УДК 517.956.4

Г. П. Малицька, І. В. Буртняк (Прикарпат. ун-т ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ)

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИСТЕМ КОЛМОГОРОВА ДРУГОГО ПОРЯДКУ

We study the structure of the fundamental solution of the Cauchy problem for a class of ultraparabolic equations with finitely many groups of variables degenerating parabolicity.

Досліджується структура фундаментального розв'язку задачі Коші для одного класу систем ультрапараболічних рівнянь, що мають скінченну кількість груп змінних, за якими вироджується параболічність.

Вступ. У цій статті ми досліджуємо фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) для одного класу систем рівнянь типу Колмогорова, які є природним узагальненням рівняння дифузії з інерцією [1, 2]. Рівняння, що узагальнюють рівняння Колмогорова, вивчалися в багатьох роботах; детальний виклад теорії рівняння типу дифузії з інерцією представлено в роботах [3 – 7]. Значний інтерес до дослідження поведінки розв'язків задачі Коші та крайових задач для рівнянь Колмогорова обумовлений їхнім широким застосуванням у фінансовій математиці для обчислення цін азійських опціонів та характеристики волатильності цін [8, 9]. Ми розглядаємо системи рівнянь із довільною кількістю груп змінних, за якими є виродження параболічності, і досліджуємо структуру ФРЗК. Зокрема, одержано точні залежності і види зсувів на лініях рівня ФРЗК як для систем, так і для модельних рівнянь.

1. Позначення і постановка задачі. Основні результати. Нехай n, n_0 — натуральні фіксовані числа і $n_0 > 1$, $x \in R^{n_0}$, $(x,s) = \sum_{j=1}^{n_0} x_j s_j$, $x^* = (x_2, \ldots, x_{n_0})$. Розглянемо систему рівнянь вигляду

$$\partial_t u_\nu(t,x) - \sum_{j=1}^{n_0-1} x_j \partial_{x_{j+1}} u_\nu(t,x) = \sum_{k=0}^{2} \sum_{r=1}^{n} a_k^{\nu r}(t) \partial_{x_1}^k u_r(t,x), \qquad \nu = \overline{1,n}, \quad x \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (1)$$

де $\Pi_{(0,T]} = \{(t,x),\ t \in (0,T],\ T > 0,\ x \in R^{n_0}\}$. Припускатимемо, що коефіцієнти $a_k^{\nu r}(t)$ цієї системи — такі комплекснозначні неперервні на $[0,T]$ функції, що

$$\partial_t \omega_\nu(t,x_1) = \sum_{k=0}^{2} \sum_{r=1}^{n} a_k^{\nu r}(t) \partial_{x_1}^k \omega_r(t,x_1), \quad \nu = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Система (2) є рівномірно параболічною за І. Г. Петровським.

Знайдемо розв'язок системи (1), який задовольняє початкову умову

$$u_r(t,x)\big|_{t=\tau} = u_{r0}(x), \qquad x \in R^{n_0}, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad r = \overline{1,n}, \qquad (3)$$

де τ — задане число.

Теорема . *Існує фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші* (1), (2)

$$G(t,x;\tau,\xi) = (t-\tau)^{-n_0^2/2} \Omega\Big(t,\tau;(x_1-\xi_1)(t-\tau)^{-1/2}, (x_2-\xi_2+x_1(t-\tau))(t-\tau)^{-3/2}, \ldots$$

$$\ldots, (x_{n_0}-\xi_{n_0}+x_{n_0-1}(t-\tau)+\ldots+x_1(t-\tau)^{n_0-1}((n_0-1)!)^{-1})(t-\tau)^{-2n_0-1/2}\Big),$$

$$t-\tau>0,\quad x\in R^{n_0},\quad \xi\in R^{n_0},$$

де $\Omega(t,\tau;z_1,\ldots,z_{n_0})$ — ціла функція аргументів $z_1,\ldots,z_{n_0}$, порядку зростання 2 при комплексних значеннях аргументів і такого ж порядку спадання при дійсних значеннях. Для її похідних справджуються оцінки

$$\left|\partial_{x_j}^m G(t,x;\tau,\xi)\right|\le C_m(t-\tau)^{-\frac{n_0^2+(2j-1)m}{2}}\exp\left\{-c_0^*\left[|x_1-\xi_1|^2 4^{-1}(t-\tau)^{-1}+\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{n_0}(k-1)^2\ldots(2k-3)^2(2k-1)(t-\tau)^{-(2k-1)}\right]\left|x_k-\xi_k+\frac{(t-\tau)(x_{k-1}+\xi_{k-1})}{2}+\ldots\right.$$

$$\ldots+(x_{k-j}-(-1)^j\xi_{k-j})(t-\tau)^j(j+1)\ldots\frac{k+j-2}{(j-1)!}(k-1)k\ldots(2k-3)+\ldots$$

$$\left.\left.\ldots+(x_1-(-1)^{k-1}\xi_1)\frac{(t-\tau)^{k-1}}{(2(k-1)k\ldots(2k-3))}\right|^2\right\},$$

$$t-\tau>0,\quad x\in R^{n_0},\quad \xi\in R^{n_0},\quad m\in N\cup 0,$$

додатні сталі C_m, c_0^* залежать від $\sup|a_k^{r\nu}(t)|$, сталої параболічності δ та n_0, T.

2. Розв'язання задачі Коші для систем із сталими коефіцієнтами. Розглянемо задачу Коші для системи (1), в якій коефіцієнти $a_2^{\nu r}$ є сталими, $a_1^{\nu r}\equiv 0$, $a_0^{\nu r}=0$, $\nu=\overline{1,n}$, $r=\overline{1,n}$,

$$\partial_t u_\nu-\sum_{j=1}^{n_0-1}x_j\partial_{x_{j+1}}u_\nu(t,x)=\sum_{r=1}^{n}a_2^{\nu r}\partial_{x_1}^2u_r(t,x),\quad \nu=\overline{1,n},\tag{4}$$

$$u_r(t,x)|_{t=\tau}=u_{r0}(x),\qquad x\in R^{n_0},\quad r=\overline{1,n},\quad 0\le\tau<t\le T,\tag{5}$$

$u_{r0}(x)$ — досить гладкі фінітні функції.

Припускатимемо, що λ — корені $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ рівняння $\det\left\{(a_2^{\nu r}(is)^2)_{\nu,r=1}^n-\lambda I\right\}=0$, де I — одинична матриця порядку n, i — уявна одиниця, задовольняють умову $\operatorname{Re}\lambda(s)\le-\delta s_1^2$, $s_1\in R^1$, з деякою сталою $\delta>0$.

Використовуючи перетворення Фур'є, задачу Коші (4), (5) зведемо до задачі Коші для систем диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку. Для цього компоненти $u_1,\ldots,u_n$ розв'язку задачі Коші (4), (5) будемо шукати у вигляді оберненого перетворення Фур'є по s від невідомих функцій $v_1,\ldots,v_n$, тобто

$$u_r(t,x):=F^{-1}[v_r(t,s)](t,x):=(2\pi)^{-n_0/2}\int\limits_{R^{n_0}}\exp\{i(x,s)\}v_r(t,s)\,ds,$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad x\in R^{n_0},\quad r=\overline{1,n}.$$

В результаті одержимо для $v_1,\ldots,v_n$ таку задачу Коші:

$$\partial_t v_r(t,s)+\sum_{j=1}^{n_0-1}s_{j+1}\partial_{s_j}v_r(t,s)=-\sum_{k=1}^{n}a_2^{rk}s_1^2v_k(t,s),\tag{6}$$

$$\upsilon_r(t,s)|_{t=r} = \upsilon_{r0}(s), \qquad s \in R^{n_0}, \quad r = \overline{1,n}, \quad 0 \le \tau < t \le T. \tag{7}$$

Оскільки функції $u_{r0}(x)$ досить гладкі і фінітні, то їхні перетворення Фур'є є аналітичними функціями, для яких виконуються нерівності

$$|\upsilon_{r0}(s)| \le c(1+|s|)^{-m}, \qquad s \in R^{n_0}, \quad m \ge n_0 + 1, \tag{8}$$

де $\upsilon_{r0}(s) := F[u_{r0}(x)]$.

Система (6) є системою диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку, які мають однакові головні частини. Згідно з результатами [10, c. 146–148], така система еквівалентна однорідному лінійному диференціальному рівнянню з частинними похідними першого порядку для функції ω від $n+n_0$ незалежних змінних $t,\ s_2,\ldots,s_{n_0-1},\ \upsilon_1,\ldots,\upsilon_n$,

$$\partial_t\omega + \sum_{j=1}^{n_0-1} s_{j+1}\partial_{s_j}\omega + \sum_{r,\,l=1}^{n} a_2^{rl} s_1^2 \upsilon_r \partial_{\upsilon_l}\omega = 0,$$

яке в свою чергу, як відомо, еквівалентне системі звичайних диференціальних рівнянь

$$dt = \frac{ds_1}{s_2} = \frac{ds_2}{s_3} = \ldots = \frac{ds_{n_0-1}}{s_{n_0}} = \frac{d\upsilon_1}{\sum_{n=1}^{n} -a_2^{1r}\ s_1^2\upsilon_r} = \ldots = \frac{d\upsilon_n}{\sum_{r=1}^{n} -a_2^{nr}\ s_1^2\upsilon_r}.$$

З цієї системи виділимо n_0+n-1 незалежних інтегралів. З рівняння $dt = \dfrac{ds_{n_0-1}}{s_{n_0}}$ знаходимо

$$s_{n_0-1} = ts_{n_0} + c_1, \tag{9}$$

з рівняння $dt = \dfrac{ds_{n_0-2}}{s_{n_0-1}}$, враховуючи (9), отримуємо

$$s_{n_0-2} = t^2 s_{n_0}/2 + tc_1 + c_2, \tag{10}$$

а з рівняння $dt = \dfrac{ds_{n_0-k}}{s_{n_0-(k-1)}}$ для $k = \overline{3, n_0-1}$ маємо

$$s_{n_0-k} = \frac{t^k}{k!} s_{n_0} + \sum_{j=1}^{k} \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} c_j. \tag{11}$$

Враховуючи (9)–(11), записуємо

$$\begin{gathered} s = (s_1,\ldots,s_{n_0-(k-1)},\ldots,s_{n_0-1},s_{n_0}) = \\ = \left(\frac{t^{n_0-1}}{(n_0-1)!} s_{n_0} + \sum_{j=2}^{n_0} \frac{t^{n_0-j}}{(n_0-j)!} c_{j-1}, \ldots \right. \\ \left. \ldots, \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} s_{n_0} + \sum_{j=2}^{k} \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} c_{j-1}, \ldots, ts_{n_0} + c_1, s_{n_0} \right). \end{gathered} \tag{12}$$

Підставивши (12) у систему рівнянь

$$d\upsilon_r = -\sum_{l=1}^{n} a_2^{rl} s_1^2 \upsilon_l dt, \quad r = \overline{1, n}, \tag{13}$$

одержимо систему рівнянь (13) із характеристиками (9)–(11):

$$d\upsilon_r(t, P(t, s_{n_0}, c)) = -\sum_{l=1}^{n} a_2^{rl} \left(\frac{t^{n_0-1}}{(n_0-1)!} s_{n_0} + \sum_{k=2}^{n_0} \frac{t^{n_0-k}}{(n_0-k)!} c_{k-1} \right)^2 \upsilon_l dt, \tag{14}$$

де

$$P(t, s_{n_0}, c) := \left(\frac{t^{n_0-1}}{(n_0-1)!} s_{n_0} + \sum_{k=2}^{n_0} \frac{t^{n_0-k}}{(n_0-k)!}\, c_{k-1}, \ldots, t s_{n_0} + c_1, s_{n_0} \right),$$

з початковою умовою

$$\upsilon_r(t, P(t, s_{n_0}, c) \big|_{t=\tau} = \upsilon_{r0}(P(\tau, s_{n_0}, c)), \quad r = \overline{1, n}. \tag{15}$$

Задача (14), (15) має єдиний розв'язок для $0 \leq \tau < t \leq T < +\infty$. Розв'язок цієї задачі Коші має вигляд

$$\upsilon\big(t, P(t, s_{n_0}, c)\big) = Q\big(t, \tau, P(t, s_{n_0}, c)\big) \upsilon_0\big(P(\tau, s_{n_0}, c)\big), \tag{16}$$

де $Q(t, \tau, P(t, s_{n_0}, c))$ — нормальна матриця розв'язків системи (14), $Q(t, \tau, P(t, s_{n_0}, c)) \big|_{t=\tau} = I$, $\upsilon_0 = (\upsilon_{10}, \ldots, \upsilon_{n0})$.

Оскільки матриця

$$A(t) = \left(-a_2^{rl} \left(\frac{t^{n_0-1}}{(n_0-1)!} s_{n_0} + \sum_{k=2}^{n_0} \frac{t^{n_0-k}}{(n_0-k)!} c_{k-1} \right)^2 \right)_{r,\, l=1}^{n}$$

комутує з $\int_\tau^t A(\tau)\, d\tau$, то

$$Q\big(t, \tau, P(\tau, s_{n_0}, c)\big) =$$

$$= \exp\left\{ -\int_\tau^t A(\beta) d\beta \right\} = \exp\left\{ -A_1 \int_\tau^t \left(\frac{\beta^{n_0-1} s_{n_0}}{(n_0-1)!} + \sum_{k=2}^{n_0} \frac{\beta^{n_0-k}}{(n_{0-k})!}\, c_{k-1} \right)^2 d\beta \right\},$$

де $A_1 = \big(a_2^{r\ell}\big)_{r,\, l=1}^{n}$.

Методом математичної індукції з (9), (10) знайдемо $c_k,\ k = \overline{1, n_0}$:

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-t)^j s_{n_0-k+j}}{j!}, \quad k = \overline{1, n_0}. \tag{17}$$

Підставивши (17) у (16), одержимо

$$\upsilon(t, s) = \exp\left\{ -A_1 \int_\tau^t \left(\frac{\beta^{n_0-1} s_{n_0}}{(n_0-1)!} + \sum_{k=2}^{n_0} \frac{\beta^{n_0-k}}{(n_0-k)!} \sum_{j=0}^{k-1} (-t)^j \frac{s_{n_0-k-j}}{(j!)^2} \right) d\beta \right\} \times$$

$$\times v_0\Bigg(s_1 + (\tau - t)s_2 + \frac{(\tau - t)^2 s_3}{2!} + \ldots + \frac{(\tau - t)^{n_0-1} s_{n_0}}{(n_0 - 1)!},$$

$$s_2 + (\tau - t)s_3 + \ldots + \frac{(\tau - t)^{n_0-2} s_{n_0}}{(n_0 - 2)!}, \ldots, s_{n_0-1} + (\tau - t)s_{n_0}, s_{n_0}\Bigg).$$

Після зведення подібних членів у показнику експоненти матимемо

$$v(t,s) = \exp\left\{-A_1 \int_\tau^t \left(\sum_{k=1}^{n_0} \frac{(\beta - t)^{k-1} s_k}{(k-1)!}\right)^2 d\beta\right\} \times$$

$$\times v_0\left(\sum_{k=1}^{n_0} \frac{(\tau - t)^{k-1} s_k}{(k-1)!}, \sum_{k=2}^{n_0} \frac{(\tau - t)^{k-2} s_k}{(k-2)!}, \ldots, s_{n_0-1} + (\tau - t)s_{n_0}, s_{n_0}\right).$$

Знайдемо $u(t,x)$:

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n_0/2}} \int_{R^{n_0}} \exp\left\{-A_1 \int_\tau^t \left(\sum_{k=1}^{n_0} \frac{(\beta - t)^{k-1} s_k}{(k-1)!}\right)^2 d\beta\right\} \times$$

$$\times v_0\left(\sum_{k=1}^{n_0} \frac{(\tau - t)^{k-1} s_k}{(k-1)!}, \sum_{k=2}^{n_0} \frac{(\tau - t)^{k-2} s_k}{(k-2)!}, \ldots, s_{n_0-1} + (\tau - t)s_{n_0}, s_{n_0}\right) ds. \tag{18}$$

Виконавши заміну змінних у інтегралі (18)

$$\sum_{k=1}^{n_0} \frac{(\tau - t)^{k-1} s_k}{(k-1)!} = \alpha_1,$$

$$\sum_{k=2}^{n_0} \frac{(\tau - t)^{k-2}\, s_k}{(k-2)!} = \alpha_2,$$

$$s_{n_0-1} + (\tau - t)s_{n_0} = \alpha_{n_0-1},$$

$$s_{n_0} = \alpha_{n_0},$$

або

$$s_1 = \sum_{k=1}^{n_0} (-1)^{k-1} \frac{(\tau - t)^{k-1}}{(k-1)!} \alpha_k,$$

$$s_2 = \sum_{k=2}^{n_0} (-1)^{k-2} \frac{(\tau - t)^{k-2} \alpha_k}{(k-2)!},$$

$$s_k = \sum_{j=k}^{n_0} (-1)^{k-j} \frac{(\tau - t)^{k-j}}{(k-j)!},$$

$$s_{n_0-1} = \alpha_{n_0-1} - (\tau - t)\alpha_{n_0},$$

$$s_{n_0} = \alpha_{n_0},$$

одержимо

$$u(t,x)=\frac{1}{(2\pi)^{n_0/2}}\int\limits_{R^{n_0}}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n_0}\alpha_k\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j\ x_{k-j}(\tau-t)^j}{j!}-\right.$$
$$\left.-\,A_1\int\limits_{\tau}^{t}\left(\sum_{k=1}^{n_0}\frac{(\beta-\tau)^{k-1}\alpha_k}{(k-1)!}\right)^2 d\beta\right\}\upsilon_0(\alpha)\,d\alpha.$$

Оскільки $\upsilon_0(\alpha)=Fu_0(x)$, то

$$u(t,x)=\int\limits_{R^{n_0}}G(t,x;\tau,\xi)u_0(\xi)\,d\xi,$$

де $G(t,x;\tau,\xi)$ — ФРЗК,

$$G(t,x;\tau,\xi)=(2\pi)^{-n_0/2}\int\limits_{R^{n_0}}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n_0}\alpha_k\left(\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{x_{k-j}(\tau-t)^j}{j!}-\xi_k\right)-\right.$$
$$\left.-\int\limits_{\tau}^{t}\left(\sum_{k=1}^{n_0}\frac{(\beta-\tau)^{k-1}\alpha_k}{(k-1)!}\right)^2 d\beta\right\}d\alpha.$$

3. Дослідження поведінки ФРЗК. Для того щоб дослідити поведінку $G(t,x;\tau,\xi)$, обчислимо інтеграл

$$I=\int\limits_{\tau}^{t}\left(\sum_{k=1}^{n_0}\frac{(\beta-\tau)^{k-1}\alpha_k}{(k-1)!}\right)^2 d\beta.$$

Виконавши заміну $(\beta-\tau)(\tau-t)^{-1}=\theta$, одержимо

$$I=\int\limits_{0}^{1}\left(\sum_{k=1}^{n_0}\frac{\theta^{k-1}(t-\tau)^{k-1}\alpha_k}{(k-1)!}\right)^2 d\theta(t-\tau).$$

Перепозначивши $\alpha_k(t-\tau)^{\frac{2k-1}{2}}/(k-1)!=s_k,\ k=\overline{1,n_0}$, будемо мати

$$I=\int\limits_{0}^{1}\left(\sum_{k=1}^{n_0}\theta^{k-1}s_k\right)^2 d\theta=s_1^2+\frac{s_2^2}{3}+\frac{s_3^2}{5}+\ldots+\frac{s_{n_0}^2}{2n_0-1}+2\sum_{j=2}^{n_0}\frac{s_1s_j}{j}+$$
$$+2\sum_{j=3}^{n_0}\frac{s_2s_j}{j+1}+\ldots+2\sum_{j=k+1}^{n_0}\frac{s_ks_j}{k+j-1}+\ldots+2\frac{s_{n_0-1}s_{n_0}}{2n_0-2}. \tag{19}$$

Виділивши у (19) повні квадрати по $s_1,s_2,\ldots,s_{n_0}$, отримаємо

$$I = \left(\sum_{j=1}^{n_0} \frac{s_j}{j}\right)^2 + 3\left(\sum_{j=2}^{n_0} \frac{(j-1)s_j}{j(j+1)}\right)^2 + 5\left(\sum_{k=3}^{n_0} \frac{s_k 30(k-1)(k-2)}{k(k+1)(k+2)}\right)^2 +$$

$$+7\left(\sum_{k=4}^{n_0} \frac{s_k(k-1)(k-2)(k-3)}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\right)^2 + \ldots$$

$$\ldots + (2j-1)\left(\sum_{k=j}^{n_0} \frac{s_k(k-1)\ldots(k-(j-1))}{k(k+1)\ldots(k+j-1)}\right)^2 + \ldots$$

$$\ldots + (2n_0-3)\left(\sum_{k=n_0-1}^{n_0} \frac{s_k(k-1)\ldots(k-(n_0-2))}{k(k+1)\ldots(k+n_0-1)}\right)^2 +$$

$$+(2n_0-1)s_0^2 \frac{(n_0-1)^2(n_0-2)^2\ldots 2^2}{n_0^2(n_0+1)^2\ldots(2n_0-1)^2}. \tag{20}$$

З огляду на (20) $G(t,x;\tau,\xi)$ запишемо у вигляді

$$G(t,x;\tau,\xi) = (2\pi)^{-n_0} \int\limits_{R^{n_0}} \exp\left\{\sum_{k=1}^{n_0} i s_k (k-1)! \times\right.$$

$$\times \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j x_{k-j}(\tau-t)^j}{j!} - \xi_k\right)(t-\tau)^{-(2k-1)/2} + i s_{n_0} -$$

$$\left.-A_1\left[\left(\sum_{k=1}^{n_0}(2k-1)\left(\sum_{j=k}^{n_0} \frac{s_j(j-1)\ldots(j-k+1)}{j(j+1)\ldots(j+k-1)}\right)^2 + \ldots + (2n_0-3)\right)^2\right]\right\} ds \times$$

$$\times (t-\tau)^{-n_0^2/2} 2! \ldots (n_0-1)!.$$

Розглянемо систему

$$\sum_{j=1}^{n_0} \frac{s_j}{j} = \alpha_1,$$

$$\sum_{j=2}^{n_0} \frac{(j-1)s_j}{j(j+1)} = \alpha_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{j=k}^{n_0} \frac{s_j(j-1)\ldots(j-k+1)}{j(j+1)\ldots(j+k-1)} = \alpha_k, \tag{21}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{s_{n_0-1}(n_0-2)!}{(n_0-1)\ldots(2n_0-3)}+\frac{s_{n_0}(n_0-1)!}{n_0\ldots(2n_0-2)}=\alpha_{n_0-1},$$

$$\frac{s_{n_0}(n_0-1)!}{n_0\ldots(2n_0-1)}=\alpha_{n_0}.$$

Розв'язавши (21), одержимо

$$s_1=\sum_{k=1}^{n_0}(-1)^{k-1}(2k-1)\alpha_k,$$

$$\frac{s_2}{2\cdot 3}=\sum_{k=2}^{n_0}\frac{(-1)^{k-2}}{(k-2)!}4\cdot 5\ldots k(2k-1)\alpha_k,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{s_k(k-1)!}{k\ldots(2k-1)}=\alpha_k-(2k+1)\alpha_{k+1}+\frac{2k(2k+3)}{2!}\alpha_{k+2}+$$

$$+\sum_{j=3}^{n_0-k}\frac{(-1)^j 2k(2k+1)(j+2k-2)(2k+2j-1)}{j!}\alpha_{k+j},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{s_{n_0-1}(n_0-2)!}{(n_0-1)\ldots(2n_0-3)}=\alpha_{n_0-1}-\alpha_{n_0}(2n_0-1),$$

$$\frac{s_{n_0}(n_0-1)!}{n_0\ldots(2n_0-1)}=\alpha_{n_0}.$$

З цієї системи знайдемо $s_k(k-1)!,\ k=\overline{1,n_0}$.

Згрупувавши подібні члени відносно α_j, будемо мати

$$G(t,x;\tau,\xi)=(2\pi)^{-n_0}\int\limits_{R^{n_0}}\exp\left\{-A_1\sum_{k=1}^{n_0}(2k-1)\alpha_k^2+\right.$$

$$+i\alpha_1(t-\tau)^{-1/2}(x_1-\xi_1)+\sum_{k=2}^{n_0}k(k+1)\ldots(2k-1)i\alpha_k\times$$

$$\times\left[\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x_{k-j}(t-\tau)^j}{j}-\xi_k-(t-\tau)\left(\sum_{j=0}^{k-2}\frac{x_{k-j-1}(t-\tau)^j}{j}-\xi_{k-1}\right)+\right.$$

$$+(t-\tau)^2\left(\sum_{j=0}^{k-3}\frac{x_{k-j-2}(t-\tau)^j}{j}-\xi_{k-2}\right)\frac{k-2}{4(2k-3)}+\ldots+(-1)^{(k-j)}\frac{(t-\tau)^{(k-j)}}{(k-j)!}\times$$

$$\times\frac{2j\ldots(2j+1)\ldots(2j+(k-j)-2)(2j+2(k-j)-1)}{k\ldots(2k-1)}\times$$

$$\times\left(\sum_{l=0}^{j-1}\frac{x_{j-l}(t-\tau)^l}{l!}-\xi_j\right)+\ldots+(-1)^{(k-2)}\frac{(t-\tau)^{(k-2)}(x_2-\xi_2+(t-\tau)x_1)}{2(k+1)\ldots(2k-3)}+$$

$$+\;(-1)^{(k-1)}\frac{(t-\tau)^{(k-1)}(x_1-\xi_1)}{k\ldots(2k-2)}\Bigg]\Bigg\}\,d\alpha\,(t-\tau)^{-n_0^2/2}\prod_{k=1}^{n_0}k(k+1)\ldots(2k-1). \qquad (22)$$

З формули (22) випливає, що $G(t,x;\tau,\xi)$ є перетворенням Фур'є функції

$$I_1(\alpha)=\exp\left\{-A_1\sum_{k=1}^{n_0}(2k-1)\alpha_k^2\right\},\quad \alpha\in R^{n_0}.$$

У відповідно підібраних точках, використовуючи параболічність [11], одержуємо оцінки для $I_1(\alpha+i\beta)$, $\alpha\in R^{n_0}$, $\beta\in R^{n_0}$:

$$|I_1(\alpha+i\beta)|\le C\exp\left\{-c_0^*\sum_{k=0}^{n_0}\alpha_k^2+c\sum_{k=0}^{n_0}\beta_k^2\right\},$$

де додатні сталі C, c_0^*, c залежать від n_0, n, сталої параболічності δ, $\max_{1\le r,\,s\le n}|a_2^{r\upsilon}|$.

Перетворення Фур'є I_1 є цілою функцією, для похідних якої при $t>\tau$, $x\in R^{n_0}$, $\xi\in R^{n_0}$ справджуються оцінки

$$\left|\partial_{x_j}^m G(t,x;\tau,\xi)\right|\le C_m(t-\tau)^{-\frac{n_0^2}{2}-\frac{(2j-1)m}{2}}\exp\Bigg\{-c_0\Bigg[|x_1-\xi_1|^2 4^{-1}(t-\tau)^{-1}+$$

$$+\sum_{k=2}^{n_0}(k-1)^2k^2\ldots(2k-3)^2(2k-1)(t-\tau)^{-(2k-1)}\Bigg]\times$$

$$\times\Bigg|\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x_{k-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_k-(t-\tau)\frac{\sum_{j=0}^{k-2}x_{k-1-j}(t-\tau)^j/j!-\xi_{k-1}}{2}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{k-l}\frac{(t-\tau)^{k-l}}{(k-l)!}\frac{2l(2l+1)\ldots(2l+(k-l)-2)(2l+2(k-l)-1)}{k\ldots(2k-1)}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{l-1}\frac{x_{l-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_l\right)+$$

$$+\frac{(-1)^{k-2}(t-\tau)^{k-2}(x_2-\xi_2+(t-\tau)x_1)}{2(k+1)\ldots(2k-3)}+\frac{(-1)^{k-1}(t-\tau)^{k-1}(x_1-\xi_1)}{k\ldots(2k-2)}\Bigg|^2\Bigg\}, \qquad (23)$$

де додатні сталі C_m, c_0 залежать від n_0, j, m, δ, $\sup_{r,\nu}|a_2^{r\nu}|$, T, $j=\overline{1,n_0}$.

Звівши подібні члени, (23) можна записати таким чином:

$$\left|\partial_{x_j}^m G(t,x;\tau,\xi)\right| \le C_m(t-\tau)^{-\frac{n_0^2+(2j-1)m}{2}} \exp\left\{-c_0^*\left[|x_1-\xi_1|^2 4^{-1}(t-\tau)^{-1}+\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{n_0}(k-1)^2\ldots(2k-3)^2(2k-1)(t-\tau)^{-(2k-1)}\right]\Bigg|x_k-\xi_k+$$

$$+\frac{(t-\tau)(x_{k-1}+\xi_{k-1})}{2}+\ldots+(x_{k-j}-(-1)^j\xi_{k-j})\frac{(t-\tau)^j(j+1)\ldots(k+j-2)}{(j-1)!(k-1)k\ldots(2k-3)}+\ldots$$

$$\left.\ldots+\frac{(x_1-(-1)^{k-1}\xi_1)(t-\tau)^{k-1}}{(2(k-1)k\ldots(2k-3))}\right|^2\Bigg\},$$

$$t-\tau>0, \quad x\in R^{n_0}, \quad x\in R^{n_0}, \quad \xi\in R^{n_0}, \quad m\in N\cup 0.$$

Зауваження. Оцінки (23) є точними, при $n=1$ маємо

$$\partial_t u(t,x)-\sum_{j=1}^{n_0-1}x_j\partial_{x_j+1}u(t,x)=\partial_{x_1}^2u(t,x).$$

Одержимо $G(t,x;\tau,\xi)$ при $t>\tau$:

$$G(t,x;\tau,\xi)=2^{n_0}\pi^{-n_0/2}\prod_{k=1}^{n_0}k(k+1)\ldots(2k-1)^{-1/2}(t-\tau)^{-\frac{2n_0-1}{2}}\times$$

$$\times\exp\Bigg\{-|x_1-\xi_1|^2 4^{-1}(t-\tau)^{-1}-$$

$$-\sum_{k=2}^{n_0}k^2\ldots(2k-3)^2(2k-1)(t-\tau)^{-(2k-1)}\times$$

$$\times\Big|x_k-\xi_k+(t-\tau)(x_{k-1}+\xi_{k-1})2^{-1}+\ldots$$

$$\ldots+(x_{k-j}-(-1)^j\xi_{k-j})\frac{(t-\tau)^j(j+1)\ldots(k+j-2)}{(j-1)!(k-1)k\ldots(2k-3)}+\ldots$$

$$\ldots+(x_1-(-1)^{k-1}\xi_1)(t-\tau)^{k-1}(2(k-1)k\ldots(2k-3))^{-1}\Big|^2\Bigg\}. \tag{24}$$

Зокрема, з (24) при $x=x_1,\ x_2=y\ (n_0=2)$ маємо ФРЗК для рівняння дифузії з інерцією, при $n_0=\overline{2,5}$ одержуємо результати робіт [12, 13].

4. Побудова ФРЗК для системи (1), (2). Запишемо систему (13) для (1), (2) у вигляді

$$dv(t,s)=(a_2(t_0)(is_1)^2-(a_2(t)-a_2(t_0))s_1^2v(t,s)+\sum_{k=0}^{1}a_k(t)(is_1)^kv(t,s))\,dt.$$

Застосувавши лему Гронуолла і використавши параболічність системи (13), отримаємо оцінку нормальної матриці

$$\left|Q(t,\tau,P(t,s_{n_0},c))\right| \le c\exp\left\{-\delta_1\int\limits_{\tau}^{t}\left(\frac{\beta^{n_0-1}s_{n_0}}{(n_0-1)!}+\sum_{k=2}^{n_0}\frac{\beta^{n_{0-k}}}{(n_{0-k})!}c_{k-1}\right)^2 d\beta\right\},$$

де $c>0$, $0<\delta_1<\delta$. Всі подальші міркування аналогічні використаним при встановленні оцінки (28) [1].

Література

1. *Малицька Г. П.* Системи рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 12. – С. 1650 – 1663.
2. *Malyts'ka H. P.* Fundamental solution matrix of the Cauchy problem for a class of systems of Kolmogorov type equations // Different. Equat. – 2010. – **46**, № 5. – P. 753 – 757.
3. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel etc.: Birkhäuser, 2004. – ix + 387 p.
4. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Malytska H. P.* A modified Levi method: development and application // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat., Prirodozn., Tekh. Nauky. – 1998. – № 5. – P. 14 – 19.
5. *Polidoro S.* On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov – Fokker – Planck type // Le Mathematiche. – 1994. – **49**. – P. 53 – 105.
6. *Cinti C., Pascucci A., Polidoro S.* Pointwise estimates for solutions to a class of non-homogeneous Kolmogorov equations // Math. Ann. – 2008. – **340**, № 2. – P. 237 – 264.
7. *Івасишен С. Д., Івасюк Г. П.* Про фундаментальні розв'язки задачі Коші для рівнянь Фоккера – Планка – Колмогорова деяких вироджених дифузійних процесів // Мат. та комп. моделювання. – 2011. – С. 116 – 126.
8. *Буртняк І. В., Малицька Г. П.* Модель шляхозалежної волатильності для індексу ПФТС // Бизнес информ. – 2012. – № 3. – С. 48 – 50.
9. *Буртняк І. В., Малицька Г. П.* Обчислення цін опціонів методами спектрального аналізу // Бизнес информ. – 2013. – № 4. – С. 152 – 158.
10. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
11. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
12. *Буртняк І. В., Малицька Г. П.* Фундаментальні матриці розв'язків одного класу вироджених параболічних систем // Карпат. мат. публ. – 2012. – **4**, № 1. – С. 12 – 22.
13. *Малицька Г. П.* Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією // Вісн. нац. ун-ту „Львів. політехніка". Сер. Прикл. математика. – 2000. – № 411. – С. 221 – 228.

Одержано 31.07.14,
після доопрацювання — 12.03.18