УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, С. В. Конарева (Днепр. нац. ун-т)

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА – СТЕЧКИНА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

We introduce new characteristics for elements of Hilbert spaces, namely, generalized moduli of continuity $\omega_\varphi(x, L_{p,V}([0, \delta]))$ and obtain new exact Jackson – Stechkin-type inequalities with these moduli of continuity for the approximation of elements of Hilbert spaces. These results include numerous well-known inequalities for the approximation of periodic functions by trigonometric polynomials, approximation of nonperiodic functions by entire functions of exponential type, similar results for almost periodic functions, etc. Some of these results are new even in these classical cases.

Введено нові характеристики елементів гільбертового простору — узагальнені модулі неперервності $\omega_\varphi(x, L_{p,V}([0, \delta]))$ та отримано нові точні нерівності типу Джексона – Стєчкіна з цими модулями неперервності для апроксимації елементів гільбертового простору. Ці результати містять багато відомих нерівностей для апроксимації періодичних функцій тригонометричними поліномами, апроксимації неперіодичних функцій цілими функціями експоненціального типу, аналогічні результати для майже періодичних функцій та інші. Деякі результати є новими вже в цих класичних випадках.

1. Введение. Пусть X — нормированное пространство над полем комплексных чисел. Наилучшим приближением элемента $x \in X$ подпространством $W \subset X$ называется величина

$$E\,(f, W)_X = \inf_{h \in W} \|f - h\|_X.$$

Если G — действительная ось $\mathbb{R}$ или единичная окружность $\mathbb{T}$, реализованная как отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами, то через $X(G)$ будем обозначать нормированное пространство комплекснозначных функций, заданных на G. В частности, мы будем рассматривать пространства $L_p(G)$ и $C(G)$. Наилучшее приближение функции $f \in X(\mathbb{T})$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$ будем обозначать через $E_n(f)_{X(\mathbb{T})}$.

Модуль непрерывности порядка $m \in \mathbb{N}$ функции $f \in X(G)$ определяется так:

$$\omega_m(f, \delta)_{X(G)} = \sup_{0 \le t \le \delta} \left\|\Delta_t^m f\right\|_{X(G)} = \sup_{0 \le t \le \delta} \left\| \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k f(\cdot + kt) \right\|_{X(G)}.$$

Неравенства, оценивающие величины $E(f, W)_{X(G)}$ через значение модуля непрерывности $\omega_m(f, \delta)_{X(G)}$ в некоторой точке δ, называются неравенствами типа Джексона (Джексона – Стечкина при $m \ge 2$). Первое точное неравенство типа Джексона для наилучших равномерных приближений функций из $C(\mathbb{T})$ тригонометрическими полиномами было получено Н. П. Корнейчуком [1] в 1962 году. Аналогичный результат для наилучших равномерных приближений функций $f \in C(\mathbb{R})$ целыми функциями экспоненциального типа σ был получен В. К. Дзядыком [2].

В 1967 г. Н. И. Черных [3, 4] доказал два неулучшаемых неравенства для функций $f \in \in L_2(\mathbb{T})$:

$$E_n\left(f\right)_{L_2(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_1\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big)_{L_2(\mathbb{T})}, \qquad E_n\left(f\right)_{L_2(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}}\omega_m\left(f, \frac{2\pi}{n}\right)_{L_2(\mathbb{T})}, \quad m \geq 2. \quad (1)$$

(Для $f \neq$const имеет место знак строгого неравенства.)

Аналогичные результаты для наилучших $L_2(\mathbb{R})$-приближений функций $f \in L_2(\mathbb{R})$ целыми функциями экспоненциального типа σ были получены в [5, 6], а для наилучших приближений B^2-почти периодических функций — в [7, 8].

Для получения неравенств (1) в [3, 4] были установлены точные неравенства вида

$$E_n(f) \leq K \left\{ \int\limits_0^\delta \omega_m^2(f,t)v(t)dt \right\}^{1/2} \qquad (2)$$

с $\delta = \pi/n$ и $v(t) = \sin nt$ для $m = 1$ и с $\delta = 2\pi/n$ и $v(t) = \sin nt + 2\sin(nt/2)$ для $m \geq 2$.

Л. В. Тайков [9, 10] начал систематическое исследование задачи о точных неравенствах вида (2). В дальнейшем работы многих математиков были посвящены получению точных неравенств такого типа. Информацию о полученных в этом направлении результатах и дальнейшие ссылки см. в работах [11, 12].

В связи со вторым из неравенств (1) изучались, в частности, следующие вопросы.

1. Чему равна точная константа в неравенстве

$$E_n\left(f\right)_{L_2(\mathbb{T})} \leq \chi\omega_m\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big)_{L_2(\mathbb{T})}, \quad m \geq 2? \qquad (3)$$

2. Каково должно быть минимальное значение $\delta > 0$, чтобы для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{T})$

$$E_n\left(f\right)_{L_2(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}}\omega_m\left(f, \frac{\delta}{n}\right)_{L_2(\mathbb{T})}, \quad m \geq 2? \qquad (4)$$

В [13, 14] показано, что для точной константы χ в неравенстве (3) имеет место оценка $\chi \leq$ $\leq \dfrac{\sqrt{m+1}}{2^m}$. В [13] также показано, что для минимальной точки δ в неравенстве (4) справедлива оценка $\delta \leq 1{,}4\pi$.

Неравенства типа Джексона – Стечкина с обобщенными модулями непрерывности, введенными в работах Г. Шапиро и Я. Бомана [15 – 17] (совокупность таких модулей непрерывности содержит, помимо классических, модули непрерывности, порожденные более общими, по сравнению с $\Delta_t^m f$, конечно-разностными операторами, разностными операторами дробных порядков, и многие другие), изучались, например, в работах [13, 18 – 20].

В ряде работ (см., например, [21, 22]) задача о точных неравенствах типа Джексона – Стечкина изучалась в абстрактных гильбертовых пространствах. Целью данной статьи является дальнейшее изучение этой задачи.

В пункте 2 приведены два неравенства для операторов в гильбертовом пространстве. Некоторые необходимые факты из спектральной теории приведены в пункте 3. В пункте 4 введены обобщенные модули непрерывности элементов гильбертова пространства. Точные оценки величин $\big|(x - \Lambda x, f)\big|$ в терминах введенных характеристик получены в пункте 5 (при этом использованы неравенства из пункта 2), а неравенства типа Джексона – Стечкина в гильбертовом пространстве — в пункте 6. Некоторые конкретизации результатов из пункта 6 обсуждаются в пункте 7.

2. Одно неравенство для операторов в гильбертовом пространстве. Пусть H — комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$. Пусть $S, T\colon H \to H$ — линейные ограниченные операторы, такие, что $ST = TS$. Будем предполагать, что оператор $S|_{T(H)} : T(H) \to S(T(H))$ имеет обратный $(S|_{T(H)})^{-1}$. Через T^* и S^* будем, как обычно, обозначать сопряженные операторы.

Теорема 1. *Для любых $f \in H$ и $x \in H$ выполняется неравенство*

$$\big|(Tx, f)\big| \le \|Sx\| \, \big\|\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* f\big\|. \tag{5}$$

Если

$$\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^*(H) \subset S(T(H)), \tag{6}$$

то неравенство (5) *является точным и обращается в равенство для*

$$\tilde{x} = (S|_{T(H)})^{-1}\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* f. \tag{7}$$

Доказательство. Имеем

$$\big|(Tx, f)\big| = \big|((S|_{T(H)})^{-1}S|_{T(H)}Tx, f)\big| = \big|((S|_{T(H)})^{-1}STx, f)\big| =$$

$$= \big|((S|_{T(H)})^{-1}TSx, f)\big| = \Big|\big(Sx, \big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* f\big)\Big| \le \|Sx\| \Big\|\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* f\Big\|.$$

Неравенство (5) доказано.

Для элемента $\tilde{x}$ имеем

$$S\tilde{x} = S(S|_{T(H)})^{-1}\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* f = S|_{T(H)}(S|_{T(H)})^{-1}\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* f = \big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* f.$$

Следовательно,

$$(T\tilde{x}, f) = \big(S\tilde{x}, \big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* f\big) = \big(\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* f, \big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* f\big) =$$

$$= \big\|\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* f\big\|^2 = \big\|\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* f\big\| \, \big\|\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* f\big\| =$$

$$= \|S\tilde{x}\| \, \big\|\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* f\big\|.$$

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Для любого $x \in H$*

$$\|Tx\| \le \|Sx\| \, \big\|\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^*\big\|. \tag{8}$$

Если выполнено условие (6), *то неравенство* (8) *является точным.*

Доказательство. Из неравенства (5) получаем

$$\|Tx\| = \sup_{\substack{f \in H \\ \|f\| \le 1}} |(Tx, f)| \le \|Sx\| \sup_{\substack{f \in H \\ \|f\| \le 1}} \big\|\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* f\big\| = \|Sx\| \, \big\|\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^*\big\|.$$

Докажем точность полученного неравенства. Пусть элемент $\tilde{f} \in H$, $\|\tilde{f}\| = 1$, таков, что

$$\Big\|\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* \tilde{f}\Big\| = \big\|\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^*\big\|.$$

Положим

$$\tilde{x} = (S|_{T(H)})^{-1}\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* \tilde{f}.$$

Тогда будем иметь (см. доказательство точности неравенства (5))

$$\|T\tilde{x}\| \ge \big|(T\tilde{x}, \tilde{f})\big| = \|S\tilde{x}\| \Big\|\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^* \tilde{f}\Big\| = \|S\tilde{x}\| \, \big\|\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^*\big\|.$$

Следствие доказано.

3. Необходимые сведения из спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве. Пусть задано гильбертово пространство H. Говорят (см. [23], гл. XIII, §1), что на σ-алгебре $\mathcal{B}$ борелевских подмножеств числовой прямой задано разложение единицы E, если каждому $\beta \in \mathcal{B}$ поставлен в соответствие проектирующий оператор $E(\beta)$ в H, причем выполняются следующие условия:

1) $E(\varnothing) = 0,\ E(\mathbb{R}) = I$;

2) для любой последовательности $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$, состоящей из попарно непересекающихся множеств,

$$E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \beta_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E(\beta_j).$$

Заданное разложение единицы порождает [23] (гл. XIII, § 6, 7) группу унитарных операторов U_t и самосопряженный оператор A:

$$U_t x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}\, dE(s)x, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad Ax = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, dE(t)x.$$

Измеримая и почти везде конечная функция $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ определяет функцию $F(A)$ от самосопряженного оператора A:

$$F(A)x = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, dE(t)x.$$

При этом

$$D(F(A)) := \left\{ x \in H\colon \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2\, d(E(t)x, x) < \infty \right\} \quad \text{и} \quad \|F(A)x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2\, d(E(t)x, x).$$

Для сопряженного оператора $F(A)^*$ и для оператора, обратного к $F(A)$ (если он определен), имеем

$$F(A)^* x = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(t)}\, dE(t)x \quad \text{и} \quad F(A)^{-1}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{F(t)}\, dE(t)x.$$

4. Обобщенные модули непрерывности элементов гильбертова пространства. Обозначим через Φ множество непрерывных неотрицательных 2π-периодических функций ψ, имеющих нигде не плотное множество нулей и таких, что $\psi(0) = 0$. Пусть $\widehat{f}_s$ — коэффициенты Фурье функции f, $\psi(\cdot) \in \Phi$. В работах [15 – 17] было предложено обобщенным модулем непрерывности функции $f \in L_2(\mathbb{T})$ называть функцию

$$\omega_\psi(f, \delta)_{L_2(\mathbb{T})} = \max_{t \in [0,\delta]} \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} \psi(st) |\widehat{f}_s|^2 \right)^{1/2}, \quad \delta \geq 0.$$

Пусть $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция, такая, что $\psi(t) = \left|\varphi(e^{it})\right|^2 \in \Phi$. В частности, $\varphi(1) = 0$ и на любой дуге окружности $|z| = 1$ функция $\varphi(z)$ отлична от тождественного нуля. Определим обобщенную разность элемента $x \in H$ с шагом t, положив

$$\Delta_t^\varphi x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(e^{its}\right) dE(s)x.$$

Ясно, что

$$\|\Delta_t^\varphi x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\varphi(e^{its})\right|^2 d\big(E(s)x, x\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(st)\, d\big(E(s)x, x\big).$$

Отметим, что $\|\Delta_t^\varphi x\|$ непрерывно зависит от t и $\|\Delta_t^\varphi x\| \to 0,\ t \to 0.$

Обобщенным модулем непрерывности элемента x гильбертова пространства H назовем

$$\omega_\varphi(x, \delta) = \max_{0 \le t \le \delta} \|\Delta_t^\varphi x\| = \| \|\Delta_t^\varphi x\| \|_{C([0,\delta])} = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\,(st)\, d\big(E(s)x, x\big) \right\|_{C([0,\delta])}^{1/2}. \tag{9}$$

Кроме $\omega_\varphi(x, \delta) = \omega_\varphi\big(x, C([0,\delta])\big)$ будем рассматривать характеристики $\omega_\varphi\big(x, L_{p,V}([0,\delta])\big)$, в которых $1 \le p < \infty$, $V(t)$ — вес, т. е. неотрицательная интегрируемая на $[0,1]$ функция, отличная от нуля на множестве полной меры. Положим

$$\omega_\varphi\big(x, L_{p,V}([0,\delta])\big) = \left(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \|\Delta_t^\varphi x\|^p V\left(\frac{t}{\delta}\right) dt \right)^{1/p}.$$

Ясно, что

$$\omega_\varphi\big(x, L_{2,V}([0,\delta])\big) = \left(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta V\left(\frac{t}{\delta}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\,(st)\, d\big(E(s)x, x\big) dt \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(V, \delta s)\, d\big(E(s)x, x\big) \right)^{1/2},$$

где

$$\Gamma(V, t) = \int_0^1 \psi(tv) V(v)\, dv.$$

Функция $\Gamma(V, t)$ непрерывно зависит от t и равна нулю только в точке нуль. Отметим, что при любом $\delta > 0$ будет $\omega_\varphi\big(x; L_{p,V}([0,\delta])\big) \to \omega_\varphi\big(x; C([0,\delta])\big)$, если $p \to \infty$.

Ниже нам будет удобно предполагать, что $\|V(\cdot)\|_1 := \|V(\cdot)\|_{L_1([0,1])} = 1$. Тогда в силу неравенства Гельдера для $2 \le p \le \infty$ при всех $\delta > 0$ имеем

$$\omega_\varphi\big(x, L_{2,V}([0,\delta])\big) \le \omega_\varphi\big(x, L_{p,V}([0,\delta])\big). \tag{10}$$

5. Оценки величин $|(x-\Lambda x, f)|$. Будем рассматривать задачи аппроксимации элементов гильбертова пространства подпространствами вида

$$W_\sigma = \left\{ \int\limits_{|t|<\sigma} dE(s)g\colon g \in H \right\}, \quad \sigma > 0.$$

Для аппроксимации будем использовать линейные методы приближения вида

$$\Lambda x = \int\limits_{|t|<\sigma} \lambda(t)\, dE(t)x,$$

где $\lambda(t)$ — непрерывная в $(-\sigma,\sigma)$, ограниченная, комплекснозначная функция, тождественно равная единице в некотором интервале $(-\varepsilon,\varepsilon)$, $0<\varepsilon<\sigma$. Тогда

$$(I-\Lambda)x = x - \Lambda x = \int\limits_{|t|<\sigma} (1-\lambda(t))\, dE(t)x + \int\limits_{|t|\geq\sigma} dE(t)x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\, dE(t)x,$$

где $\theta(t) = 1-\lambda(t)$, если $|t|<\sigma$, и $\theta(t)=1$, если $|t|\geq\sigma$.

Для любого элемента $x \in H$ такого, что $x \neq U_t x$ при некотором t, рассмотрим значение функционала $f \in H^* = H$ на разности $x - \Lambda x$. Получим неравенства, связывающие $|(x - \Lambda x, f)|$ и $\omega_\varphi\big(x, L_{2,V}([0,\delta])\big)$. В теореме 1 положим $S = \Gamma(V,\delta\cdot)^{1/2}(A)$, $T = I-\Lambda$, T и S — ограниченные операторы. При этом в силу того, что $\theta(t)\equiv 0$ для $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, а непрерывная функция $\Gamma(V,\delta t)$ равна нулю только в точке нуль, оператор $(S|_{T(H)})^{-1}$ существует,

$$(S|_{T(H)})^{-1}T = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(t)\, dE(t)}{\Gamma(V,\delta t)^{1/2}}, \qquad \Big((S|_{T(H)})^{-1}\, T \Big)^* = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\theta(t)}\, dE(t)}{\Gamma(V,\delta t)^{1/2}}$$

(как обычно, считаем, что $0/0=0$) и для любых $x, f \in H$

$$\|Sx\|^2 = \omega_\varphi\big(F(A)x, L_{2,V}([0,\delta])\big)^2, \qquad \left\| \Big((S|_{T(H)})^{-1}\, T \Big)^* f \right\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(t)|^2\, d(E(t)f,f)}{\Gamma(V,\delta t)}. \quad (11)$$

Используя неравенство (5), получаем

$$\big|(x-\Lambda x, f)\big| \leq \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(t)|^2 d(E(t)f,f)}{\Gamma(V,\delta t)} \right)^{1/2} \omega_\varphi\big(x, L_{2,V}([0,\delta])\big). \quad (12)$$

Как следует из теоремы 1, это неравенство обращается в равенство для элемента

$$\tilde{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\theta(t)}}{\Gamma(V,\delta t)} dE(t)f.$$

Действительно, используя свойство мультипликативности спектральных интегралов (см. [23], гл. XIII, §2), нетрудно проверить, что для определенных в данном пункте операторов S и T условие (6) выполняется. Нетрудно также проверить, что для $x \in S(T(H))$

$$(S|_{T(H)})^{-1}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(V,\delta t)^{1/2}}\, dE(t)x.$$

Используя формулу (7) и свойство мультипликативности спектральных интегралов, получаем, что неравенство (12) обращается в равенство для элемента

$$\tilde{x} = (S|_{T(H)})^{-1}\big((S|_{T(H)})^{-1}T\big)^{*} f =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(V,\delta t)^{1/2}}\, dE(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\theta(t)}}{\Gamma(V,\delta t)^{1/2}}\, dE(t) f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\theta(t)}}{\Gamma(V,\delta t)}\, dE(t) f.$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для произвольной непрерывной в* $(-\sigma,\sigma)$, *ограниченной, комплекснозначной функции* $\lambda(t)$ *такой, что* $\lambda(t) \equiv 1$ *в* $(-\varepsilon,\varepsilon)$, $0<\varepsilon<\sigma$, *линейного метода приближения* $\Lambda x = \int_{|t|<\sigma} \lambda(t)\, dE(t)x$, *любого элемента* $x \in H$ *такого, что* $x \neq U_t x$ *для некоторого* t, *любого элемента* $f \in H$ *и любого веса* $V(t)$ *имеет место неулучшаемое неравенство* (12)*. В частности,*

$$\left|\left(x - \int\limits_{|t|<\sigma} dE(t)x, f\right)\right| \le \left(\int\limits_{|t|\ge\sigma} \frac{d(E(t)f,f)}{\Gamma(V,\delta t)}\right)^{1/2} \omega_{\varphi}\big(x, L_{2,V}([0,\delta])\big).$$

6. Неравенства типа Джексона – Стечкина. Из неравенства (8) с учетом (11) выводим

$$\|x-\Lambda x\|^2 \le \left\|\Big(\big(S|_{T(H)}\big)^{-1} T\Big)^{*}\right\|^2 \omega_{\varphi}\big(x, L_{2,V}([0,\delta])\big)^2.$$

Положим

$$\mathcal{H}(V,\lambda,\delta,\sigma) = \sup_{|t|<\sigma} \frac{|1-\lambda(t)|^2}{\Gamma(V,\delta t)}, \qquad \mathcal{G}(V,\delta,\sigma) = \inf_{|t|\ge\sigma} \Gamma(V,\delta t).$$

Тогда будем иметь

$$\left\|\Big(\big(S|_{T(H)}\big)^{-1} T\Big)^{*}\right\|^2 = \sup_{\|f\|=1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(t)|^2 d(E(t)f,f)}{\Gamma(V,\delta t)} \le$$

$$\le \sup_{\|f\|=1} \left(\sup_{|t|<\sigma} \frac{|1-\lambda(t)|^2}{\Gamma(V,\delta t)} \int\limits_{|t|<\sigma} d(E(t)f,f) + \sup_{|t|\ge\sigma} \frac{1}{\Gamma(V,\delta t)} \int\limits_{|t|\ge\sigma} d(E(t)f,f) \right) \le$$

$$\le \max\left\{ \mathcal{H}(V,\lambda,\delta,\sigma), \frac{1}{\mathcal{G}(V,\delta,\sigma)} \right\}.$$

Покажем, что если разложение единицы таково, что $E\big([t,t+\varepsilon]\big) \neq 0$ для произвольных $t \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$, то

$$\left\| \left(\left(S|_{T(H)} \right)^{-1} T \right)^* \right\|^2 = \max \left\{ \mathcal{H}(V, \lambda, \delta, \sigma), \frac{1}{\mathcal{G}(V, \delta, \sigma)} \right\}. \tag{13}$$

Рассмотрим случай, когда $\max \left\{ \mathcal{H}(V, \lambda, \delta, \sigma), \dfrac{1}{\mathcal{G}(V, \delta, \sigma)} \right\} = \dfrac{1}{\mathcal{G}(V, \delta, \sigma)}$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $t_\varepsilon,\ |t_\varepsilon| \geq \sigma$, таково, что $\Gamma(V, \delta t_\varepsilon) \leq \mathcal{G}(V, \delta, \sigma) + \varepsilon$ (для определенности будем считать, что $t_\varepsilon \geq \sigma$.) Пусть $\gamma > 0$ настолько мало, что в интервале $[t_\varepsilon, t_\varepsilon + \gamma]$ выполняется неравенство $\Gamma(V, \delta t) \leq \Gamma(V, \delta t_\varepsilon) + \varepsilon$ (в силу непрерывности функции $\Gamma(V, \delta t)$ такой выбор γ возможен). Выберем элемент $f_\varepsilon \in E\big([t_\varepsilon, t_\varepsilon + \gamma]\big)(H)$ так, что $\|f_\varepsilon\| = 1$. Тогда получим

$$\sup_{\|f\|=1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(t)|^2 d(E(t)f, f)}{\Gamma(V, \delta t)} \geq \int\limits_{[t_\varepsilon, t_\varepsilon+\gamma]} \frac{d(E(t)f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{\Gamma(V, \delta t)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\mathcal{G}(V, \delta, \sigma) + 2\varepsilon} \int\limits_{[t_\varepsilon, t_\varepsilon+\gamma]} d(E(t)f_\varepsilon, f_\varepsilon) = \frac{1}{\mathcal{G}(V, \delta, \sigma) + 2\varepsilon}.$$

В силу произвольности ε в рассматриваемом случае соотношение (13) доказано. Случай, когда $\max \left\{ \mathcal{H}(V, \lambda, \delta, \sigma), \dfrac{1}{\mathcal{G}(V, \delta, \sigma)} \right\} = \mathcal{H}(V, \lambda, \delta, \sigma)$, рассматривается аналогично.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Для любого элемента $x \in H$ такого, что $x \neq U_t x$ при некотором t, выполняется неравенство*

$$\|x - \Lambda x\|^2 \leq \max \left\{ \mathcal{H}(V, \lambda, \delta, \sigma), \frac{1}{\mathcal{G}(V, \delta, \sigma)} \right\} \omega_\varphi\big(x, L_{2,V}([0, \delta])\big)^2. \tag{14}$$

В частности, для наилучшего приближения элемента $x \in H$ подпространством W_σ имеем

$$E_\sigma(x)^2 = \left\| x - \int\limits_{|t|<\sigma} dE(t)x \right\|^2 \leq \frac{1}{\mathcal{G}(V, \delta, \sigma)} \omega_\varphi\big(x, L_{2,V}([0, \delta])\big)^2. \tag{15}$$

Если разложение единицы таково, что $E\big([t, t+\varepsilon]\big) \neq 0$ для произвольных $t \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$, то неравенства (14) *и* (15) *являются точными.*

Следствие 2. *В условиях теоремы* 3 *при $2 \leq p \leq \infty$ имеет место неравенство*

$$E_\sigma(x) \leq \frac{1}{\mathcal{G}(V, \delta, \sigma)^{1/2}} \omega_\varphi\big(x, L_{p,V}([0, \delta])\big). \tag{16}$$

Приведем обобщения некоторых результатов из [13, 19].

Если найдется такой вес $V = \widetilde{V}$ (напомним, что $\|V\|_1 = 1$), что для него при некотором $\gamma > 0$ выполняется неравенство

$$\mathcal{G}\left(V, \frac{\gamma}{\sigma}, \sigma\right) = \mathcal{G}(V, 1, \gamma) \geq \mathcal{I}(\psi), \tag{17}$$

где $\mathcal{I}(\psi) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \psi(t)\, dt$, то из (16) при $2 \leq p \leq \infty$ будем иметь

$$E_\sigma(x) \le \frac{1}{\sqrt{\mathcal{I}(\psi)}}\omega_\varphi\Big(x, L_{p,\widetilde{V}}\Big(\Big[0, \frac{\gamma}{\sigma}\Big]\Big)\Big). \tag{18}$$

В частности, при $p = \infty$

$$E_\sigma(x) \le \frac{1}{\sqrt{\mathcal{I}(\psi)}}\omega_\varphi\Big(x, C\Big(\Big[0, \frac{\gamma}{\sigma}\Big]\Big)\Big) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{I}(\psi)}}\omega_\varphi\Big(x, \frac{\gamma}{\sigma}\Big). \tag{19}$$

В [19] доказано, что такой вес существует, и приведена схема построения функции $\widetilde{V}(t)$.

Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 4. *Для любой функции* $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *такой, что* $\psi \in \Phi$, *существует точка* $\gamma > 0$ *такая, что для любых* $x \in H$ *и* $\sigma > 0$ *выполняются неравенства* (18) *и* (19).

Сузим по сравнению с Φ класс рассматриваемых функций ψ. Через Ψ обозначим (см. [13]) совокупность функций $\psi \in \Phi$ таких, что:

1) $\psi(-t) = \psi(t)$ и $\psi(\pi - t) = \psi(\pi + t)$ для $t \in \mathbb{R}$;

2) $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \psi(s)\,ds \le \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \psi(s)\,ds$ для любого $t \in (0, \pi)$.

Пусть

$$Z(t) = \begin{cases} \dfrac{2t}{7}, & t \in \Big[0, \dfrac{1}{7}\Big], \\ \dfrac{-t^2}{2} + \dfrac{3t}{7} - \dfrac{1}{98}, & t \in \Big[\dfrac{1}{7}, \dfrac{5}{7}\Big], \\ \dfrac{t^2}{2} - t + \dfrac{1}{2}, & t \in \Big[\dfrac{5}{7}, 1\Big]. \end{cases}$$

Положим $V^*(t) = Z(t)/\|Z(\cdot)\|_1$. Из результатов работы [13] (теорема 1) следует, что для веса $V = V^*$, для $\psi \in \Psi$ и любого $\gamma \ge \dfrac{7\pi}{5}$ выполняется неравенство (17). Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Для любой функции* $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *такой, что* $\psi \in \Psi$, *для любых* $\gamma \ge \dfrac{7\pi}{5}$, $x \in H$ *и* $\sigma > 0$ *выполняются неравенства* (18) (*с заменой* $\widetilde{V}$ *на* V^*) *и* (19).

Теперь рассмотрим вес

$$\widehat{V}(t) = \begin{cases} 5/4, & t \in [0, 1/2], \\ 3/4, & t \in (1/2, 1], \end{cases} \qquad \|\widehat{V}\|_1 = 1.$$

В [13] (теорема 2) показано, что для $\psi \in \Psi$ и $\gamma = \pi$ выполняется неравенство

$$\mathcal{G}\Big(\widehat{V}, \frac{\gamma}{\sigma}, \sigma\Big) \ge \frac{3}{4}\mathcal{I}(\psi).$$

Из (16) следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 6. *Для любой функции* $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *такой, что* $\psi \in \Psi$, *любых* $x \in H$ *и* $\sigma > 0$ *выполняется неравенство*

$$E_\sigma(x) \le \Big(\frac{4}{3}\Big)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{I}(\psi)}}\omega_\varphi\Big(x, L_{p,\widehat{V}}\Big(\Big[0, \frac{\pi}{\sigma}\Big]\Big)\Big), \quad 2 \le p \le \infty. \tag{20}$$

7. Некоторые приложения. Приведенные выше результаты включают в себя ряд точных неравенств типа Джексона – Стечкина (см., например, [13, 19]) для наилучших L_2-приближений периодических функций тригонометрическими полиномами, результаты по наилучшим L_2-приближениям функций, заданных на всей оси целыми функциями экспоненциального типа, а также аналогичные результаты для почти периодических функций. В этих конкретных случаях некоторые результаты являются новыми.

Результаты для периодических функций получаются, если в пространстве $L_2(\mathbb{T})$ выбрать разложение единицы следующим образом. Для любых борелевского множества $\beta \subset \mathbb{T}$ и функции $x \in L_2(\mathbb{T})$

$$E(\beta)x(t) := \sum_{k \in \beta} \hat{x}_k \, e^{ikt}.$$

Результаты для функций из $L_2(\mathbb{R})$ получаются, если в этом пространстве выбрать разложение единицы, соответствующее оператору $\dfrac{1}{i}\dfrac{d}{du}$, для которого, в силу формулы обращения преобразования Фурье,

$$E\big([s,t]\big)x(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it(z-u)} - e^{is(z-u)}}{i(z-u)} x(z)\, dz, \qquad s,t \in \mathbb{R}, \quad s < t.$$

Подробнее остановимся на случае почти периодических функций. В линейном пространстве Π функций, почти периодических по Бору, можно ввести скалярное произведение (см. [24], дополнение, §7) $(x,y) = M\big[x(t)\overline{y(t)}\big] = \lim_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T x(t)\overline{y(t)}\, dt$ и норму $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$. Пополняя полученное предгильбертово пространство, получаем гильбертово пространство $\widetilde{\Pi}$, которое содержится в пространстве B^2 функций, почти периодических по Безиковичу (пространства такого типа рассматривались, например, в [25]). Для $x \in \widetilde{\Pi}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ положим

$$a(x,\lambda) = M\big[x(t)e^{-i\lambda t}\big].$$

Как известно, для любой $x \in \widetilde{\Pi}$ множество $\mathrm{Sp}(x) = \{\lambda \colon a(x,\lambda) \neq 0\}$ не более чем счетно.

В пространстве $\widetilde{\Pi}$ определим разложение единицы следующим образом. Для любых борелевского множества $\beta \subset \mathbb{R}$ и функции $x \in \widetilde{\Pi}$

$$E(\beta)x(t) := \sum_{\lambda \in \beta \cap \mathrm{Sp}(x)} a(x,\lambda)e^{i\lambda t}.$$

Тогда будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dE(s)x(t) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(x)} a(x,\lambda)e^{i\lambda t}.$$

Для $\sigma > 0$ положим

$$\mathcal{E}_\sigma(x) = \inf_{\substack{y \in \widetilde{\Pi} \\ \mathrm{Sp}(y) \subset (-\sigma,\sigma)}} \|x - y\|.$$

Будем для простоты рассматривать только функции $x \in \widetilde{\Pi}$, для которых $\mathrm{Sp}(x)$ имеет единственную предельную точку в бесконечности. В силу равенства Парсеваля

$$\mathcal{E}_\sigma^2(x) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(x) \\ |\lambda| \geq \sigma}} |a(x,\lambda)|^2.$$

Теперь легко видеть, что для величин $\mathcal{E}_\sigma(x)$ и обобщенных модулей непрерывности $\omega_\varphi(x,\delta)$, построенных с помощью определенного выше разложения единицы, справедливы теорема 3, следствие 2, а также (при дополнительных предположениях о функции φ) теоремы 4 – 6.

Литература

1. *Корнейчук Н. П.* Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. – 1962. – **145**. – С. 514 – 515.
2. *Дзядик В. К.* Про точні верхні грані найкращих наближень на деяких класах функцій, визначених на дійсній осі // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1975. – № 7. – С. 589 – 592.
3. *Черных Н. И.* О неравенстве Джексона в L_2 // Труды Мат. ин-та АН. – 1967. – **88**. – С. 71 – 74.
4. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. – 1967. – **2**, № 5. – С. 513 – 522.
5. *Ибрагимов И. И., Насибов Ф. Г.* Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций констепени // Докл. АН СССР. – 1970. – **194**, № 5. – С. 1013 – 1016.
6. *Попов В. Ю.* О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. – 1972. – **121**, № 6. – С. 65 – 73.
7. *Притула Я. Г.* О неравенстве Джексона для B^2-почти периодических функций // Изв. вузов. Математика. – 1972. – **123**, № 8. – С. 90 – 93.
8. *Притула Я. Г., Яцимірський М. М.* Оцінки наближень B^2 майже періодичних функцій // Вопросы математического анализа и его приложение: Вести Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. – 1983. – Вып. 21. – С. 3 – 7.
9. *Тайков Л. В.* Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Мат. заметки. – 1977. – **22**, вып. 4. – С. 535 – 542.
10. *Тайков Л. В.* Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Мат. заметки. – 1979. – **25**, вып. 2. – С. 217 – 223.
11. *Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А.* Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сиб. мат. журн. – 2011. – **52**, № 6. – С. 1414 – 1427.
12. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* Неравенства типа Джексона – Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Мат. заметки. – 2012. – **92**, вып. 4. – С. 497 – 514.
13. *Васильев С. Н.* Неравенство Джексона – Стечкина в $L_2[-\pi,\pi]$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2001. – **7**, № 1. – С. 75 – 84.
14. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Прямые и обратные теоремы теории приближения функций в пространстве S^p // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 106 – 124.
15. *Shapiro H. S.* Tauberian theorem related to approximation theory // Acta Math. – 1968. – **120**. – P. 279 – 292.
16. *Shapiro H. S., Boman J.* Comparison theorems for a generalized modulus of continuity // Ark. Mat. – 1971. – **9**, № 1. – P. 91 – 116.
17. *Boman J.* Equivalence of generalized modulus of continuity // Ark. Mat. – 1980. – **18**, № 1. – P. 73 – 100.
18. *Бабенко А. Г.* О неравенстве Джексона – Стечкина для наилучших L_2-приближений функций тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2001. – **7**, № 1. – С. 30 – 46.
19. *Васильев С. Н.* Точное неравенство Джексона – Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. – 2002. – **385**, № 1. – С. 11 – 14.
20. *Козко А. И., Рождественский А. В.* О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности // Мат. сб. – 2004. – **195**, № 8. – С. 3 – 46.
21. *Горбачук М. Л., Грушка Я. І., Торба С. М.* Прямі й обернені теореми в теорії наближень методом Рітца // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 5. – С. 633 – 643.
22. *Бабенко В. Ф., Савела С. В.* Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 1. – С. 18 – 27.
23. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Вища шк., 1990. – 600 с.
24. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
25. *Кузьмина А. Л.* Пространства $L^p(AP)$ и их сопряженные // Изв. вузов. Математика. – 2008. – № 7. – С. 11 – 18.

Получено 11.10.16,
после доработки — 28.03.17