало нормальні простори,* $\alpha < \omega_1$ *і* $F : X \times Y \multimap Z$ *— компактнозначне* (*багатозначне*) *відображення з такими властивостями*:

(a) *множина* D *щільна в* $(X, \mathcal{T})$;

(b) *для кожного* $x \in D$ *множина* $A(x) = \{u \in X : x \in U(u)\}$ *належить до адитивного класу* α *в* (X, d);

(c) *для кожного* $x \in X$ *послідовність* $(B_n(x))_{n \in \omega}$ *множин*

$$B_n(x) = U(x) \cap \left\{u \in X : d(x, u) < \frac{1}{n}\right\}$$

утворює базу простору $(X, \mathcal{T})$ *у точці* x;

(d) *для кожного* $y \in Y$ *багатозначне відображення* $F_y : (X, \mathcal{T}) \multimap Z$ *є неперервним*;

(e) *для кожного* $x \in D$ *багатозначне відображення* $F^x : Y \multimap Z$ *належить до нижнього* (*верхнього*) *класу* α.

Тоді F *є відображенням верхнього* (*нижнього*) *класу* $\alpha + 1$ *Лебега на добутку* $(X, d) \times Y$.

Інші різновиди лебегівської класифікації багатозначних відображень двох змінних було отримано в [5]. Наступний результат для досконало нормального простору Y випливає з теореми 1.1.

Теорема 1.2 [5]. *Нехай* X *— метризовний простір,* D *— щільна підмножина простору* X, Y *— досконалий простір,* Z *— досконало нормальний простір,* $\alpha < \omega_1$ *і* $F : X \times Y \multimap Z$ *— компактнозначне* (*багатозначне*) *відображення з такими властивостями*:

(a) *для кожного* $y \in Y$ *багатозначне відображення* $F_y : X \multimap Z$ *є неперервним*;

(b) *для кожного* $x \in D$ *багатозначне відображення* $F^x : Y \multimap Z$ *належить до нижнього* (*верхнього*) *класу* α *Лебега.*

Тоді F *належить до верхнього* (*нижнього*) *класу* $\alpha + 1$ *Лебега на добутку* $X \times Y$.

У цій статті ми вводимо функціональні класи Лебега для багатозначних відображень і узагальнюємо теореми 1.1 та 1.2 для широкого класу топологічних просторів X.

2. Багатозначні відображення верхнього та нижнього функціонального класу α Лебега.

Означення 2.1. *Нехай* X *та* Y *— топологічні простори. Багатозначне відображення* $F : X \multimap Y$ *називається*

функціонально напівнеперервним зверху (*знизу*), *якщо множина* $F^+(A)$ $(F^-(A))$ *є функціонально відкритою в* X *для довільної функціонально відкритої множини* $A \subseteq Y$;

сильно функціонально напівнеперервним зверху (*знизу*), *якщо множина* $F^+(A)$ $(F^-(A))$ *є функціонально відкритою в* X *для довільної відкритої множини* $A \subseteq Y$;

слабко функціонально напівнеперервним зверху (*знизу*), *якщо множина* $F^+(A)$ $(F^-(A))$ *є відкритою в* X *для довільної функціонально відкритої множини* $A \subseteq Y$.

Сукупність усіх функціонально напівнеперервних зверху $\big($знизу, сильно зверху, сильно знизу, слабко зверху, слабко знизу) багатозначних відображень $F\colon X \multimap Y$ будемо позначати $\mathrm{U}^f(X)$ $(\mathrm{L}^f(X)$, $\mathrm{U}^f_s(X)$, $\mathrm{L}^f_s(X)$, $\mathrm{U}^f_w(X)$, $\mathrm{L}^f_w(X)\big)$.

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{A}_0(X)$ та $\mathcal{M}_0(X)$ — системи всіх функціонально відкритих та функціонально замкнених множин в X відповідно. Для довільного ординалу $\alpha \in [1, \omega_1)$ система всіх об'єднань $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ множин A_n з $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{M}_\alpha(X)$ позначається через $\mathcal{A}_\alpha(X)$, а система всіх перетинів $\bigcap_{n\in\omega} M_n$ множин M_n з $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{A}_\alpha(X)$ — через $\mathcal{M}_\alpha(X)$. Очевидно, що

$$\mathcal{A}_\alpha(X) = \big\{X \setminus M : M \in \mathcal{M}_\alpha(X)\big\}.$$

Означення 2.2. *Нехай X та Y — топологічні простори і $\alpha \in [0, \omega_1)$. Багатозначне відображення $F\colon X \multimap Y$ належить*

верхньому функціональному класу α Лебега, якщо $F^+(A) \in \mathcal{A}_\alpha(X)$ для довільної функціонально відкритої множини $A \subseteq Y$;

нижньому функціональному класу α Лебега, якщо $F^-(A) \in \mathcal{A}_\alpha(X)$ для довільної функціонально відкритої множини $A \subseteq Y$.

Легко бачити, що багатозначне відображення F належить верхньому (нижньому) функціональному класу α Лебега тоді і тільки тоді, коли $F^-(B) \in \mathcal{A}_\alpha(X)$ $\big(F^+(B) \in \mathcal{A}_\alpha(X)\big)$ для довільної функціонально замкненої множини $B \subseteq Y$.

Для топологічних просторів X та Y сукупність усіх багатозначних відображень $F\colon X \multimap Y$ верхнього (нижнього) функціонального класу α Лебега будемо позначати через $\mathrm{U}^f_\alpha(X)$ $\big(\mathrm{L}^f_\alpha(X)\big)$. Зауважимо, що $\mathrm{U}^f_0(X) = \mathrm{U}^f(X)$ і $\mathrm{L}^f_0(X) = \mathrm{L}^f(X)$.

Наведені нижче властивості легко випливають з означень, тому ми не будемо наводити їхнє доведення.

Твердження 2.1. *Нехай X та Y — топологічні простори, $F\colon X \multimap Y$ — багатозначне відображення і $\alpha \in [0, \omega_1)$. Тоді*:

1) $\mathrm{U}(X,Y) \cup \mathrm{U}^f(X,Y) \subseteq \mathrm{U}^f_w(X,Y)$ *і* $\mathrm{L}(X,Y) \cup \mathrm{L}^f(X,Y) \subseteq \mathrm{L}^f_w(X,Y)$;

2) $\mathrm{U}^f_s(X,Y) \subseteq \mathrm{U}(X,Y) \cap \mathrm{U}^f(X,Y)$ *і* $\mathrm{L}^f_s(X,Y) \subseteq \mathrm{L}(X,Y) \cap \mathrm{L}^f(X,Y)$;

3) *якщо простір X досконало нормальний, то* $\mathrm{U}^f_s(X,Y) = \mathrm{U}(X,Y) \subseteq \mathrm{U}^f(X,Y) = \mathrm{U}^f_w(X,Y)$ *і* $\mathrm{L}^f_s(X,Y) = \mathrm{L}(X,Y) \subseteq \mathrm{L}^f(X,Y) = \mathrm{L}^f_w(X,Y)$;

4) *Якщо простір Y цілком регулярний, то* $\mathrm{U}^f(X,Y) \subseteq \mathrm{U}(X,Y)$ *і* $\mathrm{L}^f(X,Y) \subseteq \mathrm{L}(X,Y)$;

5) *якщо простір Y досконало нормальний, то* $\mathrm{U}^f_s(X,Y) = \mathrm{U}^f(X,Y) \subseteq \mathrm{U}(X,Y) = \mathrm{U}^f_w(X,Y)$ *і* $\mathrm{L}^f_s(X,Y) = \mathrm{L}^f(X,Y) \subseteq \mathrm{L}(X,Y) = \mathrm{L}^f_w(X,Y)$;

6) $\mathrm{U}^f_\alpha(X,Y) \subseteq \mathrm{L}^f_{\alpha+1}(X,Y)$;

7) *якщо відображення F компактнозначне, то* $\mathrm{L}^f_\alpha(X,Y) \subseteq \mathrm{U}^f_{\alpha+1}(X,Y)$.

Твердження 2.2. *Нехай Y — такий топологічний простір, що $\{\varnothing, Y\}$ — сукупність усіх функціонально відкритих множин в Y* (*див., наприклад*, [3] (2.7.18)). *Тоді*:

1) *для довільного топологічного простору X кожне багатозначне відображення $F\colon X \multimap Y$ функціонально напівнеперервне зверху і знизу*;

2) *для довільного T_1-простору Z кожне сильно функціонально напівнеперервне зверху відображення $F\colon Y \multimap Z$ є сталим*;

3) *для довільного* (*цілком*) *регулярного простору Z кожне сильно функціонально напівнеперервне зверху* (*знизу*) *замкненозначне відображення $F\colon Y \multimap Z$ є сталим.*

Доведення. 1. Оскільки $F^+(\varnothing) = F^-(\varnothing) = \varnothing$ і $F^+(Y) = F^-(Y) = X$, то відображення $F\colon X \multimap Y$ функціонально напівнеперервне зверху і знизу.

2. Нехай Z — T_1-простір, $F\colon Y \multimap Z$ — не стале відображення. Виберемо такі точки $y_1, y_2 \in Y$, що $F(y_1) \not\subseteq F(y_2)$. Оскільки Y — T_1-простір, то існує відкрита множина $G \subseteq \subseteq Z$ така, що $F(y_1) \not\subseteq G \supseteq F(y_2)$. Тоді $y_1 \notin F^+(G) \ni y_2$. Таким чином, $F^+(G) \notin \{\varnothing, Y\}$ і $F^+(G)$ не є функціонально відкритою множиною. Отже, F не є сильно функціонально напівнеперервним зверху.

3. Нехай Z — регулярний простір, $F\colon Y \multimap Z$ — не стале відображення. Виберемо такі точки $y_1, y_2 \in Y$, що $F(y_1) \not\subseteq F(y_2)$. Оскільки простір Y регулярний і множина $F(y_2)$ замкнена, то існує відкрита множина $G \subseteq Z$ така, що $G \cap F(y_1) \neq \varnothing$ і $G \cap F(y_2) = \varnothing$. Тоді $y_1 \in F^-(G) \not\ni y_2$. Таким чином, $F^-(G) \notin \{\varnothing, Y\}$ і множина $F^-(G)$ не є функціонально відкритою. Отже, F не є сильно функціонально напівнеперервним знизу. У випадку, коли простір Z цілком регулярний, ми можемо вибрати функціонально відкриту множину G і переконатися, що відображення F не є функціонально напівнеперервним знизу.

***Приклад* 2.1.** Нехай $A \subseteq [0,1]$ — не вимірна за Борелем множина. Багатозначне відображення $F\colon [0,1] \multimap [0,1]$, що визначається правилом

$$F(x) = \begin{cases} [0,1], & x \in A, \\ [0,1), & x \in [0,1] \setminus A, \end{cases}$$

є (функціонально) напівнеперервним знизу, але (функціонально) не вимірним, тобто $F \notin \notin \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathrm{U}^f_\alpha([0,1],[0,1])$.

3. Функціональна класифікація Лебега багатозначних відображень двох змінних.

Лема 3.1 ([4], твердження 1.4). *Нехай X — топологічний простір, $\alpha \in [0,\omega_1)$, $(U_i : i \in \in I)$ — локально скінченна сім'я функціонально відкритих множин в X і $(A_i : i \in I)$ — сім'я множин $A_i \in \mathcal{A}_\alpha(X)$ $(A_i \in \mathcal{M}_\alpha(X))$ таких, що $A_i \subseteq U_i$ для кожного $i \in I$. Тоді $\bigcup_{i\in I} A_i \in \in \mathcal{A}_\alpha(X)$ $\big(\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{M}_\alpha(X)\big)$.*

Слід зазначити, що об'єднання локально скінченної сім'ї множин функціонального мультиплікативного класу α не обов'язково є множиною того ж класу навіть при $\alpha = 0$.

Справді, розглянемо площину Немицького $X = \mathbb{R}\times[0,+\infty)$, де базу околів точок $(x,y) \in X$ при $y > 0$ утворюють відкриті кулі з центром у точці (x,y), а базу околів точок вигляду $(x,0)$ — множини $U \cup \{(x,0)\}$, де U — відкрита куля, що дотикається до прямої $\mathbb{R}\times\{0\}$ у точці $(x,0)$.

Зауважимо, що для кожного $p \in X$ одноточкова множина $\{p\}$ функціонально замкнена в X, оскільки кожна неперервна функція на $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ неперервна на X. Тоді сім'я $\mathcal{F} = (\{(x,0)\} : x \in \mathbb{Q})$ складається з функціонально замкнених підмножин простору X. Припустимо, що об'єднання $F = \bigcup \mathcal{F}$ є функціонально замкненим в X, і виберемо таку неперервну функцію $f : X \to [0,1]$, що $F = f^{-1}(0)$. Для всіх $(x,y) \in X$ та $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$f_n(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & y \ge \dfrac{1}{n}, \\ f\left(x, \dfrac{1}{n}\right), & 0 \le y < \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Тоді функція $f_n\colon \mathbb{R}\times[0,+\infty) \to [0,1]$ неперервна і $\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y)$ для кожного $(x,y) \in X$. Оскільки $F = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty f_n^{-1}\left(\left[0,\dfrac{1}{k}\right)\right)$, то множина F є типу G_δ в $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$. Суперечність.

Означення 3.1. *Сім'я $(A_i : i \in I)$ підмножин A_i топологічного простору X називається функціонально локально скінченною в X, якщо існує локально скінченна в X сім'я $(U_i : i \in I)$ функціонально відкритих множин в X таких, що $U_i \supseteq A_i$ для кожного $i \in I$. Сім'я $(A_i : i \in I)$ підмножин A_i топологічного простору X називається σ-функціонально локально скінченною, якщо існує розбиття $I = \bigsqcup_{n\in\omega} I_n$ таке, що кожна сім'я $(A_i : i \in I_n)$ є функціонально локально скінченною в X.*

Теорема 3.1. *Нехай X, Y і Z — топологічні простори, $\alpha \in [0, \omega_1)$, $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність σ-функціонально локально скінченних покриттів $\mathcal{A}_n = (A_{i,n} : i \in I_n)$ простору X множинами $A_{i,n} \in \mathcal{A}_\alpha(X)$, $\big((x_{i,n} : i \in I_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність сімей точок $x_{i,n} \in X$ і $F\colon X \times Y \multimap Z$ — компактнозначне (багатозначне) відображення, яке задовольняє такі умови:*

1) *для всіх $(x, y) \in X \times Y$ і довільної послідовності $(i_n)_{n\in\omega}$ індексів $i_n \in I_n$ таких, що $x \in A_{i_n,n}$, послідовність $(F(x_{i_n,n}, y))_{n\in\omega}$ збігається до $F(x, y)$ в топології В'єторіса*;

2) *$F^x \in \mathrm{L}^f_\alpha(Y, Z)$ $\big(F^x \in \mathrm{U}^f_\alpha(Y, Z)\big)$ для кожного x із множини $D = \{x_{i,n} : n \in \mathbb{N}, i \in I_n\}$. Тоді $F \in \mathrm{U}^f_{\alpha+1}(X \times Y, Z)$ $\big(F \in \mathrm{L}^f_{\alpha+1}(X \times Y, Z)\big)$.*

Доведення. Розглянемо випадок, коли відображення F компактнозначне. Для всіх $n \in \omega$ та $i \in I_n$ покладемо $F_{i,n} = F^{x_{i,n}}$. Нехай $W \subseteq Z$ — функціонально замкнена множина і $\varphi\colon Z \to [0, 1]$ — така неперервна функція, що $W = \varphi^{-1}(0)$. Для кожного $n \in \omega$ позначимо $W_n = \varphi^{-1}\left(\left[0, \dfrac{1}{n}\right]\right)$ і $G_n = \varphi^{-1}\left(\left[0, \dfrac{1}{n}\right)\right)$. Для всіх $m, n \in \omega$ покладемо

$$C_{m,n} = \bigcup_{i\in I_n} \Big(A_{i,n} \times F^-_{i,n}(G_m)\Big) \qquad \text{і} \qquad C = \bigcap_{m\in\omega} \bigcup_{n\geq m} C_{n,m}.$$

Оскільки $A_{i,n} \in \mathcal{A}_\alpha(X)$ і $F^-_{i,n}(G_m) \in \mathcal{A}_\alpha(Y)$ за умовою 2, то

$$A_{i,n} \times F^-_{i,n}(G_m) \in \mathcal{A}_\alpha(X \times Y)$$

для всіх $m, n \in \omega$ та $i \in I_n$. Тепер, згідно з лемою 3.1, $C_{m,n} \in \mathcal{A}_\alpha(X \times Y)$. Таким чином, $C \in \mathcal{M}_{\alpha+1}(X \times Y)$.

Залишилося показати, що $C = F^-(W)$. Нехай $(x_0, y_0) \in F^-(W)$. Зафіксуємо $m \in \omega$ і зауважимо, що $(x_0, y_0) \in F^-(G_m)$. Розглянемо окіл

$$O = \big\{B \subseteq Z : B \cap G_m \neq \varnothing\big\}$$

множини $F(x_0, y_0)$ в топології В'єторіса. За умовою 1 існує таке $n_0 \geq m$, що для кожного $n \geq n_0$ такого, що $i \in I_n$, із включення $x_0 \in A_{i,n}$ випливає, що $F(x_{i,n}, y_0) \in O$, тобто $(x_{i,n}, y_0) \in F^-(G_m)$. Зокрема, для деякого $i \in I_{n_0}$ маємо, що $x_0 \in A_{i,n_0}$ і $y_0 \in F^-_{i,n_0}(G_m)$. Таким чином, $(x_0, y_0) \in C_{m,n_0}$. Отже, $(x_0, y_0) \in C$.

Тепер нехай $(x_0, y_0) \notin F^-(W)$. Тоді

$$F(x_0, y_0) \subseteq Z \setminus W = \bigcup_{m\in\omega} (Z \setminus W_m).$$

Оскільки множина $F(x_0, y_0)$ компактна, то існує таке $m_0 \in \omega$, що $F(x_0, y_0) \subseteq Z \setminus W_{m_0}$. Розглянемо окіл

$$O_1 = \big\{B \subseteq Z : B \cap W_{m_0} = \varnothing\big\}$$

множини $F(x_0, y_0)$ в топології В'єторіса. З властивості 1 випливає, що існує такий номер $n_0 \in \omega$, що для всіх $n \geq n_0$ із включення $x_0 \in A_{i,n}$ випливає включення $F(x_{i,n}, y_0) \in O_1$. Таким чином, $F(x_{i,n}, y_0) \subseteq Z \setminus W_{m_0} \subseteq Z \setminus W_m$ і $y_0 \notin F^-_{i,n}(G_m)$ для всіх $m \geq m_0$, $n \geq n_0$ та $i \in I_n$ таких, що $x_0 \in A_{i,n}$. Звідси випливає, що $(x_0, y_0) \notin C_{n,m}$ для всіх $n \geq n_0$ та $m \geq m_0$. Отже, $(x_0, y_0) \notin C$.

Тепер нехай відображення F багатозначне і $F^x \in \mathrm{U}^f_\alpha(Y, Z)$ для всіх $x \in D$. Будемо міркувати, як і в попередньому випадку, використовуючи аналогічні позначення. Для всіх $m, n \in \omega$ покладемо

$$C_{m,n} = \bigcup_{i \in I_n} \Big(A_{i,n} \times F^+_{i,n}(G_m) \Big).$$

Згідно з лемою 3.1, $C_{m,n} \in \mathcal{A}_\alpha(X \times Y)$ і

$$C = \bigcap_{m \in \omega} \bigcup_{n \geq m} C_{n,m} \in \mathcal{M}_{\alpha+1}(X \times Y).$$

Далі, покажемо, що $C = F^+(W)$. Нехай $(x_0, y_0) \in F^+(W)$ і $m \in \omega$. Тоді $(x_0, y_0) \in$ $\in F^+(G_m)$. За властивістю 1 існують такі $n \geq m$ та $i \in I_n$, що $x_0 \in A_{i,n}$ і $F(x_{i,n}, y_0) \subseteq G_m$. Таким чином, $(x_0, y_0) \in C_{m,n}$. Отже, $(x_0, y_0) \in C$.

Тепер нехай $(x_0, y_0) \notin F^+(W)$. Тоді $F(x_0, y_0) \cap (Z \setminus W) \neq \varnothing$ та існує такий номер $m_0 \in \omega$, що $F(x_0, y_0) \cap (Z \setminus W_{m_0}) \neq \varnothing$. З властивості 1 випливає існування такого номера $n_0 \in \omega$, що для всіх $n \geq n_0$ із включення $x_0 \in A_{i,n}$ випливає, що $F(x_{i,n}, y_0) \cap (Z \setminus W_{m_0}) \neq \varnothing$. Таким чином, $(x_0, y_0) \notin C_{n,m}$ для всіх $n \geq n_0$ та $m \geq m_0$. Отже, $(x_0, y_0) \notin C$.

Теорему 3.1 доведено.

***Зауваження* 3.1.** Багатозначне відображення $F\colon (X, d) \times Y \multimap Z$ з теореми 1.1 задовольняє умови 1, 2 теореми 3.1. Для всіх $u \in D$ та $n \in \omega$ покладемо

$$A_{u,n} = A(u) \cap \left\{ v \in X : d(u, v) < \frac{1}{n} \right\} \qquad \text{і} \qquad x_{u,n} = u.$$

Тоді послідовності сімей $(A_{u,n} : u \in D)$ та $(x_{u,n} : u \in D)$ мають властивість 1. Крім того, умова 2 рівносильна умові (e). Таким чином, теорема 3.1 узагальнює теорему 1.1.

Означення 3.2. *Топологічний простір X називається* (*сильним*) *PP-простором*, *якщо* (*для довільної щільної множини $D \subseteq X$*) *існують послідовність $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^\infty$ локально скінченних покриттів $\mathcal{U}_n = (U_{i,n} : i \in I_n)$ простору X і послідовність $\big((x_{i,n} : i \in I_n)\big)_{n=1}^\infty$ сімей точок із простору X* (*з множини D*) *такі*, *що для кожного $x \in X$ та кожного околу U точки x існує такий номер $n_0 \in \omega$*, *що для всіх $n \geq n_0$ та $i \in I_n$ із включення $x \in U_{i,n}$ випливає включення $x_{i,n} \in U$.*

Поняття PP-простору було введене в [14] і тісно пов'язане з поняттям метрично чвертьвичерпного простору (див. [1]). У статті [13] встановлено, що метрично чвертьвичерпні простори збігаються з гаусдорфовими PP-просторами. Очевидно, кожний сильний PP-простір є PP-простором.

Для топологічних просторів X, Y і Z та ординалу $\alpha \in [0, \omega_1)$ через $\mathrm{CU}^f_\alpha(X, Y, Z)$ $\big(\mathrm{CL}^f_\alpha(X, Y, Z)\big)$ будемо позначати сукупність усіх багатозначних відображень $F\colon X \times Y \multimap$ $\multimap Z$, які неперервні відносно першої змінної і верхнього (нижнього) функціонального класу α Лебега відносно другої. Аналогічно, через $\overline{\mathrm{C}}\mathrm{U}^f_\alpha(X, Y, Z)$ $\big(\overline{\mathrm{C}}\mathrm{L}^f_\alpha(X, Y, Z)\big)$ будемо позначати сукупність усіх багатозначних відображень $F\colon X \times Y \multimap Z$, які неперервні відносно першої змінної і для довільної щільної множини $D \subseteq X$ кожне багатозначне відображення F^x належить до верхнього (нижнього) функціонального класу α Лебега. Сукупності $\mathrm{CU}_\alpha(X,Y,Z)$, $\mathrm{CL}^f_\alpha(X,Y,Z)$ $\overline{\mathrm{C}}\mathrm{U}^f_\alpha(X,Y,Z)$ та $\overline{\mathrm{C}}\mathrm{L}^f_\alpha(X,Y,Z)$ визначаються аналогічно.

***Наслідок* 3.1.** *Нехай X — PP-простір, Y і Z — топологічні простори і $\alpha \in [0,\omega_1)$. Тоді $\mathrm{CU}^f_\alpha(X,Y,Z) \subseteq \mathrm{L}^f_{\alpha+1}(X\times Y,Z)$ і $\mathrm{CL}^f_\alpha(X,Y,Z) \subseteq \mathrm{U}^f_{\alpha+1}(X\times Y,Z)$.*

Доведення. Нехай $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^\infty$ та $((x_{i,n} : i \in I_n))_{n=1}^\infty$ — послідовності з означення 3.2 і $A_{i,n} = U_{i,n}$ для всіх $n \in \omega$ та $i \in I_n$. Залишається застосувати теорему 3.1.

Для сильних PP-просторів цілком аналогічно можна довести такий результат.

***Наслідок* 3.2.** *Нехай X — сильний PP-простір, Y і Z — топологічні простори та $\alpha \in [0,\omega_1)$. Тоді $\mathrm{C}\overline{\mathrm{U}}^f_\alpha(X,Y,Z) \subseteq \mathrm{L}^f_{\alpha+1}(X\times Y,Z)$ і $\mathrm{C}\overline{\mathrm{L}}^f_\alpha(X,Y,Z) \subseteq \mathrm{U}^f_{\alpha+1}(X\times Y,Z)$.*

4. Класифікація Лебега багатозначних відображень двох змінних. Почнемо з узагальнення теореми 3.30 з [11].

Теорема 4.1. *Нехай X — досконалий простір, $\alpha \in [0,\omega_1)$, $(A_i : i \in I)$ — локально скінченна сім'я множин адитивного (мультиплікативного) класу α в X. Тоді множина $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ належить до адитивного (мультиплікативного) класу α в X.*

Доведення. Міркуватимемо індукцією по α. Відомо, що твердження теореми правильне для $\alpha = 0$.

Нехай $(A_i : i \in I)$ — локально скінченна сім'я F_σ-множин $A_i \subseteq X$ і $\big((B_{i,n})_{n\in\omega} : i \in I\big)$ — послідовність сімей замкнених підмножин простору X така, що $A_i = \bigcup_{n\in\omega} B_{i,n}$ для кожного $i \in I$. Зауважимо, що кожна сім'я $(B_{i,n} : i \in I)$ локально скінченна. Таким чином, всі множини $B_n = \bigcup_{i\in I} B_{i,n}$ замкнені і $A = \bigcup_{n\in\omega} B_n$ є F_σ-множиною.

Нехай $(A_i : i \in I)$ — локально скінченна сім'я G_δ-множин $A_i \subseteq X$ і $\big((B_{i,n})_{n\in\omega} : i \in I\big)$ — послідовність сімей відкритих множин $B_{i,n}$ така, що $A_i = \bigcap_{n\in\omega} B_{i,n}$ для кожного $i \in I$. Для всіх $i \in I$ покладемо $F_i = \overline{A_i}$. Очевидно, що сім'я $(F_i : i \in I)$ локально скінченна і множина $F = \bigcup_{i\in I} F_i$ замкнена в X. Для кожного $x \in F$ покладемо $I(x) = \{i \in I : x \in F_i\}$ і $n(x) = |I(x)|$. Крім того, нехай $K_n = \{x \in F_{I(x)} : n(x) > n\}$ для кожного $n \in \omega$. Оскільки сім'я $(F_i : i \in I)$ локально скінченна, то кожна множина K_n замкнена.

Розглянемо множину $C = F \setminus A$ і покажемо, що вона є типу F_σ. Для кожного $n \in \omega$ покладемо

$$C_n = \{x \in C : |n(x)| = n\}, \qquad \mathcal{J}_n = \{J \subseteq I : |J| = n\}$$

і

$$C_{J,n} = \{x \in C_n : I(x) = J\}$$

для кожного $J \in \mathcal{J}_n$. Покажемо, що кожна сім'я $\mathcal{C}_n = (C_{J,n} : J \in \mathcal{J}_n)$ локально скінченна. Зафіксуємо $x \in X$ і виберемо окіл U точки x в X такий, що множина $I_1 = \{i \in I : U \cap F_i \neq \varnothing\}$ є скінченною. Тоді

$$\mathcal{I}_1 = \{J \in \mathcal{J}_n : U \cap C_{J,n} \neq \varnothing\} \subseteq \{J \in \mathcal{J}_n : J \subseteq I_1\}.$$

Таким чином, множина $\mathcal{I}_1$ скінченна, а сім'я $\mathcal{C}_n$ локально скінченна. Тепер покажемо, що

$$C_{J,n} = \left(\bigcap_{i\in J} F_i\right) \setminus \left(K_n \cup \bigcup_{i\in J} A_i\right)$$

для всіх $n \in \omega$ та $J \in \mathcal{J}_n$. Оскільки $C_{J,n} \subseteq \bigcap_{i\in J} F_i$ і $C_{J,n} \cap (K_n \cup \bigcup_{i\in J} A_i) = \varnothing$, то $C_{J,n} \subseteq \big(\bigcap_{i\in J} F_i\big) \setminus \big(K_n \cup \bigcup_{i\in J} A_i\big)$. Навпаки, нехай $x \in \bigcap_{i\in J} F_i$, $x \notin K_n$ і $x \notin \bigcup_{i\in J} A_i$. Тоді

$n(x) \geq |J| = n$ і $n(x) \leq n$. Таким чином, $n(x) = n$ і $I(x) = J$. Отже, $x \notin F_i$ для всіх $i \in I \setminus J$. Звідси маємо

$$x \notin \left(\bigcup_{i\in J} A_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i\in I\setminus J} F_i\right) \supseteq A.$$

Оскільки множини $\bigcap_{i\in J} F_i$ і K_n замкнені, а множина $\bigcup_{i\in J} A_i$ є типу G_δ, то множина $C_{J,n}$ є F_σ-множиною. Таким чином, кожна множина C_n є типу F_σ як локально скінченне об'єднання F_σ-множин. Отже, множина C також є типу F_σ.

Припустимо, що лема правильна для всіх $\alpha < \beta$, де $\beta \in [1, \omega_1)$. Нехай $(A_i : i \in I)$ — локально скінченна сім'я множин адитивного класу β в X. Розглянемо випадок, коли $\beta = \alpha + 1$ для деякого $\alpha < \omega_1$. Тоді для кожного $i \in I$ існує послідовність $(B_{i,n})_{n\in\omega}$ множин мультиплікативного класу α в X така, що $A_i = \bigcup_{n\in\omega} B_{i,n}$ для всіх $i \in I$. За індуктивним припущенням кожна множина $B_n = \bigcup_{i\in I} B_{i,n}$ належить до мультиплікативного класу α в X. Таким чином, множина $A = \bigcup_{n\in\omega} B_n$ належить до адитивного класу β в X.

Розглянемо тепер випадок граничного ординалу β. Виберемо зростаючу послідовність ординалів $\alpha_n < \beta$ таку, що $\sup_{n\in\omega} \alpha_n = \beta$. Для кожного $i \in I$ існує послідовність $(B_{i,n})_{n\in\omega}$ множин мультиплікативного класу α_n в X така, що $A_i = \bigcup_{n\in\omega} B_{i,n}$ для всіх $i \in I$. Тоді кожна множина $B_n = \bigcup_{i\in I} B_{i,n}$ належить до мультиплікативного класу α в X, звідки випливає, що $A = \bigcup_{n\in\omega} B_n$ є множиною адитивного класу β.

Тепер розглянемо випадок, коли множина належить до мультиплікативного класу $\beta \geq 2$. Нехай $(A_i : i \in I)$ — локально скінченна сім'я множин мультиплікативного класу β в X, причому $\beta = \alpha + 1$ для деякого $\alpha < \omega_1$ і $\big((B_{i,n})_{n\in\omega} : i \in I\big)$ — послідовність сімей множин адитивного класу α така, що $A_i = \bigcap_{n\in\omega} B_{i,n}$ для всіх $i \in I$. Для кожного $i \in I$ покладемо $F_i = \overline{A_i}$. Сім'я $(F_i : i \in I)$ є локально скінченною. Для кожного $n \in \omega$ та $i \in I$ позначимо $A_{i,n} = B_{i,n} \cap F_i$. Оскільки $\alpha \geq 1$, то кожна множина $A_{i,n}$ належить до адитивного класу α. Тоді $B_n = \bigcup_{i\in I} A_{i,n}$ також є множиною адитивного класу α для кожного n і такою ж є множина $A = \bigcup_{n\in\omega} B_n$. Для граничного β міркування аналогічні.

Теорему 4.1 доведено.

***Зауваження* 4.1.** Для досконалого паракомпакту X теорема 4.1 є відомою (див., наприклад, [3] (4.5.8)). З іншого боку, теорему 4.1 не можна узагальнити на довільні топологічні простори. Зокрема, питання „чи є локально скінченне об'єднання G_δ-множин G_δ-множиною?" обговорювалося на сайті http://mathoverflow.net. У зв'язку із цим Тарас Банах показав, що існує функціонально гаусдорфовий (не регулярний) простір X із другою аксіомою зліченності, який містить замкнену дискретну підмножину D, яка не є типу G_δ в X, а Mathieu Baillif побудував приклад нульвимірного гаусдорфового простору X із першою аксіомою зліченності потужності $|X| = \omega_1$, що містить замкнений дискретний підпростір D, який не є типу G_δ вX. Тоді $\big(\{x\} : x \in D\big)$ є локально скінченною сім'єю компактних G_δ-множин в X, чиє об'єднання F не є типу G_δ в X.

Доведення наступного результату може бути проведене аналогічно до доведення відповідного результату з попереднього пункту.

Теорема 4.2. *Нехай X — топологічний простір, Y — досконалий простір і Z — досконало нормальний простір, $\alpha \in [0, \omega_1)$, $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty$ — послідовність σ-локально скінченних покриттів $\mathcal{A}_n = (A_{i,n} : i \in I_n)$ простору X множинами $A_{i,n}$ адитивного класу α в X, $\big((x_{i,n} : i \in I_n)\big)_{n=1}^\infty$ — послідовність сімей точок $x_{i,n} \in X$ і $F : X \times Y \multimap Z$ — компактнозначне (багатозначне) відображення з такими властивостями*:

1) *для всіх* $(x, y) \in X \times Y$ *і довільної послідовності* $(i_n)_{n\in\omega}$ *індексів* $i_n \in I_n$ *з умови* $x \in A_{i_n,n}$ *випливає, що послідовність* $\big(F(x_{i_n,n}, y)\big)_{n\in\omega}$ *збігається до* $F(x, y)$ *в топології В'єторіса*;

2) $F^x \in \mathrm{L}_\alpha(Y, Z)$ $\big(F^x \in \mathrm{U}_\alpha(Y, Z)\big)$ *для кожного* $x \in D = \{x_{i,n} : n \in \mathbb{N},\ i \in I_n\}$.
Тоді $F \in \mathrm{U}_{\alpha+1}(X \times Y, Z)$ $\big(F \in \mathrm{L}_{\alpha+1}(X \times Y, Z)\big)$.

***Наслідок* 4.1.** *Нехай* X — PP*-простір,* Y — *досконалий простір,* Z — *досконало нормальний простір і* $\alpha \in [0, \omega_1)$. *Тоді* $\mathrm{CU}_\alpha(X, Y, Z) \subseteq \mathrm{L}_{\alpha+1}(X \times Y, Z)$ *і* $\mathrm{CL}_\alpha(X, Y, Z) \subseteq \subseteq \mathrm{U}_{\alpha+1}(X \times Y, Z)$.

***Наслідок* 4.2.** *Нехай* X — *сильний* PP*-простір,* Y *і* Z — *топологічні простори і* $\alpha \in \in [0, \omega_1)$. *Тоді* $\mathrm{C\overline{U}}_\alpha(X, Y, Z) \subseteq \mathrm{L}_{\alpha+1}(X \times Y, Z)$ *і* $\mathrm{C\overline{L}}_\alpha(X, Y, Z) \subseteq \mathrm{U}_{\alpha+1}(X \times Y, Z)$.

***Зауваження* 4.2.** Оскільки кожний метризовний простір є сильним PP-простором, то теорема 4.2 узагальнює теорему 1.2. Крім того, теорема 4.2 є узагальненням теореми 1.1 (достатньо міркувати, як у зауваженні 3.1).

Наступний приклад вказує на істотність компактнозначності відображення в теоремах 3.1 і 4.2.

Твердження 4.1. *Існує нарізно неперервне напівнеперервне знизу відображення* $F\colon [0, 1]^2 \to \to [0, 1]$, *яке не є* (*функціонально*) *вимірним зверху.*

Доведення. Нехай $A \subseteq [0, 1]$ — не вимірна за Борелем множина. Розглянемо неперервну функцію $g\colon [0, 1]^2 \to [0, 1]$, $g(x, y) = \dfrac{2(x + 1)(y + 1)}{(x + 1)^2 + (y + 1)^2}$, і багатозначне відображення $F\colon [0, 1]^2 \multimap [0, 1]$,

$$F(x, y) = \begin{cases} [0, g(x, y)], & (x, y) \in [0, 1]^2 \setminus \{(z, z) : z \in A\}, \\ [0, 1), & (x, y) \in \{(z, z) : z \in A\}. \end{cases}$$

Покладемо $\Delta = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$. Оскільки функція g неперервна, то відображення F нарізно неперервне в кожній точці множини $[0, 1]^2 \setminus \{(z, z) : z \in A\}$ і сукупно неперервне в кожній точці множини $[0, 1]^2 \setminus \Delta$. Оскільки відображення $H(x, y) = [0, g(x, y)]$ неперервне і $H^-(G) = F^-(G)$ для кожної відкритої множини $G \subseteq [0, 1]$, то відображення F напівнеперервне знизу. Крім того, $F(x, y) \subseteq [0, 1) \subseteq F(z, z)$ для всіх $(x, y) \in [0, 1]^2 \setminus \Delta$ і $z \in [0, 1]$. Таким чином, відображення F нарізно напівнеперервне зверху в кожній точці множини Δ. Звідси випливає, що F — нарізно неперервне напівнеперервне знизу відображення. Згідно з прикладом 2.1, звуження $F|_\Delta$ не вимірне за Лебегом зверху. Отже, відображення F також не вимірне за Лебегом зверху.

Література

1. *Banakh T.* (Metrically) quarter-stratifiable spaces and their applications // Mat. Stud. – 2002. – **18**, № 1. – P. 10 – 28.
2. *Burke M.* Borel measurability of separately continuous functions // Top. Appl. – 2003. – **129**, № 1. – P. 29 – 65.
3. *Engelking R.* General topology. – Revised and completed ed. – Berlin: Heldermann Verlag, 1989.
4. *Karlova O.* Baire classification of maps which are continuous with respect to the first variable and of the functional Lebesgue class α with respect to the second one // Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. – 2004. – **2**. – P. 98 – 114 (in Ukrainian).
5. *Karlova O., Sobchuk O.* Lebesgue classsification of multivalued maps of two variables // Nauk. Visn. Cherniv. Un-tu. Matematyka. – 2003. – **160**. – P. 76 – 79 (in Ukrainian).
6. *Kuratowski K.* Sur la théorie des fonctions dans les espaces métriques // Fund. Mat. – 1931. – **17**. – P. 275 – 282.

7. *Kuratowski K.* Quelques problémes concernant les espaces métriques non-séparables // Fund. Mat. – 1935. – **25**. – P. 533 – 545.
8. *Kwiecińska G.* On Lebesgue theorem for multivalued functions of two variables // Proc. Ninth Prague Top. Symp. – 2001. – P. 181 – 189.
9. *Lebesgue H.* Sur les fonctions représentables analytiqment // J. Math. – 1905. – **1**, № 6. – P. 139 – 216.
10. *Maslyuchenko O., Maslyuchenko V., Mykhaylyuk V.* Paracompactness and Lebesgue's classifications // Mat. Met. i Fiz.-Mekh. Polya. – 2004. – **47**, № 2. – P. 65 – 72 (in Ukrainian).
11. *Maslyuchenko O., Maslyuchenko V., Mykhaylyuk V., Sobchuk O.* Paracompactness and separately continuous mappings // General Topology in Banach Spaces. – Nantintong; New York: Nova Sci. Publ., 2001. – P. 147 – 169.
12. *Montgomery D.* Non separable metric spaces // Fund. Mat. – 1935. – **25**. – P. 527 – 533.
13. *Mykhaylyuk V. V.* Baire classification of separately continuous functions and Namioka property // Ukr. Math. Bull. – 2008. – **5**, № 2. – P. 203 – 218 (in Ukrainian).
14. *Sobchuk O. V.* PP-spaces and Baire classifications // Intern. Conf. Funct. Anal. and Appl., Dedic. to the 110th of Stefan Banach. – Lviv, 2002.

Одержано 05.08.17