УДК 517.53

М. Є. Коренков, Ю. І. Харкевич (Східноєвроп. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк)

ПРО АСИМПТОТИКУ АСОЦІЙОВАНИХ СИГМА-ФУНКЦІЙ І ТЕТА-ФУНКЦІЙ ЯКОБІ

For the associated sigma-functions, Jacobi theta-functions, and their logarithmic derivatives, we present asymptotic formulas valid outside an efficiently constructed exceptional sets of discs.

Для асоційованих сигма-функцій, тета-функцій Якобі та їх логарифмічних похідних наведено асимптотичні формули, які є правильними зовні виняткових множин кругів, що побудовані ефективно.

У роботі [1] отримано асимптотичні формули для асоційованих сигма-функцій $\sigma_j(z),\ j = \overline{1,3}$ [2, с. 379], та тета-функцій Якобі $\vartheta_k(z),\ k = \overline{1,4}$ [2, с. 394 – 396], які правильні зовні деякої множини виняткових кругів. Укажемо тут асимптотику цих функцій та їх логарифмічних похідних зовні множини кругів, які будуються ефективно, і точніше оцінимо залишкові члени асимптотичних формул із [1]. При цьому будемо суттєво використовувати результати роботи [3], які стосуються асимптотики функцій Вейєрштрасса $\sigma(z),\ \zeta(z)$ [2, с. 372, 374]. Як відомо, $\zeta(z) = \dfrac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$, нулі $\Omega_{mn} = = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\omega_3}{\omega_1}\right) > 0,\ m, n \in \mathbb{Z}$, функції $\sigma(z)$ є полюсами функції $\zeta(z)$.

Зазначені вище функції пов'язані між собою рівностями [2, с. 394 – 396]

$$\sigma_j(z) = \sigma^{-1}(\omega_j)\exp(-\eta_j z)\sigma(z+\omega_j), \tag{1}$$

$$\sigma(z) = 2\omega_1 \frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_1'(0)}\exp\left(\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\right), \tag{2}$$

$$\sigma_j(z) = \frac{\vartheta_{j+1}(u)}{\vartheta_{j+1}(0)}\exp\left(\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\right), \tag{3}$$

де $\omega_2 = \omega_1 + \omega_3,\quad \eta_j = \zeta(\omega_j),\quad j = \overline{1,3},\quad u = \dfrac{z}{2\omega_1}$. Мають місце також співвідношення Лежандра

$$2\omega_2\eta_1 - 2\omega_1\eta_2 = \pi i, \qquad 2\omega_3\eta_1 - 2\omega_1\eta_3 = \pi i. \tag{4}$$

Говорять, що система K кругів $K_s = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_s| < r_s\},\ s \in \mathbb{N}$, де $z_s \in \mathbb{C},\ \ z_s \to \infty$ $(s \to \infty)$, має нульову μ-щільність, $1 \le \mu \le 2$, якщо

$$\sum_{|z_s| \le r} r_s^{\mu} = o(r^{\mu}), \qquad r \to \infty.$$

Якщо попереднє співвідношення правильне при $\mu = 1$, то говорять, що система K має нульову лінійну щільність.

***Зауваження* 1.** Якщо вказана вище система кругів має нульову μ-щільність, $1 \le \mu \le 2$, то цю ж властивість має і система кругів

$$\widetilde{K}_s = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - (z_s - \omega)| < r_s\}, \qquad s \in \mathbb{N} \quad (\omega \in \mathbb{C}, \omega \ne 0),$$

що випливає із співвідношень $(r \to \infty)$

$$\frac{1}{r^{\mu}} \sum_{|z_s - \omega| \le r} r_s^{\mu} \le \left(1 + \frac{|\omega|}{r}\right)^{\mu} \frac{1}{(r + |\omega|)^{\mu}} \sum_{|z_s| \le r + |\omega|} r_s^{\mu} = o(1).$$

Не втрачаючи загальності подальших міркувань, будемо вважати, що

$$\omega_1 = \frac{1}{2}, \quad \omega_3 = \frac{\lambda}{2} e^{i\alpha}, \qquad 0 < \lambda < +\infty, \quad 0 < \alpha < \pi, \tag{5}$$

тобто

$$\Omega_{mn} = m + n\lambda e^{i\alpha}, \qquad m, n \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Тоді $\omega_2 = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} e^{i\alpha}$ та $\eta_1 = \zeta\left(\frac{1}{2}\right)$, $\eta_3 = \zeta\left(\frac{\lambda}{2} e^{i\alpha}\right)$, $\eta_2 = \zeta\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} e^{i\alpha}\right)$. За умов (5) $u = z$, рівність (1) формально не змінюється і з рівностей (2), (3) випливають співвідношення

$$\vartheta_1(z) = \vartheta_1'(0)\sigma(z)\exp(-\eta_1 z^2), \tag{7}$$

$$\vartheta_{j+1}(z) = \vartheta_{j+1}(0)\sigma_j(z)\exp(-\eta_1 z^2), \quad j = \overline{1,3}. \tag{8}$$

Розглянемо далі клас A додатних зростаючих на $(0; +\infty)$ функцій $\varphi(t)$ таких, що

$$\varphi(t) \to +\infty, \qquad \varphi(t) = o(t^2), \qquad \varphi(t + d) = O(\varphi(t)) \quad (t \to +\infty), \tag{9}$$

де d — довільна стала, $d > 0$. Через A_α позначимо підклас класу A тих функцій $\varphi(t)$ з A, які додатково задовольняють ще й умову

$$\varphi(t) \ge \alpha \ln t \quad (1 < t < +\infty), \quad \alpha > 1. \tag{10}$$

Якщо φ — фіксована функція із класу A, то позначимо $(j = \overline{1,3}, \omega_0 = 0)$

$$E_j(\varphi) = \bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}} K_{mn}^{(j)}, \qquad K_{mn}^{(j)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - (\Omega_{mn} - \omega_j)| < \exp(-\varphi(|\Omega_{mn}|)) \right\}. \tag{11}$$

Введемо також позначення

$$U(z) = \frac{\pi(|z|^2 - \mathrm{Re} z^2)}{2\lambda \sin\alpha}, \qquad V(z) = U(z) + \mathrm{Re}(\eta_1 z^2), \qquad \eta_1 = \zeta\left(\frac{1}{2}\right). \tag{12}$$

Теорема 1. *Якщо* $\varphi \in A$, *то за умов* (5), (6)

$$\ln|\sigma_j(z)| = V(z) + O(\varphi(|z|)) \qquad (z \to \infty, \quad z \notin E_j(\varphi)), \quad j = \overline{1,3}, \tag{13}$$

$$\ln|\vartheta_{j+1}(z)| = U(z) + O(\varphi(|z|)) \qquad (z \to \infty, \quad z \notin E_j(\varphi)), \quad j = \overline{0,3}. \tag{14}$$

Зауваження 2. Якщо $\varphi \in A_\alpha$, то множини $E_j(\varphi)$, $j = \overline{0,3}$, мають нульову лінійну щільність, як це випливає з теореми 1 роботи [3] і зауваження 1.

***Доведення теореми* 1.** У роботі [3] показано, що за умов (5), (6) і $\varphi \in A$ має місце формула

$$\ln|\sigma(z)| = V(z) + O(\varphi(|z|)) \quad (z \to \infty, \ z \notin E_0(\varphi)), \tag{15}$$

де $V(z)$ задається рівностями (12), а $E_0(\varphi)$ — рівностями (11) із $j=0, \quad \omega_0=0$. Оскільки

$$V(z+\omega_j)=V(z)+\frac{2\pi}{\lambda\sin\alpha}\operatorname{Im}\omega_j\operatorname{Im}z+\operatorname{Re}(2\eta_1\omega_j z)+O(1),$$

то, покладаючи $z+\omega_j$ замість z у (15), отримуємо $(j=\overline{0,3})$

$$\ln|\sigma(z+\omega_j)|=V(z+\omega_j)+O(\varphi(|z+\omega_j|))=$$

$$=V(z)+\frac{2\pi}{\lambda\sin\alpha}\mathrm{Im}\omega_j\mathrm{Im}z+\mathrm{Re}(2\eta_1\omega_j z)+O(\varphi(|z|))$$

$$(z\to\infty,\ z\notin E_0(\varphi)), \tag{16}$$

де множини $E_j(\varphi)$ задаються рівностями (11). Тут ми скористалися співвідношеннями

$$\varphi(|z+\omega_j|)\le\varphi(|z|+|\omega_j|)=O(\varphi(|z|))\ \ (z\to\infty),\quad j=\overline{1,3}.$$

Оскільки внаслідок (1) $\ln|\sigma_j(z)|=\ln|\sigma(z+\omega_j)|-\operatorname{Re}(\eta_j z)-\ln|\sigma(\omega_j)|$, то на основі (16) приходимо до рівностей $(j=\overline{1,3})$

$$\ln|\sigma_j(z)|=V(z)+\frac{2\pi}{\lambda\sin\alpha}\operatorname{Im}\omega_j\operatorname{Im}z+\operatorname{Re}[z(2\eta_1\omega_j-\eta_j)]+$$

$$+O(\varphi(|z|))=V(z)+L_j(z)+O(\varphi(|z|))\quad(z\to\infty,\ \ z\notin E_j(\varphi)), \tag{17}$$

де

$$L_j(z)=\frac{2\pi}{\lambda\sin\alpha}\operatorname{Im}\omega_j\operatorname{Im}z+\operatorname{Re}[z(2\eta_1\omega_j-\eta_j)]. \tag{18}$$

Із рівності $\omega_1=\dfrac{1}{2}$ випливає, що $L_1(z)\equiv 0$. За умов (5) на основі співвідношень Лежандра (4) отримуємо

$$\operatorname{Re}[z(2\eta_1\omega_j-\eta_j)]=\operatorname{Re}(\pi i z)=-\pi\operatorname{Im}z,\qquad j=2,3.$$

Оскільки перший доданок у (18) при $j=2,3$ дорівнює $\pi\mathrm{Im}z$, то $L_j(z)\equiv 0$ при вказаних j. Отже, $L_j(z)\equiv 0,\ \ j=\overline{1,3}$, і тому рівність (17) набирає вигляду (13).

Оскільки внаслідок (7) $\ln|\vartheta_1(z)|=\ln|\sigma(z)|-\mathrm{Re}(\eta_1 z^2)+\ln|\vartheta_1'(0)|$, то, використовуючи (15) і позначення (12), отримуємо

$$\ln|\vartheta_1(z)|=V(z)-\operatorname{Re}(\eta_1 z^2)+O(\varphi(|z|))=U(z)+O(\varphi(|z|))$$

$(z\to\infty,\ z\notin E_0(\varphi))$, тобто має місце формула (14) при $j=0$. Із рівностей (8) випливає $(j=\overline{1,3})$

$$\ln|\vartheta_{j+1}(z)|=\ln|\sigma_j(z)|-\operatorname{Re}(\eta_1 z^2)+\ln|\vartheta_{j+1}(0)|.$$

Тому, використовуючи рівності (13) і позначення (12), одержуємо $(j=\overline{1,3})$

$$\ln|\vartheta_{j+1}(z)|=V(z)-\operatorname{Re}(\eta_1 z^2)+O(\varphi(|z|))=U(z)+O(\varphi(|z|))$$

$(z\to\infty,\ z\notin E_j(\varphi))$, тобто мають місце формули (14).

Теорему 1 доведено.

Розглянемо клас S додатних зростаючих на $(0;+\infty)$ функцій $\psi(t)$ таких, що

$$\psi(t)\to+\infty,\qquad \psi(t)=o(t),\qquad \psi(t+d)=O(\psi(t))\quad (t\to+\infty),\quad 0<d=\text{const}.$$

Через S_β позначимо підклас класу S тих функцій $\psi(t)$ з S, які додатково задовольняють ще й умову

$$\psi(t)\ge t^\beta,\qquad (0<t<+\infty),\quad 0<\beta<1.$$

Якщо ψ — фіксована функція із класу S, то позначимо $(j=\overline{0,3},\ \omega_0=0)$

$$T_j(\psi)=\bigcup_{m,n\in\mathbb{Z}}P_{mn}^{(j)},\qquad P_{mn}^{(j)}=\left\{z\in\mathbb{C}:|z-(\Omega_{mn}-\omega_j)|<\frac{1}{\psi(|\Omega_{mn}|)}\right\}.$$

Теорема 2. *Якщо $\psi\in S$, то за умов* (5), (6)

$$\frac{\sigma_j'(z)}{\sigma_j(z)}=2\eta_1 z-\frac{2\pi i}{\lambda\sin\alpha}\operatorname{Im}z+O(\psi(|z|))\qquad (z\to\infty,\quad z\notin T_j(\psi)),\quad j=\overline{1,3},\tag{19}$$

$$\frac{\vartheta_{j+1}'(z)}{\vartheta_{j+1}(z)}=-\frac{2\pi i}{\lambda\sin\alpha}\mathrm{Im}z+O(\psi(|z|))\ (z\to\infty,\ z\notin T_j(\psi)),\ \ j=\overline{0,3}.\tag{20}$$

Зазначимо, що формули (19), (20) випливають із рівностей $(j=\overline{1,3})$

$$\frac{\sigma_j'(z)}{\sigma_j(z)}=\zeta(z+\omega_j)-\eta_j,\quad \frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)}=\zeta(z)-2\eta_1 z,\quad \frac{\vartheta_{j+1}'(z)}{\vartheta_{j+1}(z)}=\frac{\sigma_j'(z)}{\sigma_j(z)}-2\eta_1 z$$

та асимптотичної формули

$$\zeta(z)=2\eta_1 z-\frac{2\pi i}{\lambda\sin\alpha}\operatorname{Im}z+O(\psi(|z|))\qquad (z\to\infty,\quad z\notin T_0(\psi)),$$

яка вказана в теоремі 2 з [3].

***Зауваження* 3.** Якщо $\psi\in S_\beta$, то кожна множина $T_j(\psi)$, $j=\overline{0,3}$, при довільному μ такому, що $\dfrac{2}{1+\beta}<\mu\le 2$, має нульову μ-щільність, що також випливає з теореми 2 роботи [3].

Література

1. *Коренков Н. Е.* Об асимптотических свойствах сигма-функций Вейерштрасса и тета-функций Якоби // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 5. – С. 707–710.
2. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2 т. – М.: Наука, 1968. – Т. 2. – 624 с.
3. *Зайонц Ю., Коренков М. Є., Харкевич Ю. І.* Про асимптотику деяких функцій Вейєрштрасса // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 1. – С. 135–138.

Одержано 18.09.17