УДК 512.7

Б. Р. Зайналов (Самарканд. гос. ун-т, Узбекистан)

ПЕРВАЯ НЕТРИВИАЛЬНАЯ ГРУППА ГОМОЛОГИЙ СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ СХЕМ УНИМОДУЛЯРНЫХ РЕПЕРОВ НАД ДЕДЕКИНДОВЫМ КОЛЬЦОМ

We prove a theorem on generation of the first nontrivial group of homologies of a simplicial scheme of unimodular frames over the Dedekind ring by standard cycles.

Доведено теорему про породження стандартними циклами першої нетривіальної групи гомологій симпліціальної схеми унімодулярних реперів над дедекіндовим кільцем.

Введение. Проблема стабилизации и предстабилизации является одной из классических в алгебраической K-теории. Основы этого направления заложили теоремы Серра [18] о выщеплении свободных прямых слагаемых в проективных модулях, Басса [12] о сокращении, Басса – Вассерштейна [1 – 5] о стабилизации полной линейной группы.

Для колец арифметического типа с бесконечной группой единиц [8, 13] имеются достаточные основания ожидать, что стабилизация наступает на один шаг раньше, чем это предсказывает общая теория. Для функтора K_1 этот результат доказан Л. Н. Вассерштейном [6], для K_2 — ван дер Калленом [15] и Колстером [17]. Колстер [16] дал также решение проблемы предстабилизации для K_2.

После появления высшей K-теории начались попытки доказывать теоремы о стабилизации для высших K-функторов. Наиболее интересными и распространенными нестабильными K-функторами являются функторы Квиллена и Володина. Проблема стабилизации в K-теории Квиллена равносильна проблеме стабилизации для гомологий полной линейной группы. Эта проблема глубоко изучена и в основном решена в работах ван дер Каллена [14] и А. А. Суслина [19].

Основой для решения проблемы стабилизации является изучение некоторых симплициальных множеств, связанных с унимодулярными реперами. Для доказательства теорем о стабилизации необходимо уметь доказывать достаточно сильную ацикличность симплициального множества унимодулярных реперов [9, 14, 19]. Аналогично, если вычислить первую нетривиальную группу гомологий соответствующего симплициального множества, то это даст ответ на проблему предстабилизации [8, 11].

Данная работа посвящена доказательству основной теоремы, в которой утверждается, что первая нетривиальная группа гомологий симплициальной схемы унимодулярных реперов над дедекиндовым кольцом порождена стандартными циклами. Основной результат статьи доказан в пункте 2, пункты 1 и 3 содержат необходимые вспомогательные результаты.

1. Свойства симплициальных схем унимодулярных реперов над дедекиндовыми кольцами. Для произвольного множества V обозначим через $\varepsilon(V)$ множество его непустых конечных подмножеств. Симплициальной схемой назовем пару (V,F), где $F\subset\varepsilon(V)$, причем F вместе с каждым множеством содержит все его непустые подмножества. Пусть $s = \{\vartheta_0,\ldots,\vartheta_p\}\in F$ — некоторый симплекс. Обозначим через F_s множество тех конечных подмножеств $t\in\varepsilon(V)$, для которых $t\bigcap s=\varnothing$ и $t\bigcup s\in F$ является подсхемой схемы F [7].

Пусть A — ассоциативное кольцо с единицей. Обозначим через A^∞ свободный левый А-модуль со счетным базисом $e_1,\ldots,e_n,\ldots$, а через A^n его подмодуль с базисом $e_1,\ldots,e_n$. Элементы из A^n будем, как правило, представлять столбцами их координат в базисе $e_1,\ldots,e_n$, тем самым отождествляя A^n с $M_{n,1}(A)$. Если $(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_k)\in A^n$, то будем отождествлять последовательность $(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_k)$ с соответствующей матрицей из $M_{n,k+1}(A)$. Через $U=\mathrm{Um}(A^\infty)$ будем обозначать симплициальную схему, k-симплексами которой являются множества $\{\vartheta_0,\ldots,\vartheta_k\}$ такие, что ϑ_i унимодулярный в совокупности или, другими словами, образует унимодулярный репер. В частности, $\varepsilon(A^n)\bigcap U=\mathrm{Um}(A^n)$ [9].

Предложение 1.1. *Пусть A — произвольное кольцо $m\geq n+\mathrm{s.r.}\,A$, где $\mathrm{s.r.}\,A$ — стабильный ранг кольца, и $(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_n)$ — унимодулярный репер в A^{m+1}. Прибавляя последнюю координату к первым m, можно добиться, чтобы A^m — часть репера $(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_n)$ — стала унимодулярной.*

Доказательство проведем индукцией по n. Если $n=0$, то утверждение непосредственно следует из определения стабильного ранга. Заметим, что при доказательстве утверждения мы можем заменить репер $(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_n)$ на $(\alpha\vartheta_0,\ldots,\alpha\vartheta_n)$ для любой матрицы $\alpha\in GL_{m+1}(A)$ вида $\alpha=\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Кроме того, можно заменить репер $(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_n)$ на $(\vartheta_0+\lambda_0\vartheta_n,\ldots,\vartheta_{n-1}+\lambda_{n-1}\vartheta_n,\vartheta_n)$ для любых $\lambda_i\in A$. Пусть $n\geq 1$. В силу определения стабильного ранга, прибавляя последнюю координату к первым m, можно считать, что A^m — часть вектора ϑ_n — унимодулярна. Поскольку группа $GL_m(A)$ транзитивно действует на унимодулярных векторах, так как $m\geq \mathrm{s.r.}\,A+n\geq \mathrm{s.r.}\,A+1$, то можно считать далее, что $\vartheta_n=(1,0,\ldots,0,*)^T$. Вычитая теперь из ϑ_i подходящие кратные ϑ_n, можно считать, что $\vartheta_i=(0,\omega_i)^T$ при $i=0,\ldots,n-1$, где $\omega_i\in A^m$. Репер $(\omega_0,\ldots,\omega_{n-1})$ унимодулярен. По индукционному предположению, прибавив $(m+1)$-ю координату к координатам с номерами $2,\ldots,m$, можно добиться, чтобы $\omega_i=(\omega_i',*)^T$, где $(\omega_0',\ldots,\omega_{n-1}')$ — унимодулярный репер в A^{m-1}. Теперь A^m — часть репера $(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_n)$ — имеет вид $\begin{pmatrix} 0\ldots 0 & 1 \\ \omega_0'\ldots\omega_{n-1}' & * \end{pmatrix}$ и, значит, унимодулярна [9].

Всюду ниже будем считать, что A — дедекиндово кольцо [10]. Из теоремы Басса [1] следует, что стабильный ранг [4] дедекиндового кольца не превышает 2 и имеет место следующее утверждение.

***Следствие* 1.1.** *Если $m\geq n+2$ и $(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_n)$ — унимодулярный репер в A^{m+1}, то, прибавив последнюю координату к первым, можно добиться, чтобы A^m — часть репера $(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_n)$ — стала унимодулярной.*

Предложение 1.2. *Пусть заданы векторы* $(u_0,\ldots,u_k)\in A^{m-1}$, $(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-k-1})\in A^m$. *Предположим, что* $n<m$ *и при любом* $i=0,\ldots,k$ *векторы* $(u_0,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_k,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-k-1})$ *унимодулярны в совокупности. Прибавляя последнюю координату к оставшимся, можно добиться, чтобы* $(u_0,\ldots,u_k,\bar{\vartheta}_1,\ldots,\bar{\vartheta}_{n-k-1})$ *имели те же свойства (где знак* $\wedge$ *над* $\hat{u}_i$ *означает, что эта компонента отбрасывается и* $\bar{\vartheta}_i$, ϑ_i *без последней координаты).*

Доказательство. Как и выше, можно умножить все векторы на любую матрицу вида $\begin{pmatrix}\beta & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, где $\beta\in GL_{m-1}(A)$. Применяя следствие 1.1 к унимодулярному реперу $(u_1,\ldots,u_k,$ $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1-i})$ и действуя транзитивно [1], можно считать, что

$$(u_0,\ldots,u_k,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1-i}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1\ldots0 & 0\ldots0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_k & 0\ldots1 & 0\ldots0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1 & 0\ldots0 & 1\ldots0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_{n-k-1} & 0\ldots0 & 0\ldots1 \\ \theta_1 & 0\ldots0 & 0\ldots0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_{m-n} & 0\ldots0 & 0\ldots0 \\ 0 & 0\ldots0 & y_1\ldots y_{n-k-1} \end{pmatrix}.$$

Унимодулярность репера $(u_0,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_k,\vartheta_0,\ldots,\vartheta_{n-k-1})$ при $i=1,\ldots,k$ равносильна унимодулярности строки $\left(\sum_{j=1}^{n-k-1}\mu_j y_j,\lambda_i,\theta_1,\ldots,\theta_{m-n}\right)$ [9]. Прибавляя последнюю строку к верхним строкам $k+1,\ldots,n-k-1$, не меняя при этом строки, а затем опуская последнюю строку, получаем $\begin{pmatrix}\lambda & 1_k & \lambda' y \\ \mu & 0 & 1_{n-k-1} \\ \theta & 0 & \theta' y\end{pmatrix}$. Унимодулярность этого репера без u_0 очевидна, а при $i\geq 1$ унимодулярность без u_i равносильна унимодулярности строки

$$\left(\lambda_i-\lambda_i'\sum_{j=1}^{n-k-1}\mu_j y_j,\ \theta_1-\theta_1'\sum_{j=1}^{n-k-1}\mu_j y_j,\ldots,\theta_{m-n}-\theta_{m-n}'\sum_{j=1}^{n-k-1}\mu_j y_j\right).$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.1. *Пусть* $x,\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\theta_1,\ldots,\theta_s\in A$, *причем* $s\geq 1$ *и при любом* i *строка* $(x,\lambda_i,\theta_1,\ldots,\theta_s)$ *унимодулярна. Прибавляя к* λ *и* θ *подходящие кратные* x, *можно добиться, чтобы при любом* i *строка* $(\lambda_i,\theta_1,\ldots,\theta_s)$ *была унимодулярна.*

Доказательство. Можно считать, что $x \neq 0$. Прибавив x к λ, добьемся, чтобы $\lambda_i \neq 0$. Тогда размерность кольца $A / \prod_{i=1}^{k} \lambda_i$ равна нулю и s.r. $A / \prod_{i=1}^{k} \lambda_i$. Поскольку строка $(x, \theta_1, \ldots, \theta_s)$ унимодулярна в $A / \prod_{i=1}^{k} \lambda_i$, то, прибавив x к θ, добьемся, чтобы строка $(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ была унимодулярна в $A / \prod_{i=1}^{k} \lambda_i$, т. е. чтобы строки $(\lambda_i, \theta_1, \ldots, \theta_s)$ были унимодулярны в A.

Предложение 1.3. *Пусть заданы векторы* $(u_1, \ldots, u_k, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_s) \in A^{\infty}$, *причем*:

а) $u_i \in A^{k+s}$;

б) $(u_1, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, u_k, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_s)$ — *унимодулярный репер для любого* $i = 1, \ldots, k$.

Тогда существует $u_0 \in A^{k+s}$ *такой, что*:

1) $(u_0, u_1, \ldots, \hat{u}_{i_1}, \ldots, \hat{u}_{i_2}, \ldots, u_k, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_s)$ — *унимодулярный репер для любых* $i_1 \neq i_2$;

2) $(u_0, u_1, \ldots, \hat{u}, \ldots, u_k, \vartheta_1, \ldots, \hat{\vartheta}_j, \ldots, \vartheta_s)$ — *унимодулярный репер при любых* $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, s$;

3) *при любом* $i = 1, \ldots, k$ *репер* $(u_0, u_1, \ldots, \hat{u}_{i_1}, \ldots, \hat{u}_{i_2}, \ldots, u_k, \vartheta_1 - \vartheta_s, \ldots, \vartheta_{s-1} - \vartheta_s)$ *унимодулярен*.

Доказательство. Справедливость утверждения, очевидно, не нарушится, если мы заменим векторы u, ϑ на αu, $\alpha\vartheta$, где $\alpha \in GL(A)$ и $\alpha \cdot A^{k+s} = A^{k+s}$ [9]. В частности, можно прибавлять координаты с большими номерами к координатам с меньшими номерами и действовать матрицами из $GL_{k+s}(A)$. В силу предложения 1.2 можно считать, что векторы $(u_1, \ldots, u_k, \bar{\vartheta}_1, \ldots, \bar{\vartheta}_s)$ удовлетворяют условию б), где $\bar{\vartheta}_j$ есть A^{k+s} — часть вектора ϑ_j. Если мы сумеем подобрать вектор u_0, который удовлетворяет требованиям 1 и 2 для u и $\bar{\vartheta}$, то u_0 будет удовлетворять этим требованиям и для u и ϑ. Таким образом, можно считать, что $\vartheta_j \in A^{k+s}$. Поскольку группа $GL_{k+s}(A)$ транзитивно действует на унимодулярные реперы [1], то мы можем считать, что репер (u, ϑ) имеет вид, указанный в таблице

λ_1	$1 \ldots 0$	$0 \ldots 0$	λ_1'
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
λ_{k-1}	$0 \ldots 1$	$0 \ldots 0$	λ_{k-1}'
μ_1	$0 \ldots 0$	$0 \ldots 1$	μ_1'
μ_s	$0 \ldots 0$	$0 \ldots 1$	μ_s'
x	$0 \ldots 0$	$0 \ldots 0$	1
u_1	$u_2 \ldots u_k$	$\vartheta_1 \ldots \vartheta_s$	u_0 .

Будем искать u_0 в указанном в таблице виде. Условие б) на векторы u, ϑ означает, что столбец $(\lambda_i, x)^T$ унимодулярен при любом i. Кроме того, условия 1 и 2 на вектор u_0 в данных обозначениях принимают следующий вид:

1) столбцы $\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} - \lambda'_{i_1} & x \\ \lambda_{i_2} - \lambda'_{i_2} & x \end{pmatrix}$ унимодулярны при $i_1 \neq i_2$;

2) столбцы $\begin{pmatrix} \lambda_i - \lambda'_i & x \\ \mu_j - \mu'_j & x \end{pmatrix}$ унимодулярны при всех i, j.

Можно считать, что $x \neq 0$. Подберем сначала μ'_j так, чтобы $\mu_j - \mu'_j x \neq 0$. Построим λ'_i индуктивно так, чтобы выполнялись условия:

0) $\lambda_i - \lambda'_i x \neq 0$;

1) $\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} - \lambda'_{i_1} & x \\ \lambda_{i_2} - \lambda'_{i_2} & x \end{pmatrix}$ унимодулярна при $i_1 < i$;

2) $\begin{pmatrix} \lambda_i - \lambda'_i & x \\ \mu_j - \mu'_j & x \end{pmatrix}$ унимодулярна при всех j.

Требования 1 и 2 означают, что $\lambda_i - \lambda'_i x$ обратим по модулю ненулевого идеала

$$I = \left(\prod_{j=1}^{s} (\mu_j - \mu'_j x) \prod_{i_1 < i} (\lambda_{i_1} - \lambda'_{i_1} x) \right).$$

Поскольку $\dim A/I = 0$ и, следовательно, $\text{s.r.}\, A/I \leq 1$, то можно найти λ'_i такое, что $(\lambda_i - \lambda'_i x)A + I = A$. Если при этом $\lambda_i - \lambda'_i x = 0$, то $A = I$, условия 1 и 2 выполнены при всех λ'_i, и достаточно заменить λ'_i на λ'_{i+1} так, чтобы выполнялось и условие 0. В обозначениях доказательств случаев 1 и 2 новое требование принимает вид:

3) при любом i столбец $\begin{pmatrix} (\mu_1 - \mu'_1 x) + \ldots + (\mu_s - \mu'_s x) \\ \lambda_i - \lambda'_i x \end{pmatrix}$ унимодулярен.

Если A — поле, то можно подобрать λ'_i так, чтобы $\lambda_i - \lambda'_i x$ был обратим при любом i. Если A не является полем, то A бесконечно и можно подобрать μ'_j так, чтобы элементы $\mu_1 - \mu'_1 x, \ldots, \mu_s - \mu'_s x$ и их сумма были отличны от нуля. Затем подбор λ'_i осуществляется, как и выше.

***Следствие* 1.2.** *Пусть* $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_s)$ *— унимодулярный репер в* A^∞. *Тогда*:

а) *подгруппа стандартных в* $\tilde{H}_{n-s-2}\big(\varepsilon(A^n) \bigcap U_{\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_s\}}\big)$ [9] *групп порождена теми* $[u_1, \ldots, u_{s-1}]$, *для которых* $[u_1, \ldots, u_{s-1}, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_s]$ *является стандартным циклом* (*см. п.* 2) U, *т. е. при любых* i, j *реперы* $(u_1, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, u_{n-s}, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_s)$ *и* $(u_1, \ldots, u_{n-s}, \vartheta_1, \ldots, \hat{\vartheta}_j, \ldots, \vartheta_s)$ *унимодулярны*;

б) *если дополнительно* $s \geq 2$ *и* $\vartheta_j \in A^n + e_{n+1}$, *то подгруппа стандартных циклов* $\tilde{H}_{n-s-1}\big(\varepsilon(A^n) \bigcap U_{\{\vartheta_1,\ldots,\vartheta_s\}}\big)$ *порождается теми* $[u_1,\ldots,u_{n-s+1}]$, *для которых* $[u,\vartheta]$ *является стандартным циклом в* U.

Доказательство. а) Положим $k = n - s$, и пусть $[u_1,\ldots,u_k]$ — стандартный цикл в $\tilde{H}_{k-2}\big(\varepsilon(A^n) \bigcap U_{\{\vartheta\}}\big)$, т. е. $\big(u_1,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_k,\, \vartheta_1,\ldots,\vartheta_s\big)$ — унимодулярный репер при любом i. Найдем $u_0 \in A^n$, существование которого доказано в предложении 1.3. Тогда стандартные циклы $\big[u_0,u_1,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_k\big]$, $i = 1,\ldots,k$, удовлетворяют условиям следствия, формула

$$0 = d^2(u_0,u_1,\ldots,u_k) = d\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\big(u_0,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_k\big)\right) = \sum_{i=0}^{k}(-1)\big[u_0,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_k\big]$$

показывает, что

$$[u_1,\ldots,u_k] = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\big[u_0,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_k\big].$$

б) Положим $\omega_j = \vartheta_j - \vartheta_s$ при $j = 1,\ldots,s-1$ и $k = n - s + 1$. Пусть $[u_1,\ldots,u_k]$ — стандартный цикл $\tilde{H}_{k-2}\big(\varepsilon(A^n) \bigcap U_{\{\vartheta\}}\big)$. Это означает унимодулярность реперов $\big(u_1,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_k,\, \vartheta_1,\ldots,\vartheta_s\big)$, которые равносильны унимодулярности $\big(u_1,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_k,\, \omega_1,\ldots,\omega_{s-1}\big)$ [9]. Согласно предложению 1.3 найдем вектор $u_0 \in A^n$, тогда стандартные циклы $\big[u_0,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_k\big]$, $i = 1,\ldots,k$, удовлетворяют условиям следствия. При $j < s$ унимодулярность $\big(u_0,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_k,\, \vartheta_1,\ldots,\hat{\vartheta}_j,\ldots,\vartheta_s\big)$ равносильна унимодулярности $\big(u_0,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_k,\, \omega_1,\ldots,\hat{\omega}_j,\ldots,\omega_{s-1}\big)$, а при $j = s$ — унимодулярности $\big(u_0,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_k,\, \omega_1 - \omega_{s-1},\ldots,\omega_{s-2} - \omega_{s-1}\big)$. Теперь доказательство завершается, как и выше.

***Предложение* 1.4.** *Пусть* $[u_1,\ldots,u_n]$ — *стандартный цикл в* $\tilde{H}_{n-2}\big(\mathrm{Um}(A^n)\big)$ *и* $\vartheta,\vartheta' \in A^n + e_{n+1}$. *Тогда цикл* $[u_1,\ldots,u_n] * [\vartheta,\vartheta'] \in \tilde{H}_{n-1}\big(\varepsilon\big(A^n \bigcup (A^n + e_{n+1}\big) \bigcap U\big)$ *является суммой стандартных циклов, где* $*$ *означает джойн* [7, 9].

Доказательство. $[u_1,\ldots,u_n] * [\vartheta,\vartheta'] = \pm d\big([u_1,...,u_n] * (\vartheta,\vartheta')\big) = \pm\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\big[u_1,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,\vartheta,\vartheta'\big]$ — сумма стандартных циклов, если все циклы $\big[u_1,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,\vartheta,\vartheta'\big]$ стандартны, т. е. унимодулярны все реперы $\big(u_1,\ldots,\hat{u}_{i_1},\ldots,\hat{u}_{i_2},\ldots,u_n,\, \vartheta,\, \vartheta'\big)$ при $i_1 \neq i_2$. Отметим, что унимодулярность равносильна унимодулярности $\big(u_1,\ldots,\hat{u}_{i_1},\ldots,\hat{u}_{i_2},\ldots,u_n,\, \vartheta' - \vartheta\big)$ [9]. Более общим образом, допустим, что $\vartheta' - \vartheta = \sum_{j=1}^{k}\omega_j$, где векторы $\omega_j \in A^n$ таковы, что репер $\big(u_1,\ldots,\hat{u}_{i_1},\ldots,\hat{u}_{i_2},\ldots,u_n,\, \omega_j\big)$ унимодулярен для любых $i_1 \neq i_2$. Тогда согласно вышеизложенному $[u_1,\ldots,u_n]$ $*$ $\big([\vartheta,\vartheta+\omega_1]+[\vartheta+\omega_1,\vartheta+\omega_1+\omega_2]$ $+$ $\ldots$ $+$ $[\vartheta+\omega_1+\ldots+\omega_{k+1},$ $\vartheta+\omega_1+\ldots+\omega_k]\big)$ — сумма стандартных циклов. Для любого u обозначим через $\Lambda(u)$ аддитивную подгруппу A^n, порожденную теми ω, для которых $\big(u_1,\ldots,\hat{u}_{i_1},\ldots,\hat{u}_{i_2},\ldots,u_n\,,\,\omega\big)$ — унимодулярный репер для любых $i_1\neq i_2$. Умножая репер u на обратимую матрицу, можем считать, что

$$(u_1,\ldots,u_n) = \begin{pmatrix} x_1 & 1\ldots0 \\ \ldots & \ldots \\ x_{n-1} & 0\ldots1 \\ z & 0\ldots0 \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях унимодулярность реперов $\big(u_1,\ldots,\hat{u}_{i_1},\ldots,u_n\big)$ означает, что $x_iA + zA = A$ при всех $i=1,\ldots,n-1$.

1.4.1: $\Lambda(u)\supset A^{n-1}$. Действительно, вектор $\omega=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1},1)^T\in\Lambda(u)$ при условии, что $\big(x_{i_q}-\lambda_{i_1}z\big)A+\big(x_{i_2}-\lambda_{i_2}z\big)A=A$ при $i_1\neq i_2$. Если $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ удовлетворяют этому условию, то ему удовлетворяют и $\lambda_1+\theta,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}$ для любого θ из идеала, порожденного $(x_2-\lambda_2z)\ldots(x_{n-1}-\lambda_{n-1}z)$. Следовательно, $\Lambda(u)\supset(x_2-\lambda_2z)\ldots(x_{n-1}-\lambda_{n-1}z)A\cdot e_1$. Поскольку $\Lambda(u)$ замкнуто по сложению, то $\Lambda(u)\supset I\cdot e_1$, где I — идеал, порожденный всевозможными $(x_2-\lambda_2z)\ldots(x_{n-1}-\lambda_{n-1}z)$. Пусть μ — максимальный идеал A, тогда можно индуктивно построить элементы λ_i так, чтобы $x_i-\lambda_iz\notin\mu(x_i-\lambda_iz)A+(x_j-\lambda_jz)A=A$ при $j<i$. Отметим, что возможность найти λ_i обусловлена тем, что $\mathrm{s.r.}\Big(A/\mu\prod_{j<i}(x_j-\lambda_jz)\Big)\leq1$. Это показывает, что $I\not\subset\mu$ и, следовательно, $I=A$. Тем самым $\Lambda(u)\supset A\cdot e_1$ и, аналогично, $\Lambda(u)\supset A\cdot e_2,\ldots,A\cdot e_{n-1}$.

1.4.2: $\Lambda(u)\supset Ize_n$. Действительно, подберем $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ так, что $(x_{i_1}-\lambda_{i_1}z)A$ $+$ $(x_{i_2}-\lambda_{i_{20}}z)A=A$ при $i_1\neq i_2$, и будем искать в виде $\omega=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1},1)^T+t\cdot u_1$. Тогда все реперы $\big(u_1,\ldots,\hat{u}_{i_1},\ldots,\hat{u}_{i_2},\ldots,u_n,\omega\big)$, где $2\leq i_1\neq i_2\leq n$, унимодулярны. Унимодулярность $\big(u_1,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_n,\omega\big)$ равносильна, как легко видеть, тому, что $(1+tz)A+(x_{i-1}-\lambda_{i-1}z)A=A$. Тем самым t можно варьировать по модулю идеала $\prod_1^{n-1}(x_i-\lambda_iz)A$ и, следовательно, $\Lambda(u)\supset Ize_n$, где I — идеал, порожденный всевозможными $\prod_1^{n-1}(x_i-\lambda_iz)$. Однако, как уже отмечалось выше, $I=A$.

Из 1.4.2 следует

1.4.3: $\Lambda(u)\supset\det(u)\cdot A^n$.

1.4.4. Снова выберем $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ так, что $(x_{i_1}-\lambda_{i_1}z)A+(x_{i_2}-\lambda_{i_{20}}z)A=A$ при $i_1\neq i_2$. Тогда цикл u можно записать в виде суммы стандартных циклов:

$$[u_1,\ldots,u_n] = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\left[\begin{pmatrix}\lambda\\1\end{pmatrix},u_1,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_n\right].$$

Заметим, что детерминант i-го слагаемого равен единице при $i=1$ и $x_{i-1}-\lambda_{i-1}z$ при $i>1$. Предложение справедливо, если $\vartheta'-\vartheta$ находится в подмодуле $\prod_{i=1}^{k-1}(x_i-\lambda_i z)\cdot A^n$. Разлагая $\vartheta'-\vartheta$ в сумму, как в начале доказательства, видим, что $\vartheta'-\vartheta$ находится в сумме таких подмодулей. Осталось еще раз воспользоваться тем, что идеал, порожденный всевозможными $\prod_{i=1}^{k-1}(x_i-\lambda_i z)$, совпадает с A.

2. Стандартные циклы и основная теорема. Предположим, что $\{\vartheta_0,\ldots,\vartheta_{p+1}\}\in\varepsilon(V)$, причем все собственные грани симплекса $\{\vartheta_0,\ldots,\vartheta_{p+1}\}$ содержатся в F, т. е. $\{\vartheta_0,\ldots,\hat{\vartheta}_i,\ldots,\vartheta_{p+1}\}\in F$ при всех $i=0,\ldots,p+1$; $d(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_{p+1}) = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i(\vartheta_0,\ldots,\hat{\vartheta}_i,\ldots$ $\ldots,\vartheta_{p+1})$ содержится в $\tilde{C}_*(F)$ [7, 9] и является, очевидно, циклом. Такие циклы будем называть стандартными p-мерными циклами симплициальной схемы F и обозначать через $[\vartheta_0,\ldots,\vartheta_p]$.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Для произвольного дедекиндова кольца* A *и любого* n *группа* $\tilde{H}_{n-2}(\mathrm{Um}(A^n))$ *порождается стандартными циклами.*

Условимся считать, что группа $\tilde{H}_{-1}$ всегда порождается стандартными циклами, то же относится, конечно, и к группам $\tilde{H}_{-2},\tilde{H}_{-3},\ldots$, которые всегда равны нулю. Кроме того, отметим, что группа $\tilde{H}_0(F)$ порождается стандартными циклами для любой симплициальной схемы F. Таким образом, утверждение теоремы справедливо при всех $n\le 2$.

Для доказательства теоремы проследуем путь доказательства теоремы ацикличности [9] и докажем на каждом шаге не только ацикличность соответствующей симплициальной схемы, но и то, что младшая группа гомологий порождается стандартными циклами.

Начнем со следующих уточнений предложений 4.1 и 4.2 работы [9].

Предложение 2.1. *Пусть* $F\subset\varepsilon(V)$ — *симплициальная схема,* $X\subset V$ *и* d — *натуральное число. Предположим, что*:

а) $\varepsilon(X)\cap F$ d*-ациклична и* $\tilde{H}_{d+1}(\varepsilon(X)\cap F)$ *порождается стандартными циклами*;

б) *для любого* $(s-1)$*-симплекса* $\{\vartheta_1,\ldots,\vartheta_s\}\in F$ *таково, что* $\vartheta_i\notin X$ *при* $i=1,\ldots,s$, *схема* $\varepsilon(X)\cap F_{\{\vartheta_1,\ldots,\vartheta_s\}}$ $(d-1)$*-ациклична и* $\tilde{H}_{d-s+1}(\varepsilon(X)\cap F_{\{\vartheta_1,\ldots,\vartheta_s\}})$ *порождается теми стандартными циклами* $[u_1,\ldots,u_{d-s+3}]$, *для которых* $[u_1,\vartheta]$ *является стандартным циклом в* F, *т. е.* $\{u_1,\ldots,\hat{u}_s,\ldots,u_{d-s+3},\ldots,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_s\}\in F$ *при любом* i *и* $\{u_1,\ldots,u_{d-s+3},$ $\vartheta_1,\ldots,\hat{\vartheta}_j,\ldots,\vartheta_s\}\in F$ *при любом* j.

Тогда симплициальная схема F d*-ациклична,* $\hat{H}_{d+1}(F)$ *порождается стандартными циклами.*

***Замечание* 2.1.** В формулировке условия б) рассмотрим особо случай $d-s+1=-1$, т. е. $s=d+2$. Условимся считать, что в этом случае сформулированное условие означает, что для любого симплекса $\{\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{d+2}\}\in F$ такого, что $\vartheta_i\notin X$ при $i=1,\ldots,d+2$, найдется $u\in X$, для которого $[u,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{d+2}]$ является стандартным циклом F, т. е. $\{u,\vartheta_1,\ldots$ $\ldots,\hat{\vartheta}_i,\ldots,\vartheta_{d+2}\}\in F$ при всех i.

Доказательство. Рассмотрим по схеме F фильтрацию F_s [7], выведенную при доказательстве теоремы ацикличности [9], и покажем индукцией по s, что $\tilde{H}_{d+1}(F_s)$ порождается стандартными циклами. При $s=0$ утверждение следует из условия а), поскольку $F_0=\varepsilon(X)\bigcap F$. Пусть $\tilde{H}_{d+1}(F_{s-1})$ порождается стандартными циклами. При построении схемы F_s к F_{s-1} „склеиваем" джойны $\varepsilon(X)\bigcap F_f*\bar{f}$ относительно $\left(\varepsilon(X)\bigcap F_f\right)*\dot{f}$ по всем $f=\{\vartheta_1,\ldots,\vartheta_S\}\in F$ таким, что $\vartheta_i\notin X$ при $i=1,\ldots,s$, где $\bar{f}$ и $\dot{f}$ соответственно означают множества всех граней и собственных граней симплициальной схемы F. Обозначим через Φ симплициальную схему, которая была получена до „склеивания" $\left(\varepsilon(X)\bigcap F_f\right)*\bar{f}$, и рассмотрим точную последовательность Майера – Вьеториса [7, 9]

$$\tilde{H}_{d+1}(\Phi)\to\tilde{H}_{d+1}\big(\Phi\bigcup\big(\left(\varepsilon(X)\bigcap F_f\right)*\bar{f}\big)\big)\xrightarrow{\ \partial\ }\tilde{H}_d\big(\left(\varepsilon(X)\bigcap F_f\right)*\dot{f}\big)\to\tilde{H}_d(\Phi)\;=\;0\,.$$

Предположим, что $\tilde{H}_{d+1}(\Phi)$ порождается стандартными циклами. Для доказательства того, что $\Phi\bigcup\left(\left(\varepsilon(X)\bigcap F_f\right)*\bar{f}\right)$ имеет те же свойства, достаточно показать, что подгруппа стандартных циклов в $\tilde{H}_{d+1}(\Phi\bigcup((\varepsilon(X)\bigcap F_f)*\bar{f}))$ сюръективно отображается на $\tilde{H}_d\left((\varepsilon(X)\bigcap F_f)*\dot{f}\right)=\tilde{H}_{d-s+1}\left(\varepsilon(X)\bigcap F_f\right)$. По условию б) $\tilde{H}_{d-s+1}\left(\varepsilon(X)\bigcap F_f\right)$ порождается стандартными циклами $[u_1,\ldots,u_{d-s-3}]$ такими, что $[u_1,\ldots,u_{d-s-3},\vartheta_1,\ldots,\vartheta_s]$ является стандартным циклом F (в F_s). Тогда $\tilde{H}_{d-s+1}\left(\varepsilon(X)\bigcap F_f\right)\xrightarrow{\ \sim\ }\tilde{H}_d\left((\varepsilon(X)\bigcap F_f)*\dot{f}\right)$, цикл $[u_1,\ldots,u_{d-s+3}]$ переходит в $[u_1,\ldots,u_{d-s+3}]*[\vartheta_1,\ldots,\vartheta_s]$. Наконец, $[u,\vartheta]=[u]*(\vartheta)+$ $+(-1)^{d-s+3}(u)*[\vartheta_1,\ldots,\vartheta_s]$ (см. лемму 2.2 [8]), при этом первое слагаемое содержится в $\tilde{C}_*\left((\varepsilon(X)\bigcap F_f)*\bar{f}\right)$, а второе — в $\tilde{C}_*(F_{s-1})$. Следовательно, $\partial([u,\vartheta])=d([u]*(\vartheta))=$ $=\pm[u]*[\vartheta]$.

Предложение 2.2. *В обозначениях предложения* 2.1 *предположим, что*:

а) $\varepsilon(X)\bigcap F$ d*-ациклична*, $\tilde{H}_{d+1}(\varepsilon(X)\bigcap F)$ *порождается стандартными циклами*;

б) $F\neq F\bigcap\varepsilon(X)$, *для любой вершины* $\{y\}\in F\bigcap\varepsilon(X)$ *имеет место соотношение* $\varepsilon(X)\bigcap F\subset F_{\{y\}}$;

в) *если* $\{y\},\{y'\}\in F-\varepsilon(X)\bigcap F$ *и* $[u_1,\ldots,u_{d+3}]$ — *стандартный цикл в* F, *то цикл* $[u_1,\ldots,u_{d+3}]*[y,y']$ *является суммой стандартных*;

г) *если* $s \geq 2$ *и* $f = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_s\} \in F_s$, *причем* $\vartheta_i \notin X$ *при* $i = 1, \ldots, s$, *то схема* $\varepsilon(X) \bigcap F_f$ $(d - s + 1)$*-ациклична, а группа* $\tilde{H}_{d-s+2}(\varepsilon(X) \bigcap F_f)$ *порождается теми стандартными циклами* $[u_1, \ldots, u_{d-s+4}]$, *для которых* $[u, \vartheta]$ — *стандартный цикл в* F.

Тогда F $(d+1)$*-ациклична и* $\tilde{H}_{d+2}(F)$ *порождается стандартными циклами.*

Доказательство. Согласно условию б) схема F_1 является джойном $F_0 = \varepsilon(X) \bigcap F$ и непустого дискретного множества Φ, состоящего из вершин F, не лежащих в X. Поскольку $\tilde{H}_i(\Phi) = 0$ при $i \neq 0$, то получаем, что $\tilde{H}_k(F_1) = \tilde{H}_{k-1}(F_0) \otimes \tilde{H}_0(\Phi)$ (см. лемму 2.1 [9]). Следовательно, F $(d+1)$-ациклична и $\tilde{H}_{d+2}(F_1)$ порождается циклами $[u_1, \ldots, u_{d+3}] * [y, y']$, где $[u_1, \ldots, u_{d+3}]$ — стандартный цикл $F \bigcap \varepsilon(X)$ и $y \neq y' \in \Phi$. По условию в) заметим, что $\tilde{H}_{d+2}(F_1)$ порождается стандартными циклами. Далее доказываем индукцией по $s \geq 1$, что F_s $(d+1)$-ациклична и $\tilde{H}_{d+2}(F_s)$ порождается стандартными циклами. Эти рассуждения аналогичны таковым при доказательстве предложения 2.1.

Перейдем к доказательству теоремы. Проведем доказательство индукцией по n. При $n = 0, 1, 2$ теорема тривиальна, так что достаточно выполнить индукционный переход. Итак, будем считать, что теорема справедлива при всех $n \leq N$, и покажем, что она справедлива и для $N + 1$.

Предложение 2.3. *Пусть* $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\} \in U$. *Если* $n - k \leq N$, *то* $\tilde{H}_{n-2-k}\big(\varepsilon(A^n) \bigcap \bigcap U_{\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\}}\big)$ *порождается стандартными циклами.*

Доказательство проведем индукцией по n. Если $n - 2 - k \leq 0$, то доказывать нечего, так что будем считать, что $n \geq k + 3$. При доказательстве предложения можно заменить ϑ_i на $\alpha\vartheta_i$ для любой матрицы $\alpha \in GL(A)$ такой, что $\alpha A^n = A^n$. Тем самым можем считать, что n-я координата ϑ_k равна единице (см. п. 2 [9]). Запишем $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{k-1}$ в виде $\vartheta_i = \lambda_i \vartheta_i + \vartheta'_i$, где n-я координата ϑ'_i равна нулю. Положим $\big(\varepsilon(A^n) \bigcap U_{\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\}}\big) = F$, $X = A^{n-1}$, $d = n - k - 3$ и воспользуемся предложением 2.1. Тогда получим $\big(\varepsilon(X) \bigcap F = \varepsilon(A^{n-1}) \bigcap U_{\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\}}\big) = \varepsilon(A^{n-1}) \bigcap U_{\{\vartheta'_1, \ldots, \vartheta'_k\}}$ [9]. Эта схема d-ациклична в силу теоремы ацикличности и ее следствий [9], и ее группа $\tilde{H}_{d+1}$ порождается стандартными циклами либо по индукционному предположению, если $k > 1$, либо по условию, если $k = 1$. Запишем w'_i в виде $w_i = \mu_i \vartheta_k + w'_i$, где n-я координата w'_i равна нулю. Тогда $\varepsilon(X) \bigcap F_{\{w_1, \ldots, w_s\}} = \varepsilon(X) \bigcap U_{\{w, \vartheta\}} = \varepsilon(A^{n-1}) \bigcap U_{\{w'_1, \ldots, w'_s, \vartheta'_1, \ldots, \vartheta'_{k-1}\}}$ — схема, $(n - k - s - 3)$-ациклична в силу теоремы ацикличности и ее следствий [9], ее группа $\tilde{H}_{d-s+1}$ порождается стандартными циклами по предположению. Наконец, используя следствие 1.2, заключаем, что $\tilde{H}_{d-s-1}\big(\varepsilon(X) \bigcap F_{\{w\}}\big)$ порождается стандартными циклами $[u_1, \ldots, u_{d-s+1}]$ такими, что $[u, w', \vartheta']$ — стандартный цикл в U и тем более $[u, w]$ — стандартный цикл в $U_{\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\}}$.

Тем самым условие 2.1 б) также выполнено. Согласно предложению 2.1 заключаем, что $\tilde{H}_{d+1}(F)$ порождается стандартными циклами.

Предложение 2.4. *Если* $n \le N$, *то* $\tilde{H}_{n-1}\big(\varepsilon\big(A^n \bigcup (A^n + e_{n+1})\big) \bigcap U\big)$ *порождается стандартными циклами.*

Доказательство. Положим $\big(\varepsilon(A^n) \bigcup (A^n + e_{n+1})\big) \bigcap U = F$, $X = A^n$, $d = n-3$ и применим предложение 2.2. Справедливость условий 2.1 а) и б) очевидна, условие в) выполнено согласно предложению 1.4. Наконец, пусть $s \ge 2$ и $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_s\} \in F$, при этом $\vartheta_i \notin A^n$ при $i = 1, \ldots, s$. Тогда симплициальная схема $\varepsilon(A^n) \bigcap F_{\{s\}} = \varepsilon(A^n) \bigcap U_{\{\vartheta_1 - \vartheta_s, \ldots, \vartheta_{s-1} - \vartheta_s\}}$ $(d-s-1)$-ациклична согласно теореме ацикличности и ее следствий [8]. Ее группа $\tilde{H}_{d-s+2}$ порождается стандартными циклами в силу предложения 2.3, а согласно следствию 1.2 б) она порождается теми циклами $[u_1, \ldots, u_{d-s+4}]$, для которых $[u, \vartheta]$ — стандартный цикл в U. Тем самым условие 2.2 г) также выполнено. Из предложения 2.2 заключаем, что $\tilde{H}_{d+2}(F)$ порождается стандартными циклами.

Предложение 2.5. *Пусть* $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_s)$ *— унимодулярный репер в* A^∞. *Тогда подгруппа стандартных циклов в* $\tilde{H}_{d-s-1}\big(\varepsilon\big(A^n \bigcup (A^n + e_{n+1})\big) \bigcap U_{\{s\}}\big)$ *порождается теми циклами* $[u_1, \ldots, u_{n-s+1}]$, *для которых* $[u, \vartheta]$ *является стандартным циклом в* U.

***Замечание* 2.2.** При $n - s = 0$ утверждение означает, что существует $u \in A^n \bigcup (A^n + e_{n+1})$ такой, что все реперы $\{u, \vartheta_1, \ldots, \hat{\vartheta}_i, \ldots, \vartheta_s\}$ унимодулярны (см. замечание 2.1).

Предложение 2.6. *Пусть* $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\} \in U$. *Если* $n - k \le N$, *то группа* $\tilde{H}_{d-1-k}\big(\varepsilon\big(A^n \bigcup (A^n + e_{n+1})\big) \bigcap U_{\{\vartheta\}}\big)$ *порождается стандартными циклами.*

Доказательство предложения 2.6 аналогично доказательству предложения 2.3 с учетом следствия 1.2.

Предложение 2.7. *Группа* $\tilde{H}_{N-1}\big(\mathrm{Um}(A^{N+1})\big)$ *порождается стандартными циклами.*

Доказательство. Положим $F = \mathrm{Um}(A^{N+1})$, $X = A^N \bigcup \big(A^N + e_{N+1}\big)$, $d = N-2$ и воспользуемся предложением 2.1. Условие 2.1 а) выполнено в силу предложения 2.4, а условие 2.1 б) — в силу предложения 2.6.

3. Доказательство предложения 2.5.

Лемма 3.1. *Предположим, что* A *бесконечно. Пусть задано конечное число нетривиальных линейных форм от* n *переменных* $f_i(T_1, \ldots, T_n) = a_0^i + a_1^i T_1 + \ldots + a_n^i T_n$, $i = 1, \ldots, m$.

Тогда существуют элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in A$ *такие, что* $f_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0$ *при всех* i.

Доказательство. Используем индуктивный метод. При $n = 1$ утверждение следует из того, что нетривиальная линейная форма от одной переменной имеет не более одного нуля. Пусть $n > 1$. Будем считать, что $a_n^i = 0$ при $i < k$ и $a_n^i \ne 0$ при $i > k$. Применим индукционное предположение к формам от $f_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \ne 0$ при $i = 1, \ldots, k$ и подберем элемент

λ_n так, чтобы нетривиальные формы от функции одной переменной $f_i(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,T_n)$, $i=k+1,\ldots,m$, не были равны нулю.

Лемма 3.2. *Пусть* A *бесконечно,* $I\in A$ *— ненулевой идеал,* $x_1,x\in A$, *причем* $I+x_1A+xA=A$. *Тогда найдется* $\lambda_1\in A$ *такой, что* $I+(x_1+\lambda_1 x)A=A$. *Если, более того, задано конечное число нетривиальных линейных форм от одной переменной* $f_i=a_0^i+a_1^iT$, $i=1,\ldots,m$, *то* λ_1 *можно подобрать так, чтобы* $f_i(\lambda_1)\neq 0$ *при всех* i.

Доказательство. Найти $\lambda_1'\in A$ такой, что $I+(x_1+\lambda_1'x)A=A$, можно в силу того, что s.r. $A/I\le\dim A/I+1\le 1$ [1]. Выберем теперь ненулевой $z\in I$ и будем искать λ_1 в виде $\lambda_1=\lambda_1'+\mu z$. Поскольку $I+(x_1+\lambda_1 x)A=I+(x_1+\lambda_1'x)A=A$ при любом z, то надо лишь подобрать μ так, чтобы $f_i(\lambda_1'+\mu z)\neq 0$. Это можно сделать согласно лемме 3.1, так как линейные формы $f_i(\lambda_1'+Tz)$ нетривиальны.

Лемма 3.3. *Пусть заданы элементы* $x,x_1,\ldots,x_n,\,t_1,\ldots,t_n\in A$ *и число* k, $1\le k\le n$, *такие, что*:

а) $x\neq 0$, $x_i+\sum_{i=2}^n t_ix_i\neq 0$;

б) $xA+x_iA=A$ *при* $i=1,\ldots,k$.

Тогда существуют $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in A$ *такие, что*:

в) $\lambda_1+\sum_{i=2}^n t_i\lambda_i=0$ *и* $(x_i-\lambda_i x)A+(x_j-\lambda_j x)A=A$, *если* $i\neq j$ *и один из индексов* i, j *не превышает* k.

Доказательство. Предположим сначала, что A — поле. Подберем в этом случае $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ таким образом, что $x_i-\lambda_i x\neq 0$ при $i=2,\ldots,n$, и положим $\lambda_1=-\sum_{i=2}^n t_i\lambda_i$.

Таким образом, можно ограничиться случаем, когда A не является полем, следовательно, бесконечно. Рассмотрим сначала случай $k=1$ и проведем доказательство индукцией по n. Согласно условию линейная форма $x_1+(t_2\lambda_2+\ldots+t_n\lambda_n)x+t_n(x_n-\lambda_n x)=x_1+t_nx_n+\sum_{i=2}^n t_ix\lambda_i$ нетривиальна. Заменяя $x_i-\lambda_i x$ при подходящих λ, можем считать в силу леммы 3.1, что $x_1+t_nx_n\neq 0$. Найдем, воспользовавшись леммой 3.2, элемент $\lambda_n\in A$ такой, что $x_n-\lambda_n x\neq 0$, $(x_1+t_n\lambda_n)+t_2x_2+\ldots+t_{n-1}x_{n-1}\neq 0$, $(x_1+t_nx_n)A+(x_n-\lambda_n x)A=A$. Это можно сделать, поскольку соответствующие формы нетривиальны, $(x_1+t_nx_n)A\neq 0$ и $(x_1+t_nx_n)A+x_nA+xA\supset xA+x_1A=A$. Заметим, что $(x_1+t_nx_n)A+(x_n-\lambda_n x)A=A$. Заменив x_1 на $x_1+t_n\lambda_n x$, x_n на $x_n-\lambda_n x_n$, можем тем самым считать, что $x_n\neq 0$, $x_1+\sum_{i=2}^{n-1}t_ix_i\neq 0$, $x_1A+x_nA=A$. В силу этих условий элементы $x,x_1,\ldots,x_n,\,t_1,\ldots,t_{n-1}$ удовлетворяют требованиям леммы ($k=1$). Применив к ним индукционное предположение, найдем $\mu_1,\ldots,\mu_{n-1}$ такие, что $\mu_1+\sum_{i=2}^{n-1}t_i\,\mu_i=0$, $(x_1-\mu_1xx_n)A+(x_j-\mu_jxx_n)A=A$ при $2\le j\le n-1$. Теперь достаточно положить $\lambda_i=\mu_ix$ при $i=1,\ldots,n-1$, λ_n.

Считая, что $k\ge 2$, воспользуемся индукцией по k. Согласно лемме 3.1, заменив x_i на $x_i-\lambda_i x$ при подходящих λ, можем считать, что $x_3\neq 0,\ldots,x_n\neq 0$, $x_1+t_2x_2\neq 0$. Подберем, использовав лемму 3.2, элемент $\lambda_2 \in A$ такой, что $(x_1 - \lambda_2 x)A + (x_1 + t_2 x_2)x_3 \ldots x_n A = A$, $x_2 - \lambda_2 x \neq 0$, $x_1 + \lambda_2 t_2 x + t_3 x_3 + \ldots + t_n x_n \neq 0$. Из приведенных свойств следует, что $(x_1 + \lambda_2 t_2 x)A + (x_2 - \lambda_2 x)A = (x_1 + t_2 x)A + (x_2 - \lambda_2 x)A = A$. Заменив x_1 на $x_1 + \lambda_2 t_2 x$ и x_2 на $x_2 - \lambda_2 x$, будем далее считать, что: а) $x_2 \neq 0$, $x_1 + t_3 x_3 + \ldots + t_n x_n \neq 0$; б) $x_2 A + x_i A = A$ при $i \neq 2$. Условия а) и б) показывают, что элементы x, x_2, x_1, $x_3, \ldots, x_n$, $t_3, \ldots, t_n$ удовлетворяют требованиям леммы с k, замененными на $k-1$. В силу предположения индукции существуют $\mu_1, \ldots, \mu_3, \ldots, \mu_n$ такие, что $\mu_1 + \sum_{i=s}^{n} \mu_i t_i = 0$ и $(x_i - \mu_1 x x_2)A + (x_j - \mu_j x x_2)A = A$, если i и j — различные индексы, отличные от 2 и один из них не превышает k. Поскольку $x_2 A + (x_i - \mu_i x x_2)A = x_2 A + x_i A = A$ при $i = 2$, то теперь достаточно положить $\lambda_i = \mu_i x$ при $i \neq 2$, $\lambda_2 = 0$.

Лемма 3.4. *Предположим, что* $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1})$ *— унимодулярный репер в* A^n, *причем* n*-я координата* ϑ_i *равна единице. Тогда, прибавив* n*-ю координату к остальным с подходящими коэффициентами, можно добиться, чтобы* A^{n-1} *— часть репера* ϑ *— стала унимодулярной.*

Доказательство. Поскольку группа $GL_n(A)$ транзитивно действует на унимодулярных реперах в A^n, то найдется $\alpha \in GL_n(A)$ такое, что $\alpha\vartheta_i = e_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Положив $\vartheta_n = \alpha^{-1}(e_n)$, получим вектор, дополняющий $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1})$ до унимодулярного n-репера. Вычитая из ϑ_n подходящее кратное ϑ_1, можно считать далее, что n-я координата ϑ_n равна единице и, следовательно, $\vartheta_n = (-\lambda_1, \ldots, -\lambda_{n-1}, 1)^T$. Прибавим n-ю координату к остальным с коэффициентами λ_i. Тогда получим $(n-1)$-репер с вектором $(0, \ldots, 0, 1)^T$. Отсюда заключаем, что A^{n-1} — часть репера ϑ' — унимодулярна [9].

Предложение 3.1. *Пусть заданы векторы* $(u_1, \ldots, u_{k+1}, \ldots, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_s) \in A^\infty$, *причем*:

а) $u_1 \in A^{k+1} + e_{k+s+1}$, $u_i \in A^{k+s} \bigcup (A^{k+s} + e_{k+s+1})$ *при* $i = 2, \ldots, k+1$;

б) $\left(u_1, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, u_{k+1}, \vartheta\right)$ *— унимодулярный репер при всех* i.

Тогда существует $u_0 \in A^{k+s}(A^{k+s} + e_{k+s+1})$ *такой, что*:

1) $\left(u_0, u_1, \ldots, \hat{u}_{i_1}, \ldots, \hat{u}_{i_2}, \ldots, u_{k+1}, \vartheta\right)$ *— унимодулярный репер при* $i_1 \neq i_2$;

2) $\left(u_0, u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_{k+1}, \vartheta_1, \ldots, \hat{\vartheta}_j, \ldots, \vartheta_s\right)$ *— унимодулярный репер для любых* $i = 1, \ldots, k+1$, $j = 1, \ldots, s$.

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве предложения 1.3, видим, что $\vartheta_j \in A^{k+s+1}$. Применяя лемму 3.4 к унимодулярному реперу $(u_1, \ldots, u_k, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_s)$, видим, что прибавляя $(k+s+1)$-ю координату к первым $k+s$ с подходящими коэффициентами, можно считать, что A^{k+s} — часть репера $(u_1, \ldots, u_k, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_s)$ — унимодулярна. Подставив матрицу из $Gl_{k+s}(A)$, можем считать, что репер (u, ϑ) имеет вид, указанный в таблице

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_1 & \lambda_1 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_2 & \lambda_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & x_k & \lambda_k \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & x_{k+1} & \lambda_{k+1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & x_{k+s} & \lambda_{k+s} \\
1 & t_2 & \ldots & t_k & t_{k+1} & \ldots & t_{k+s} & z & 1+\lambda_1+\sum\limits_{i=2}^{k+s}\lambda_i t_i \\
\hline
u_1 & u_2 & \ldots & u_k & \vartheta_1 & \ldots & \vartheta_s & u_{k+s} & u_0
\end{array}.$$

Найдем u_0 в виде, указанном в таблице. Условие б) в этих обозначениях принимает вид $xA+x_iA=A$ при $i=1,\ldots,k$, где $x=z-\ x_i-\sum_{i=2}^{k+s}t_ix_i$. Требования 1 и 2 на вектор u_0 и условие $u_0\in A^{k+s}\bigcup(A^{k+s}+e_{k+s+1})$ налагают следующие ограничения на λ:

1) $(x_i-\lambda_ix)A+(x_j-\lambda_jx)A=A$, если $i\neq j$ и $1\leq i\leq k$;

2) $\lambda_1+\sum_{i=2}^{k+s}\lambda_it_i=0$ или -1.

Очевидно, можно считать, что $x\neq 0$. Если $x_i+\sum_{i=2}^{k+s}t_ix\neq 0$, то согласно лемме 3.3 существует λ, удовлетворяющее условию 1 и равенству $\lambda_1+\sum_{i=2}^{k+s}\lambda_it_i=0$. Пусть x_1+ $+\sum_{i=2}^{k+s}t_ix_i=0$. Тогда элементы $x, x_1+x, x_2,\ldots,x_{k+s}, t_2,\ldots,t_{k+s}$ удовлетворяют требованиям леммы 3.3 и, следовательно, найдутся такие μ_i, что $x_1+x-x\mu_1x$, $x_2-\mu_2x,\ldots,x_k-$ $-\mu_kx$ попарно комаксимальны и комаксимальны с $x_{k+1}-\mu_{k+1}x,\ldots,x_{k+s}-\mu_{k+s}x$ и, кроме того, $\mu_1+\sum_{i=2}^{k+s}\mu_it_i=0$. Теперь достаточно положить $\lambda_1=-1+\mu_1$, $\lambda_i=\mu_i$ при $i\geq 2$.

Лемма 3.5. *Пусть* A *бесконечно и задана* $((k+2)\times 2)$*-матрица* $\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_k & x & z \\ b_1 & \ldots & b_k & y & t\end{pmatrix}^T$. *Предположим, что* $xA+zA=yA+tA=A$, *при любом* $i=1,\ldots,k$ *матрица* $\begin{pmatrix} a_i & x & z \\ b_i & y & t\end{pmatrix}^T$ *унимодулярна. Тогда существуют* $\lambda_1,\ldots,\lambda_k, c\in A$ *такие, что* $(a_i+\lambda_iz)A$ $+$ $(x+cz)A=A$ *и матрица* $\begin{pmatrix} a_i+\lambda_iz & a_j+\lambda_jz & x+cz \\ b_i+\lambda_it & b_j+\lambda_jt & y+ct\end{pmatrix}^T$ *при* $i\neq j$ *унимодулярна.*

Доказательство. Положим $\Delta=xt-yz$ и рассмотрим два случая:

1) $\Delta=0$. Тогда $y=\varepsilon x$, $t=\varepsilon z$, где $\varepsilon\in A^*$ и условия на матрицу принимают вид $xA+zA=A$ и $b_i-\varepsilon a_i\in A^*$ при всех i. В свою очередь требования на λ, c принимают,

как легко видеть, следующий вид: $(x+cz)A+(a_i+\lambda_i z)A=A$, $(x+cz)A+(b_i+\lambda_i\varepsilon z)A=A$, $(x+cz)A+\begin{vmatrix} a_i+\lambda_i z & b_i-\varepsilon a_i \\ a_j+\lambda_j z & b_j-\varepsilon a_j \end{vmatrix} A=A$. Очевидно, можно считать, что $z\neq 0$ и, следовательно, линейные формы $a_i+\lambda_i z, b_i+\lambda_i\varepsilon z, (b_j-\varepsilon a_j)(a_i+\lambda_i z)-(b_i-\varepsilon a_i)(a_j-\lambda_j z)$ нетривиальны. Подберем λ_i так, чтобы они не аннулировали ни одну из этих форм, а затем c так, чтобы $(x+cz)A+I=A$, где I — идеал, порожденный произведением рассмотренных форм.

2) $\Delta\neq 0$. Подберем c так, чтобы $(x+cz)A+\Delta A=A$, $x+cz\neq 0$, $y+ct\neq 0$. В этом случае $(x+cz)A+(y+ct)A\supset(x+cz)A+\Delta A=A$. Тем самым, заменив x на $x+cz$, y на $y+ct$, можно считать, что $xA+yA=A$, $x\neq 0$, $y\neq 0$. Положим $\Delta_i=b_i x-a_i y$. Легко видеть, что в этих обозначениях условия на матрицу имеют вид $xA+zA=A$, $yA+tA=A$, $xA+yA=A$, $\Delta_i A+\Delta A=A$. В свою очередь, требования на λ имеют следующий вид: $(a_i+\lambda_i z)A+xA=A$, $(b_i+\lambda_i t)A+yA=A$, $(\Delta_i+\lambda_i\Delta)A+(\Delta_j+\lambda_j\Delta)A=A$.

Будем считать λ_i последовательно, на каждом i-м шаге требуя выполнения условий:

1) $(\Delta_i+\lambda_i\Delta)A+(\Delta_j+\lambda_j\Delta)A=A$ при $j<i$;

2) $(a_i+\lambda_i z)A+zA=A, (b_i+\lambda_i t)A+yA=A$;

3) $\Delta_i+\lambda_i\Delta\neq 0$.

По построению, $\Delta_i+\lambda_i\Delta\neq 0$ при $j<i$, тогда согласно предложению 2.1 построим λ_i'', удовлетворяющее первому требованию. Положим $\lambda_i'=\lambda''+\mu\prod_{j<i}(\Delta_j+\lambda_j\Delta)_i$. Этот элемент по-прежнему удовлетворяет условию 1. Подберем μ так, чтобы он удовлетворял и условию 2. По модулю x элемент $\Delta_j+\lambda_j\Delta$ сравним с $-y(a_j+\lambda_j z)$, поэтому $(a_i+\lambda' z_i)A+xA=\left(a_i+\lambda_i''z+\mu z(-y)^{i-1}\prod_{j=1}^{i-1}(a_j+\lambda_j z)\right)A+xA$. Поскольку, по построению, $(a_j+\lambda_j z)A+xA=A$, то согласно предложению 2.1 найдем такое μ_x, что для соответствующего λ_i' выполнено требование $(a_i+\lambda_i' z)A+xA=A$. Аналогично можно найти μ_y, удовлетворяющее условию 2. Воспользуемся китайской теоремой об остатках и найдем $\mu\in A$ такое, что $\mu\equiv\mu_x \bmod xA$, $\mu\equiv\mu_y \bmod yA$. Положим $\lambda_i=\lambda_i'+\theta\prod_{j<i}(\Delta_j+\lambda_j\Delta)xy$. Этот элемент по-прежнему удовлетворяет условиям 1, 2 и, согласно лемме 3.1, можно подобрать θ так, чтобы выполнялось и условие 3.

***Следствие* 3.1.** *Пусть заданы векторы* $(u_1,\ldots,u_{k+1},\vartheta_1,\ldots,\vartheta_s\in A^\infty)$, *причем*:

1) $u_1\in A^{k+s+1}$;

2) *при любом* i *векторы* $(u_1,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_{k+2},\vartheta)$ *унимодулярны в совокупности.*

Прибавив координаты с номерами $k+s+2,\ldots$ *к первым* $k+s+1$ *координатам, можно добиться, обозначив через* $\overline{\vartheta}$, A^{k+s+1} *часть репера* ϑ, *чтобы выполнялось требование*:

при $i\neq j$ *векторы* $(u_1,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,\hat{u}_j,\ldots,u_{k+2},\vartheta)$ *унимодулярны в совокупности.*

Доказательство. Помимо преобразований, указанных в формулировке, мы можем, очевидно, действовать на u, ϑ матрицами из $GL_{k+s+1}(A)$. Согласно предложению 1.2 векторы

$(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_s)$ лежат в A^{k+s+2}, а в силу следствия 1.1 можно считать, что A^{k+s+1} — часть репера $(u_1,\ldots,u_k,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_s)$ — унимодулярна. Таким образом, подействовав на u, ϑ матрицей из $GL_{k+s+1}(A)$, можно считать, что u, ϑ имеют вид, указанный в следующей таблице:

1	…	0	0	…	0	a_1	b_1
…	…	…	…	…	…	…	…
0	…	1	0	…	0	a_k	b_k
0	…	0	1	…	0	a_{k+1}	b_{k+1}
…	…	…	…	…	…	…	…
0	…	0	0	…	1	a_{k+s}	b_{k+s}
0	…	0	0	…	0	x	y
0	…	0	t_1	…	t_s	0	0
u_1	…	u_k	ϑ_1	…	ϑ_s	u_{k+1}	u_{k+2}

.

Положим $z=\sum_{i=1}^{s} t_i a_{k+i}$, $t=\sum_{i=1}^{s} t_i b_{k+i}$. Легко видеть, что требования к векторам u, ϑ в этих обозначениях превращаются в требования, приведенные в формулировке леммы 3.5. Если $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, c — элементы, существование которых доказано в леммы 3.5, то достаточно прибавить $(k+s+2)$-ю координату к первым k с коэффициентами λ_i и к $(k+s+2)$-й с коэффициентом c.

***Следствие* 3.2.** *В условиях следствия* 3.1 *найдется вектор* $u_0\in A^{k+s+1}+e_{k+s+2}$ *такой, что* $\left[u_0,u_1,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_{k+2}\right]$ *— стандартный цикл в* $U_{\{\vartheta\}}$ *при* $i=1,\ldots,k+2$.

Доказательство. Если $(k+s+2)$-ю координату прибавляем к первым $k+s+1$ координатам с коэффициентами λ_i, то надо взять $u_0=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{k+s+1},1)^T$.

***Доказательство предложения* 2.5.** Пусть $[u_1,\ldots,u_{n-s+1}]$ — стандартный цикл в $\tilde{H}_{d-s-1}\big(\varepsilon\big(A^n\bigcup(A^n+e_{n+1})\big)\bigcap U_{\{\vartheta\}}\big)$. Если хотя бы один из векторов u_i лежит в A^n+e_{n+1}, то, воспользовавшись предложением 3.1, найдем $u_0\in A^n\bigcup(A^n+e_{n+1})$ такой, что $\big[u_0,u_1,\ldots$ $\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_{n-s+1},\ldots,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_s\big]$ является стандартным циклом в U при всех $i=1,\ldots$ $\ldots,n-s-1$. Тем самым стандартные циклы $\left[u_0,u_1,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_{n-s+1}\right]$ имеют вид, требуемый в предложении 2.5, и утверждение следует из уже использованной ранее формулы $[u_1,\ldots,u_{n-s+1}]=\sum_{i=1}^{n-s+1}(-1)^i[u_0,u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_{n-s+1}]$. Если все $u_i\in A^n$, то можно воспользоваться следствием 3.2 и найти $u_0\in A^n+e_{n+1}$ такой, что $\left[u_0,u_1,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_{n-s+1}\right]$ являются стандартными циклами в $U_{\{\vartheta\}}$. Эти циклы являются суммами циклов нужного вида по уже доказанному, и осталось вновь воспользоваться формулой.

Литература

1. *Басс Х.* Алгебраическая K-теория. – М.: Мир, 1973.
2. *Вассерштейн Л. Н.* K_1-теория и конгруэнцпроблема // Мат. заметки. – 1968. – **5**. – С. 233 – 244.
3. *Вассерштейн Л. Н.* О стабилизации общей линейной группы над кольцом // Мат. сб. – 1969. – **79**, № 3. – С. 405 – 424.
4. *Вассерштейн Л. Н.* Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, № 2. – С. 17 – 27.
5. *Вассерштейн Л. Н.* О стабилизации для K_2-функтора Милнора // Успехи мат. наук. – 1975. – **30**, № 1. – С. 224 – 237.
6. *Вассерштейн Л. Н.* О группе SL_2 над дедекиндовыми кольцами арифметического типа // Мат. сб. – 1972. – **89**, № 2. – С. 313 – 322.
7. *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии. – М.: Мир, 1976. – 463 с.
8. *Зайналов Б. Р., Суслин А. А.* Гомологическая стабилизация для дедекиндовых колец арифметического типа // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 11. – С. 1464 – 1476.
9. *Зайналов Б. Р.* Предацикличность над кольцами с бесконечными полями вычетов // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 2. – С. 202 – 216.
10. *КасселсДж., Фрелих А.* Алгебраическая теория чисел. – М.: Мир, 1969. – 483 с.
11. *Суслин А. А.* Гомологии GL_n, характеристические классы и K-теория Милнора // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1984. – **165**. – С. 188 – 203.
12. *Bass H.* K-theory and stable algebra // Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. – 1964. – № 22. – P. 489 – 544.
13. *Bass H., Milnot J., Serre J. P.* Solution of the congruence subgroup problem SL_n $(n \geq 3)$ and SP_{2n} $(n \geq 2)$ // Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. – 1967. – № 33. – P. 421 – 499.
14. *Van der Kellen W.* Homology stability for linear groups // Invent. Math. – 1980. – № 3. – P. 269 – 295.
15. *Van der Kallen W.* Stability for K_2 of Dedekind rings of arithmetic type // Lect. Notes Math. – 1981. – **854**. – P. 217 – 249.
16. *Kolster M.* On injective stability for K_2 // Lect. Notes Math. – 1982. – **966**. – P. 128 – 169.
17. *Kolster M.* Improvement of K_2-stabillity under transitive actions of elementary groups // J. Pure and Appl. Algebra. – 1982. – **24**, № 3. – P. 277 – 282.
18. *Serre J.-P.* Modules projectivs et espaces fibres a fibre vectorielle // Semin. P. Dubreil. Fac. Sci. Paris. – 1957-1958. – **231**. – P. 1 – 18.
19. *Suslin A. A.* Stability in algebraic K-theory // Lect. Notes Math. – 1982. – **966**. – P. 304 – 334.

Получено 18.08.14,
после доработки — 29.01.17