

УДК 517.5

Ю. А. Бабич, Т. Ф. Михайлова (Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. транспорта)

**АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ
ФУНКЦИЯМИ МЕНЬШЕГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ
В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА**

For periodic functions of many variables, the method of their approximation is offered in the Orlicz spaces $L_\varphi(\mathbb{T}^m)$. In this method, the functions are approximated by the sums of functions of smaller number of variables, each of which is piecewise-constant in one of variables for fixed values of the other variables. A Jackson-type inequality is investigated for these approximations in terms of the mixed module of continuity.

Для періодичних функцій багатьох змінних запропоновано метод їх наближень у просторах Орліча $L_\varphi(\mathbb{T}^m)$ сумою функцій меншого числа змінних, кожна з яких є кусково-сталою за однією змінною при фіксованих значеннях решти змінних. Досліджується нерівність типу Джексона для таких наближень у термінах мішаного модуля неперервності.

1. Чтобы сформулировать постановку задачи, введем следующие обозначения: для действительных функций $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, имеющих по каждой переменной период 1, $L_0 \equiv L_0(\mathbb{T}^m)$ — множество измеримых и почти всюду конечных функций на основном торе периодов $\mathbb{T}^m = [0, 1]^m$; Φ — множество непрерывных и неубывающих функций $\varphi : \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^1$, $\varphi(0) = 0$;

$$L_\varphi \equiv L_\varphi(\mathbb{T}^m) = \left\{ f \in L_0; \|f\|_\varphi := \int_{\mathbb{T}^m} \varphi(|f(x)|) dx < \infty \right\}$$

— функциональный класс Орліча; Ω — множество функций ψ из Φ , являющихся модулем неперервности, т. е. ψ — полуаддитивные функции. Тогда $L_\psi \equiv L_\psi(\mathbb{T}^m)$ — метрические пространства.

Для $x \in \mathbb{R}^m$ пусть $(x; \hat{x}_j) := (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$. Обозначим через Σ_m совокупность функций $G(x)$, $x \in \mathbb{T}^m$, вида

$$G(x) = \sum_{j=1}^m g_j(x; \hat{x}_j), \quad g_j \in L_\varphi(\mathbb{T}^{m-1}).$$

Рассмотрим задачу наилучшего приближения функции $f(x)$ m переменных суммой функций $(m - 1)$ -й переменной в пространстве $L_\varphi(\mathbb{T}^m)$:

$$E(f)_\varphi = \inf \left\{ \|f(x) - G(x)\|_\varphi; G \in \Sigma_m \right\}. \tag{1}$$

Поиск наилучших функций G из Σ_m в (1) является, вообще говоря, трудной задачей. В связи с этим мы исследуем аппроксимацию функциями, которые, возможно, и не являются наилучшими из Σ_m , но метод их построения является простым. Для таких функций докажем оценку сверху

приближения в терминах смешанного модуля непрерывности, которая является точной для этого метода в пространствах L_ψ для всех $\psi \in \Omega$ и в L_φ для некоторого класса $\varphi \in \Phi$.

Пусть $\Delta_{t_j}^j f(x)$ — приращение $f(x)$ по переменной x_j с шагом t_j . Для $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}_+^m$

$$\omega(f; h_1, \dots, h_m)_\varphi = \sup \left\{ \|\Delta_{t_1}^1 \dots \Delta_{t_m}^m f\|_\varphi; |t_j| \leq h_j, j = 1, \dots, m \right\}$$

— смешанный модуль непрерывности f .

Для фиксированного $t \in \mathbb{T}^m$ положим

$$G_t(f; x) = f(x) - \Delta_{x_1-t_1} \dots \Delta_{x_m-t_m} f(t).$$

Функция $G_t(f; x)$ является суммой сечений $f(x)$ вдоль координатных плоскостей и принадлежит Σ_m .

Теорема 1. Пусть φ принадлежит Φ . Тогда для f из $L_\varphi(\mathbb{T}^m)$ найдется такое значение параметра $t_f \in \mathbb{T}^m$, что

$$\|f - G_{t_f}(f)\|_\varphi \leq \omega \left(f; \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right)_\varphi. \quad (2)$$

Если φ удовлетворяет условию

$$\varphi(a) \geq \frac{\varphi(2^m)}{2^{2m}} a^2, \quad a = 1, 2, \dots, 2^m, \quad (3)$$

то неравенство (2) является точным в том смысле, что

$$\sup_{\substack{f \in L_\varphi(\mathbb{T}^m) \\ \omega(f; \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})_\varphi \neq 0}} \frac{\|f - G_{t_f}(f)\|_\varphi}{\omega \left(f; \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right)_\varphi} = 1. \quad (4)$$

Доказательство. Существование параметра t_f следует из оценки усреднения уклонений $G_t(f)$ по всем t :

$$\int_{t \in \mathbb{T}^m} \|f - G_t(f)\|_\varphi dt = \int_{t \in \mathbb{T}^m} \|\Delta_{t_1}^1 \dots \Delta_{t_m}^m f\|_\varphi dt \leq \omega \left(f; \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right)_\varphi.$$

Для построения экстремальных функций в (4) используем функции одной переменной, построенные В. А. Юдиным (см. [1]).

Пусть $y \in \mathbb{R}^1$. Для простого числа $q > 2$ построим разбиение периода $[0, 1]$ равноотстоящими точками $y_j = jq^{-1}$, $j = 0, 1, \dots, q-1$, и определим 1-периодическую функцию $f_q(y)$ условиями $f_q(y) = \left(\frac{j}{q}\right)$ при $y \in (y_{j-1}, y_j]$ $j = 1, 2, \dots, q-1$, и $f_q(y) = 0$ при $y \in (t_{q-1}, 1]$,

где $\left(\frac{j}{q}\right)$ — символ Лежандра [2, с. 70].

В случае $m > 1$ для $x = (x_1, \dots, x_m)$ положим

$$F_q(x) = \prod_{k=1}^m f_q(x_k).$$

Лемма 1. Пусть функция φ из Φ удовлетворяет условию (3). Тогда

$$\frac{\int_{t \in \mathbb{T}^m} \|\Delta_{t_1}^1 \dots \Delta_{t_m}^m F_q\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^m)} dt}{\omega\left(F_q; \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)_{L_\varphi(\mathbb{T}^m)}} = 1 - c_q, \tag{5}$$

где $c_q > 0$ и $c_q \rightarrow 0$ при $q \rightarrow \infty$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $m = 1$. Поскольку [2, с. 82]

$$\sum_{r=0}^{q-1} \binom{r}{q} \binom{r+j}{q} = -1, \quad j = 1, \dots, q-1,$$

то для любого y_j

$$\begin{aligned} -\frac{1}{q} &= \int_0^1 f_q(y) f_q(y + y_j) dy = \mu\{y \in [0, 1] : f_q(y) f_q(y + y_j) = 1\} - \\ &\quad - \mu\{y \in [0, 1] : f_q(y) f_q(y + y_j) = -1\} + \frac{2}{q} =: \mu^+ - \mu^- + \frac{2}{q}. \end{aligned}$$

Так как $\mu^+ + \mu^- + \frac{2}{q} = 1$, то $\mu^- = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{q}\right)$, поэтому

$$\|\Delta_{y_j} f_q\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^1)} = \int_0^1 \varphi(|f_q(y + y_j) - f_q(y)|) dy = \varphi(2) \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{q}\right) + \varphi(1) \cdot \frac{2}{q}.$$

Функция $\|\Delta_t f_q\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^1)}$ является кусочно-монотонной функцией аргумента t на отрезках $[y_j, y_{j+1}]$, значит,

$$\omega\left(f_q, \frac{1}{2}\right)_{L_\varphi(\mathbb{T}^1)} = \sup_j \|\Delta_{y_j} f_q\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^1)} = \varphi(2) \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{q}\right) + \varphi(1) \frac{2}{q}. \tag{6}$$

С другой стороны, используя (3), имеем

$$\|\Delta_t f_q\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^1)} \geq \frac{\varphi(2)}{2^2} \int_0^1 |f_q(y) - f_q(y+t)|^2 dy = \varphi(2) \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q} - \int_0^1 f_q(y) f_q(y+t) dy\right),$$

и так как $\int_0^1 f_q(t) dt = 0$, то

$$\int_0^1 \|\Delta_t f_q\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^1)} dt \geq \varphi(2) \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right). \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует (5) в случае $m = 1$.

При $m > 1$ доказательство аналогично. Пусть для простоты изложения $m = 2$. Тогда

$$\Delta_{t_1}^1 \Delta_{t_2}^2 F_q(x) = \Delta_{t_1}^1 f_q(x_1) \Delta_{t_2}^2 f_q(x_2),$$

$$\begin{aligned}
\|\Delta_{y_{j_1}}^1 \Delta_{y_{j_2}}^2 F_q\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^2)} &= \int_0^1 \int_0^1 \varphi(|\Delta_{y_{j_1}} f_q(x_1)| |\Delta_{y_{j_2}} f_q(x_2)|) dx_1 dx_2 = \\
&= \varphi(2^2) \mu\{x \in [0, 1]^2 : |\Delta_{y_{j_1}} f_q(x_1)| |\Delta_{y_{j_2}} f_q(x_2)| = 2^2\} + \\
&\quad + \varphi(2) \mu\{x \in [0, 1]^2 : |\Delta_{y_{j_1}} f_q(x_1)| |\Delta_{y_{j_2}} f_q(x_2)| = 2\} + \\
&\quad + \varphi(1) \mu\{x \in [0, 1]^2 : |\Delta_{y_{j_1}} f_q(x_1)| |\Delta_{y_{j_2}} f_q(x_2)| = 1\} = \\
&= \varphi(2^2) \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{q}\right)\right)^2 + \varphi(2) \frac{2}{q} \left(1 + \frac{1}{q}\right) + \varphi(1) \left(\frac{2}{q}\right)^2 = \frac{1}{2^2} \varphi(2^2) + c_1(q), \quad (8)
\end{aligned}$$

где $c_1(q) \rightarrow 0$ при $q \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
\omega\left(F_q; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{L_\varphi(\mathbb{T}^2)} &= \sup_{j_1, j_2} \|\Delta_{t_1}^1 \Delta_{t_2}^2 F_q\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^2)} = \frac{1}{2^2} \varphi(2^2) + c_1(q), \\
&\int_0^1 \int_0^1 \|\Delta_{t_1}^1 \Delta_{t_2}^2 F_q\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^2)} dt_1 dt_2 \geq \\
&\geq \frac{1}{2^4} \varphi(2^2) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |\Delta_{t_1} f_q(x_1)|^2 |\Delta_{t_2} f_q(x_2)|^2 dx_1 dx_2 dt_1 dt_2 = \\
&= \frac{1}{2^4} \varphi(2^2) \left(2 \left(1 - \frac{1}{q}\right)^2\right) = \frac{1}{2^2} \varphi(2^2) \left(1 - \frac{1}{q}\right)^2. \quad (9)
\end{aligned}$$

Из (8) и (9) следует (5).

Лемма 1, а значит, и теорема 1 доказаны.

Заметим, что условие (3) выполняется для всех $\varphi \in \Omega$, а также, например, и для функций $\varphi(x) = |x|^p$ при $p \in [1, 2]$.

2. Используем теорему 1 для приближения функций $f(x)$ из $L_\varphi(\mathbb{T}^m)$ функциями вида $S(x) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x)$, где каждая из функций $\varphi_j(x)$ является кусочно-постоянной по переменной x_j (при фиксированных остальных переменных).

Для заданного вектора $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ построим равномерные разбиения осей координат: j -ю координату тора периодов разобьем на n_j отрезков длины $\frac{1}{n_j}$ точками $y_{r_j} = \frac{r_j}{n_j}$, $r_j = 0, 1, \dots, n_j$. Пусть $\chi_j(x_j)$ — характеристическая функция отрезка $\left[0, \frac{1}{n_j}\right]$, а функция $\varphi_j(x)$ имеет вид

$$\varphi_j(x) = \sum_{r_j=1}^{n_j} g_{r_j}(x; \hat{x}_j) \chi_j(x_j - y_{r_j}),$$

где $g_{r_j}(x; \hat{x}_j)$ — произвольные функции из $L_\varphi(\mathbb{T}^{m-1})$, не зависящие от переменной x_j .

Для данного $t \in \mathbb{T}^m$ пусть

$$f_t(x) := f(x + t)$$

– сдвиг $f(x)$ на параметр t . Рассмотрим аппроксимацию

$$\int_{t \in \mathbb{T}^m} \|f_t - S_n\|_\psi dt,$$

усредненную по всем сдвигам f . В качестве приближающей функции S_n выберем

$$S_n(f_t; x) := f_t(x) - \sum_{r_1=1}^{n_1} \dots \sum_{r_m=1}^{n_m} \Delta_{y_{r_1}-x_1}^1 \dots \Delta_{y_{r_m}-x_m}^m f_t(x) \chi_1(x_1 - y_{r_1}) \dots \chi_m(x_m - y_{r_m}).$$

Легко видеть, что функция $S_n(f_t; x)$ принадлежит аппроксимирующему подпространству. Например, при $m = 2$

$$\begin{aligned} S_n(f_t; x) = & - \sum_{r_2=1}^{n_2} f_t(x_1, y_{r_2}) \chi(x_2 - y_{r_2}) - \sum_{r_1=1}^{n_1} f_t(y_{r_1}, x_2) \chi(x_1 - y_{r_1}) + \\ & + \sum_{r_1=1}^{n_1} \sum_{r_2=1}^{n_2} f_t(y_{r_1}, y_{r_2}). \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть φ принадлежит Φ . Тогда для любой $f \in L_\varphi(\mathbb{T}^m)$ выполняется неравенство

$$\int_{t \in \mathbb{T}^m} \|f_t - S_n(f_t)\|_\varphi dt \leq \omega\left(f; \frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_m}\right)_\varphi. \tag{10}$$

Если для φ выполнено (3), то неравенство (10) в пространстве $L_\varphi(\mathbb{T}^m)$ точное:

$$\sup_{\substack{f \in L_\varphi(\mathbb{T}^m) \\ \omega\left(f; \frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_m}\right)_\varphi \neq 0}} \frac{\int_{t \in \mathbb{T}^m} \|f_t - S_n(f_t)\|_\varphi dt}{\omega\left(f; \frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_m}\right)_\varphi} = 1. \tag{11}$$

Доказательство. На каждом кубе разбиения

$$\Pi_{r_1 \dots r_m} = \{x \in \mathbb{T}^m; x_i \in [y_{r_i}, y_{r_{i+1}}), i = 1, \dots, m\}$$

разность $f_t(x) - S_n(f_t; x)$ имеет вид

$$f_t(x) - S_n(f_t; x) = \Delta_{y_{r_1}-x_1}^1 \dots \Delta_{y_{r_m}-x_m}^m f_t(x),$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{t \in \mathbb{T}^m} \|f_t - S_n(f_t)\|_\varphi dt = \\ & = \sum_{r_1=1}^{n_1} \dots \sum_{r_m=1}^{n_m} \int_{t \in \mathbb{T}^m} \int_{x \in \Pi_{r_1 \dots r_m}} \varphi(|\Delta_{y_{r_1}-x_1}^1 \dots \Delta_{y_{r_m}-x_m}^m f(t+x)|) dx dt = \end{aligned}$$

$$= n_1 \dots n_m \int_{h_1=0}^{\frac{1}{n_1}} \dots \int_{h_m=0}^{\frac{1}{n_m}} \|\Delta_{h_1}^1 \dots \Delta_{h_m}^m f\|_{\varphi} dh_1 \dots dh_m \leq \omega \left(f; \frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_m} \right)_{\varphi}.$$

Для оценки снизу в (11) выберем $f(x) = F_q(x)$ и применим лемму 1.

Теорема 2 доказана.

Использованный нами метод усреднения по сдвигам оказался эффективным при аппроксимации периодических функций одной переменной тригонометрическими полиномами в пространствах $L_p(\mathbb{T}^1)$, $p \in (0, 1)$ [3], и $L_{\psi}(\mathbb{T}^1)$ [4, 5]. В работах [6, 7] этот же метод применялся при аппроксимации в $L_{\psi}(\mathbb{T}^1)$ кусочно-постоянными функциями.

Доказанные нами теоремы являются одним из возможных многомерных аналогов результатов работы [6]. Лемма 1 ранее было доказана в случае $m = 1$ для пространств $L_p(\mathbb{T}^1)$, $p \in (0, 2)$ [1], и $L_{\psi}(\mathbb{T}^1)$, $\psi \in \Omega$ [6].

Литература

1. Пичугов С. А. Константы Юнга пространства L_p // Мат. заметки. – 1988. – **43**, № 5. – С. 604–614.
2. Виноградов И. М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981. – 172 с.
3. Руновский К. В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p , $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1994. – **185**, № 8. – С. 81–102.
4. Пичугов С. А. О теореме Джексона для периодических функций в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 122–123.
5. Пичугов С. А. О теореме Джексона для периодических функций в метрических пространствах с интегральной метрикой. II // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 11. – С. 1524–1533.
6. Пичугов С. А. Приближение константой периодических функций в метрических пространствах $\varphi(L)$ // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 8. – С. 1095–1098.
7. Пичугов С. А. Гладкость функций в метрических пространствах L_{ψ} // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 9. – С. 1214–1232.

Получено 28.11.17