УДК 517.5

К. В. Пожарська (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ ЕНТРОПІЙНИХ ЧИСЕЛ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ У РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

We establish order estimates for the entropy numbers of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic multivariate functions in the uniform metric. For the proper choice of the functions Ω, these classes coincide with the Nikol'skii – Besov classes $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$.

Отримано порядкові оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці. Ці класи при певному виборі функції Ω збігаються із класами Нікольського – Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — d-вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ і $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$. Через $L_q(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [0, 2\pi]$, $1 \leq q \leq \infty$, позначимо простір функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$, які є 2π-періодичними за кожною змінною, зі скінченною нормою

$$\|f\|_q := \|f\|_{L_q(\pi_d)} = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(\boldsymbol{x})|^q \, d\boldsymbol{x} \right)^{1/q}, \quad 1 \leq q < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \pi_d} |f(\boldsymbol{x})|.$$

У подальших міркуваннях вважаємо, що для $f \in L_1(\pi_d)$ виконується умова

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x}) \, dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

Означимо апроксимативну характеристику, яка вивчається у роботі.

Нехай $\mathcal{X}$ — банахів простір і $B_{\mathcal{X}}(\boldsymbol{y}, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \colon \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{\mathcal{X}} \leq r\}$ — куля радіуса r з центром у точці $\boldsymbol{y}$.

Для компактної множини $A \subset \mathcal{X}$ і $\varepsilon > 0$ позначимо

$$N_\varepsilon(A, \mathcal{X}) = \min \left\{ n \colon \exists \boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^n \in \mathcal{X} \colon A \subseteq \bigcup_{j=1}^n B_{\mathcal{X}}(\boldsymbol{y}^j, \varepsilon) \right\}.$$

Тоді ε-ентропією множини A відносно банахового простору $\mathcal{X}$ називають величину [1]

$$H_\varepsilon(A, \mathcal{X}) = \log N_\varepsilon(A, \mathcal{X}). \tag{1}$$

(Тут і далі під записом $\log$ будемо розуміти $\log_2$.)

З ε-ентропією множини A тісно пов'язане поняття її ентропійних чисел (див., наприклад, [2])

$$\varepsilon_k(A, \mathcal{X}) = \inf \left\{ \varepsilon \colon \exists \boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^{2^k} \in \mathcal{X} \colon A \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_{\mathcal{X}}(\boldsymbol{y}^j, \varepsilon) \right\}. \tag{2}$$

Зазначимо, що отримавши оцінки ентропійних чисел деякої множини A, можна записати відповідні оцінки її ε-ентропії. Дійсно, з наведених вище означень величин $\varepsilon_k(A, \mathcal{X})$ та $H_\varepsilon(A, \mathcal{X})$ випливає, що при $k < H_\varepsilon(A, \mathcal{X}) \le k+1$ виконуються співвідношення $\varepsilon_{k+1}(A, \mathcal{X}) \le \le \varepsilon \le \varepsilon_k(A, \mathcal{X})$.

Величини (2) для класів функцій багатьох змінних Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, Нікольського – Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ ($B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} \equiv H^{\boldsymbol{r}}_p$) та їх аналогів досліджувались у багатьох роботах (див., наприклад, [3 – 11]). З більш детальною бібліографією можна ознайомитися в огляді [10].

У процесі доведення одержаних результатів будемо розглядати такі числа:

$$M_\varepsilon(A, \mathcal{X}) = \max\left\{n \colon \exists \boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^n \in A \colon \|\boldsymbol{x}^i - \boldsymbol{x}^j\|_{\mathcal{X}} > \varepsilon, \ \ i \ne j, \ \ i, j = \overline{1, d}\right\}.$$

Легко переконатися (див., наприклад, [1]), що

$$N_\varepsilon(A, \mathcal{X}) \le M_\varepsilon(A, \mathcal{X}) \le N_{\frac{\varepsilon}{2}}(A, \mathcal{X}). \tag{3}$$

У роботі встановлено оцінки ентропійних чисел класів $B^\Omega_{p,\theta}$ у метриці простору $L_\infty(\pi_d)$ при певних умовах на функцію Ω та параметри p і θ. Згадані класи для $\theta = \infty$ уперше було розглянуто в роботі [12], а потім поширено у [13] на випадок $1 \le \theta < \infty$; вони є узагальненням за гладкісним параметром класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ (див., наприклад, [14, 15]).

Класи $B^\Omega_{p,\theta}$ визначаються за допомогою мажорантної функції $\Omega(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d_+$, для мішаного модуля неперервності $\Omega_l(f, \boldsymbol{t})_p$ l-го порядку, $l \in \mathbb{N}$, функції $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, та числового параметра θ, $1 \le \theta \le \infty$.

Отже, нехай для $f \in L_p(\pi_d)$

$$\Omega_l(f)_p := \Omega_l(f, \boldsymbol{t})_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j = \overline{1,d}}} \|\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f\|_p$$

— мішаний модуль неперервності порядку l, $l \in \mathbb{N}$, функції f, де

$$\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = \Delta^l_{h_d} \cdots \Delta^l_{h_1} f(\boldsymbol{x}) = \Delta^l_{h_d}\big(\Delta^l_{h_{d-1}} \ldots (\Delta^l_{h_1} f(\boldsymbol{x}))\big), \quad \boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_d),$$

— мішана l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j, $j = \overline{1, d}$, а

$$\Delta^l_{h_j} f(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + n h_j, x_{j+1}, \ldots, x_d).$$

Розглянемо множину $\Psi_{l,d}$ функцій $\Omega(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d_+$, типу мішаного модуля неперервності l-го порядку, які задовольняють такі умови:

1) $\Omega(\boldsymbol{t}) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$; $\Omega(\boldsymbol{t}) = 0$, $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;

2) $\Omega(\boldsymbol{t})$ неперервна на $\mathbb{R}^d_+$;

3) $\Omega(\boldsymbol{t})$ не спадає по кожній змінній $t_j \ge 0$, $j = \overline{1, d}$, при будь-яких фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \ne j$;

4) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \le C\big(\prod_{j=1}^d m_j\big)^l \Omega(\boldsymbol{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, $C > 0$.

На функції $\Omega(\boldsymbol{t})$ при формулюванні та доведенні результатів накладемо додатково умови (S^α) і (S_l) Барі – Стєчкіна [16]. Для одновимірного випадку ($t \in \mathbb{R}_+$) матимемо:

а) φ належить (S^{α}), $\varphi \geq 0$, $\alpha > 0$, якщо функція $\varphi(\tau)\tau^{-\alpha}$ майже зростає, тобто якщо існує така стала $C_1 > 0$, яка не залежить від τ_1 та τ_2, $0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1$, що $\varphi(\tau_1)\tau_1^{-\alpha} \leq C_1\varphi(\tau_2)\tau_2^{-\alpha}$;

б) φ належить (S_l), $\varphi > 0$, $l \in \mathbb{N}$, якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке, що $\varphi(\tau)\tau^{-\gamma}$ майже спадає, тобто існує не залежна від τ_1 та τ_2, $0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1$, стала $C_2 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1)\tau_1^{-\gamma} \geq C_2\varphi(\tau_2)\tau_2^{-\gamma}$.

При $d > 1$ будемо говорити, що $\Omega(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d_+$, задовольняє умови (S^{α}) та (S_l), якщо $\Omega(\boldsymbol{t})$ як функція однієї змінної t_j, $j = \overline{1,d}$, задовольняє ці умови при будь-яких фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \neq j$.

У подальших міркуваннях будемо використовувати декомпозиційне зображення норми просторів $B^{\Omega}_{p,\theta}$. Для цього нам знадобляться деякі позначення.

Отже, кожному вектору $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(\boldsymbol{s}) = \left\{ \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, \ \ j = \overline{1,d} \right\}$$

і для $f \in L_p(\pi_d)$ покладемо

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f) := \delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})},$$

де

$$\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{t})} \, d\boldsymbol{t}$$

— коефіцієнти Фур'є функції f.

У [13] встановлено, що при $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega \in (S_l) \cap (S^{\alpha}) \cap \Psi_{l,d}$ мають місце співвідношення

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum_{\boldsymbol{s}} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \sup\limits_{\boldsymbol{s}} \dfrac{\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})}, & \theta = \infty, \end{cases} \tag{4}$$

де $\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Наведене зображення норми не охоплює випадки $p = 1$ та $p = \infty$. Тому нам знадобиться певна модифікація норми, яка дозволяє встановити подібне до (4) зображення і для граничних значень параметра p.

Отже, нехай $V_m(x)$ — ядро Валле Пуссена порядку $2m - 1$:

$$V_m(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kx + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(1 - \frac{k-m}{m}\right) \cos kx, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Кожному вектору $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність поліном

$$A_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j) \right).$$

Зауважимо, що $\|A_{\boldsymbol{s}}\|_1 \le C_3, \quad C_3 > 0.$

Далі, для $f \in L_1(\pi_d)$ будемо позначати $A_{\boldsymbol{s}}(f) := A_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = (f * A_{\boldsymbol{s}})(\boldsymbol{x})$, де $*$ — операція згортки.

Тоді при $1 \le p, \theta \le \infty$, $\Omega \in (S_l) \cap (S^{\alpha}) \cap \Psi_{l,d}$ мають місце співвідношення [12, 17]

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_{\boldsymbol{s}} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{\boldsymbol{s}} \dfrac{\|A_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})}, & \theta = \infty. \end{cases} \qquad (5)$$

Далі через $B^{\Omega}_{p,\theta}$ будемо позначати одиничні кулі з цих просторів, тобто множини функцій $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, для яких $\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1$.

Зауважимо, що при $\theta = \infty$ покладають $B^{\Omega}_{p,\infty} \equiv H^{\Omega}_p$, де класи H^{Ω}_p — аналоги класів Нікольського $H^{\boldsymbol{r}}_p$ (див., наприклад, [18]).

У роботі розглядаємо функції Ω типу мішаного модуля неперервності порядку l, які мають вигляд $\Omega(\boldsymbol{t}) = \Omega(t_1 \ldots t_d) = \omega\Big(\prod_{j=1}^{d} t_j\Big)$, де $\omega \in \Psi_{l,d}$ — функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S^{α}) і (S_l) Барі – Стєчкіна.

Результати роботи будемо формулювати в термінах порядкових співвідношень. Для двох невід'ємних послідовностей $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ співвідношення (порядкова нерівність) $a(n) \ll b(n)$ означає, що існує стала $C_4 > 0$, не залежна від n, така, що $a(n) \le C_4 b(n)$. Співвідношення $a(n) \asymp b(n)$ рівносильне тому, що $a(n) \ll b(n)$ і $b(n) \ll a(n)$. Зазначимо, що сталі C_i, $i = 4, 5, \ldots$, які далі будуть зустрічатися у порядкових співвідношеннях, можуть залежати від деяких параметрів. Ці параметри інколи будемо вказувати, в решті випадків вони будуть зрозумілими із контексту.

Якщо $\mathfrak{M}$ — деяка скінченна множина, то через $|\mathfrak{M}|$ будемо позначати кількість елементів цієї множини.

2. Допоміжні твердження. Для множини $G \subset \mathbb{Z}^d$ через $T(G)$ і $T(G)_q$ будемо позначати множини тригонометричних поліномів вигляду

$$T(G) = \left\{ t \colon t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in G} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})} \right\}, \qquad T(G)_q = \left\{ t \in T(G) \colon \|t\|_q \le 1 \right\}.$$

Далі розглянемо множину $Q_n = \bigcup_{(\boldsymbol{s}, \mathbf{1}) \le n} \rho(\boldsymbol{s})$, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d$, $n \ge d$, яку називають „східчастим гіперболічним хрестом” [18, с. 7]. Відомо [18, с. 70], що $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Теорема A [11]. *Справджується оцінка*

$$\varepsilon_M\left(T(Q_n)_2, L_{\infty}\right) \ll \begin{cases} n^{1/2} \left(|Q_n| M^{-1}\right)^{1/2} \left(\log\left(4|Q_n| M^{-1}\right)\right)^{1/2}, & M \le 2\,|Q_n|, \\ n^{1/2} 2^{-M(2|Q_n|)^{-1}}, & M \ge 2\,|Q_n|. \end{cases}$$

Зауважимо, що аналогічне твердження справедливе і у випадку, коли замість множини Q_n розглядати множину $\triangle Q_n = Q_n \setminus Q_{n-1}$.

Позначимо через $S_{Q_n}(f)$ східчасто-гіперболічну суму Фур'є функції f, тобто

$$S_{Q_n}(f) := S_{Q_n}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in Q_n} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}.$$

Теорема Б [19]. *Нехай* $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\Big(\prod_{j=1}^d t_j\Big)$, *де* ω *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > 1/p$ *та умову* (S_l). *Тоді*

$$\sup_{f\in B^{\Omega}_{p,\theta}} \big\| f - S_{Q_n}(f)\big\|_{\infty} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Нам також знадобиться порядкова нерівність, яка є наслідком теореми Літтлвуда – Пелі (див., наприклад, [20, с. 52 – 56]).

Лема А. *Нехай* $f \in L_p(\pi_d)$, $1 < p < \infty$. *Тоді*

$$\left\|\sum_{\boldsymbol{s}} \delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_p \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s}} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^{p^*}\right)^{1/p^*}, \qquad \text{де} \quad p^* = \min\{2, p\}.$$

3. Основні результати. Справедливим є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $2 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, *а* $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\Big(\prod_{j=1}^d t_j\Big)$, *де функція* ω *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > 1/2$ *та умову* (S_l). *Тоді для будь-яких натуральних* M *і* m *таких, що* $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, *виконується співвідношення*

$$\varepsilon_M \left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_{\infty}\right) \ll \omega\left(2^{-m}\right) (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \sqrt{\log M}, \tag{6}$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доведення. З огляду на вкладення $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{q,\theta}$, $q < p$, достатньо встановити оцінку (6) для $p = 2$. При цьому в ході доведення розглянемо окремо випадки $1 \le \theta \le 2$, $2 < \theta < \infty$ та $\theta = \infty$.

Отже, нехай $f \in B^{\Omega}_{2,\theta}$ і $1 \le \theta \le 2$. Тоді, використовуючи рівність Парсеваля та нерівність [21, с. 43]

$$\left(\sum_l |a_l|^{\mu_2}\right)^{1/\mu_2} \le \left(\sum_l |a_l|^{\mu_1}\right)^{1/\mu_1}, \quad 1 \le \mu_1 \le \mu_2 < \infty,$$

для $n \in \mathbb{N}$, $n \ge d$, можемо записати

$$\left\|\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_2 = \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} = I_1. \tag{7}$$

Далі, врахувавши (4), продовжимо оцінку I_1:

$$I_1 = \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \omega\big(2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})}\big)^{\theta} \omega\big(2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})}\big)^{-\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le \omega(2^{-n}) \left(\sum_{\boldsymbol{s}} \omega\big(2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})}\big)^{-\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \omega(2^{-n}) \|f\|_{B^{\Omega}_{2,\theta}} \le \omega(2^{-n}).$$

Звідси, згідно з (7), будемо мати

$$\left\|\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n}\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_2 \ll \omega\left(2^{-n}\right), \quad 1\le\theta\le 2. \tag{8}$$

Тепер розглянемо випадок $f\in B^{\Omega}_{2,\theta}$ і $2<\theta<\infty$. Використавши рівність Парсеваля та нерівність Гельдера з показником $\theta/2$, одержимо

$$\left\|\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n}\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_2 = \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n}\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^2\right)^{\frac12} =$$

$$= \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n}\left(\omega\left(2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}\right)\right)^{-2}\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^2\left(\omega\big(2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}\big)\right)^2\right)^{\frac12} \le$$

$$\le \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n}\left(\omega\big(2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}\big)\right)^{-\theta}\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^{\theta}\right)^{\frac1\theta}\left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n}\left(\omega\big(2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}\big)\right)^{\frac{2\theta}{\theta-2}}\right)^{\frac12-\frac1\theta} = I_2. \tag{9}$$

Врахувавши (4), продовжимо оцінку I_2:

$$I_2 \ll \|f\|_{B^{\Omega}_{2,\theta}}\left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n}\left(\omega\big(2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}\big)\right)^{\frac{2\theta}{\theta-2}}\right)^{\frac12-\frac1\theta} \le \omega(2^{-n})\left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n}1\right)^{\frac12-\frac1\theta} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})n^{(d-1)\left(\frac12-\frac1\theta\right)}. \tag{10}$$

Тому, співставивши (9) і (10), запишемо

$$\left\|\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n}\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_2 \ll \omega(2^{-n})n^{(d-1)\left(\frac12-\frac1\theta\right)}, \quad 2<\theta<\infty. \tag{11}$$

Нехай тепер $\theta=\infty$ і $f\in B^{\Omega}_{2,\infty}$. Тоді, згідно з (4), будемо мати

$$\left\|\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n}\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_2 = \omega(2^{-n})\left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n}\left(\left(\omega\big(2^{-(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}\big)\right)^{-1}\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2\right)^2\right)^{\frac12} \le$$

$$\le \omega(2^{-n})\left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n}1\right)^{\frac12} \asymp \omega(2^{-n})n^{\frac{d-1}{2}}. \tag{12}$$

Отже, об'єднавши (8), (11) та (12), отримаємо оцінку

$$\left\|\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n}\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_2 \ll \omega(2^{-n})n^{(d-1)\left(\frac12-\frac1\theta\right)_+}, \quad 1\le\theta\le\infty. \tag{13}$$

Далі, виберемо згідно з M число $m \in \mathbb{N}$ так, щоб $|Q_{m-1}| < M \leq |Q_m|$. Тоді, оскільки $|Q_m| \asymp |Q_{m-1}| \asymp 2^m m^{d-1}$, $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$.

Визначимо числа β та $\overline{M}_n$ таким чином:

$$\beta = \frac{1}{2}\min\left\{\left(\alpha - \frac{1}{2}\right); \frac{1}{2}\right\}, \qquad \overline{M}_n = \begin{cases} C_5(\beta)M \cdot 2^{-\frac{1}{2}(m-n)}, & n < m, \\ C_5(\beta)M \cdot 2^{-\beta(n-m)}, & n \geq m, \end{cases} \tag{14}$$

де стала $C_5(\beta) > 0$ така, що $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n \leq M$. Зазначимо, що підібрати таку сталу $C_5(\beta)$ можна, оскільки, згідно з (14),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n = \sum_{n=1}^{m-1} C_5(\beta)M \cdot 2^{-\frac{1}{2}(m-n)} + \sum_{n=m}^{\infty} C_5(\beta)M \cdot 2^{-\beta(n-m)} \ll M.$$

Нехай тепер $M_n = \left[\overline{M}_n\right]$, де $[a]$ — ціла частина числа a. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} M_n \leq M$ і, крім цього, $M_n = 0$, якщо $C_5(\beta)M \cdot 2^{-\beta(n-m)} < 1$, тобто при

$$n > m_1 = m + \beta^{-1}\log(C_5(\beta)M). \tag{15}$$

Покладемо

$$S_{\triangle Q_n}\big(B^{\Omega}_{2,\theta}\big) = \left\{ g : g(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \triangle Q_n} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \quad f \in B^{\Omega}_{2,\theta} \right\},$$

$$\left\| S_{\triangle Q_n}\big(B^{\Omega}_{2,\theta}\big) \right\|_\infty = \sup_{g \in S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right)} \|g\|_\infty .$$

Тоді для ентропійних чисел $\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{2,\theta}, L_\infty\right)$ можемо записати

$$\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{2,\theta}, L_\infty\right) \leq \sum_n \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\big(B^{\Omega}_{2,\theta}\big), L_\infty\right) =$$

$$= \sum_{n \leq m_1} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\big(B^{\Omega}_{2,\theta}\big), L_\infty\right) + \sum_{n > m_1} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\big(B^{\Omega}_{2,\theta}\big), L_\infty\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n \leq m_1} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right), L_\infty\right) + \sum_{n > m_1} \left\| S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right) \right\|_\infty = I_3 + I_4. \tag{16}$$

Оцінимо спочатку доданок I_4. Для цього встановимо оцінку зверху величини $\left\| S_{\triangle Q_n}\big(B^{\Omega}_{2,\theta}\big) \right\|_\infty$.

Використавши властивість L_∞-норми, для $f \in B^{\Omega}_{2,\theta}$ отримаємо

$$\left\| S_{\triangle Q_n}\big(B^{\Omega}_{2,\theta}\big) \right\|_\infty \leq \left\| S_{Q_n}(f) - S_{Q_{n-1}}(f) + f - f \right\|_\infty \leq$$

$$\leq \|f - S_{Q_n}(f)\|_\infty + \left\|f - S_{Q_{n-1}}(f)\right\|_\infty . \tag{17}$$

Врахувавши теорему Б для $p = 2$, із (17) матимемо

$$\left\| S_{\triangle Q_n}\left(B^{\Omega}_{2,\theta}\right) \right\|_\infty \ll \omega\left(2^{-n}\right) 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)}. \tag{18}$$

Отже, беручи до уваги (18) та той факт, що функція ω задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > 1/2$, знаходимо

$$I_4 = \sum_{n>m_1} \left\| S_{\triangle Q_n}\big(B^{\Omega}_{2,\theta}\big) \right\|_{\infty} \ll \sum_{n>m_1} \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} =$$

$$= \sum_{n>m_1>m} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-\alpha n} 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \ll \frac{\omega\left(2^{-m}\right)}{2^{-\alpha m}} \sum_{n>m_1} 2^{n\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \ll$$

$$\ll \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\alpha m} 2^{m_1\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} m_1^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{19}$$

Оскільки $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, то із (15) робимо висновок, що $m_1 \asymp m + \beta^{-1} \log\big(C_5(\beta) \times$ $\times 2^m m^{d-1}\big) \ll m$, і тому з (19) отримуємо

$$I_4 \ll \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\alpha m} 2^{m_1\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} m^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{20}$$

Далі розглянемо два випадки: $1/2 < \alpha < 1$ та $\alpha \geq 1$.

Нехай $1/2 < \alpha < 1$. Тоді, згідно з (14) та (15), одержуємо

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) = \frac{2\alpha-1}{4}, \qquad m_1 = m + \frac{4}{2\alpha-1} \log(C_5(\beta)M).$$

Підставляючи у праву частину співвідношення (20) значення m_1 та враховуючи, що $M =$ $= M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, маємо

$$I_4 \ll \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\alpha m} 2^{m\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} M^{\frac{4}{2\alpha-1}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} m^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} = \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\frac{m}{2}} M^{-2} m^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\frac{-3m}{2}} m^{-(d-1)\left(1+\frac{1}{\theta}\right)} \ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{21}$$

Нехай тепер $\alpha \geq 1$. Тоді $\beta = 1/4$ і, відповідно, $m_1 = m + \log(C_5(\beta)M)^4$. Звідси з урахуванням співвідношення (20) отримаємо

$$I_4 \ll \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\alpha m} 2^{m\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} M^{4\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} m^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} =$$

$$= \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\frac{m}{2}} M^{4\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} m^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(2^{-m}\right) 2^{\frac{m}{2}} 2^{m(2-4\alpha)} m^{(d-1)(2-4\alpha)} m^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{22}$$

Об'єднавши (22), (21) та (20), запишемо оцінку для I_4:

$$I_4 \ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{23}$$

Оцінимо тепер доданок I_3. З цією метою запишемо його у вигляді

$$I_3 = \sum_{n \leq m_1} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\big(B^{\Omega}_{2,\theta}\big), L_{\infty}\right) =$$

$$= \sum_{n \leq m} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\big(B^{\Omega}_{2,\theta}\big), L_{\infty}\right) + \sum_{m<n\leq m_1} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\triangle Q_n}\big(B^{\Omega}_{2,\theta}\big), L_{\infty}\right).$$

Беручи до уваги означення множини $T\left(\triangle Q_n\right)_2$ і частинних сум $S_{\triangle Q_n}\big(B^{\Omega}_{2,\theta}\big)$ та співвідношення (13), отримуємо

$$I_3 \ll \sum_{n\leq m} \varepsilon_{M_n}\left(T\left(\triangle Q_n\right)_2, L_\infty\right)\omega(2^{-n})n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}+$$

$$+\sum_{m<n\leq m_1} \varepsilon_{M_n}\left(T\left(\triangle Q_n\right)_2, L_\infty\right)\omega(2^{-n})n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} = I_5 + I_6. \qquad (24)$$

Далі, скористаємося для оцінки кожного з доданків I_5 та I_6 теоремою А.

Отже, оскільки для $n \leq m$ $M_n = \left[C_5(\beta)M2^{-\frac{1}{2}(m-n)}\right]$, а $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, $|Q_n| \asymp \asymp 2^n n^{d-1}$, то

$$M_n \asymp 2^m m^{d-1} 2^{-\frac{m}{2}} 2^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n+m}{2}} m^{d-1} \geq 2|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Тому для I_5 можемо записати

$$I_5 \ll \sum_{n\leq m} n^{\frac{1}{2}} 2^{-M_n(2|\triangle Q_n|)^{-1}} \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll$$

$$\ll \sum_{n\leq m} n^{\frac{1}{2}} 2^{-C_5(\beta)M2^{-\frac{1}{2}(m-n)}2^{-(n+1)}n^{-(d-1)}} \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll$$

$$\ll \sum_{n\leq m} n^{\frac{1}{2}} \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (25)$$

Звідси, враховуючи, що функція ω задовольняє умову (S_l), отримуємо

$$I_5 \ll \sum_{n\leq m} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\gamma n}} 2^{-\gamma n} n^{\frac{1}{2}} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll \frac{\omega\left(2^{-m}\right)}{2^{-\gamma m}} \sum_{n\leq m} 2^{-\gamma n} n^{\frac{1}{2}} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll$$

$$\ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} m^{\frac{1}{2}}. \qquad (26)$$

Перейдемо тепер до оцінки I_6. Використовуючи теорему А для $M_n = \big[C_5(\beta)M \times \times 2^{-\beta(n-m)}\big] \leq 2|\triangle Q_n|$, одержуємо

$$I_6 \ll \sum_{m<n\leq m_1} n^{\frac{1}{2}} |\triangle Q_n|^{\frac{1}{2}} M_n^{-\frac{1}{2}} \left(\log\left(4|\triangle Q_n| M_n^{-1}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \asymp$$

$$\asymp \sum_{m<n\leq m_1} n^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}\beta(n-m)} \left(\log \frac{4\cdot 2^n n^{d-1}}{C_5(\beta)M2^{-\beta(n-m)}}\right)^{\frac{1}{2}} \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \asymp$$

$$\asymp \sum_{m<n\leq m_1} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-\alpha n} 2^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{1}{2}\beta(n-m)} 2^{-\frac{m}{2}} m^{-\frac{d-1}{2}} n^{\frac{d-1}{2}} n^{\frac{1}{2}} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \times$$

$$\times \left(\log \frac{4\cdot 2^{n(1+\beta)} n^{d-1}}{2^{m(1+\beta)} m^{d-1}}\right)^{\frac{1}{2}} = I_7. \qquad (27)$$

Далі, враховуючи, що функція ω задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > 1/2$, а

$$\beta = \frac{1}{2}\min\left\{\left(\alpha - \frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{2}\right\},$$

можемо записати

$$I_7 \ll \frac{\omega\left(2^{-m}\right)}{2^{-\alpha m}} \sum_{m<n\le m_1} 2^{n\left(\frac{1}{2}-\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)} 2^{-\frac{1}{2}m(1+\beta)} m^{-\frac{d-1}{2}} n^{\frac{d-1}{2}} n^{\frac{1}{2}} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \times$$

$$\times \left(\log \frac{4\cdot 2^{n(1+\beta)} n^{d-1}}{2^{m(1+\beta)} m^{d-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \ll \frac{\omega\left(2^{-m}\right)}{2^{-\alpha m}} 2^{m\left(\frac{1}{2}-\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)} 2^{-\frac{1}{2}m(1+\beta)} m^{\frac{1}{2}} m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} =$$

$$= \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} m^{\frac{1}{2}}. \tag{28}$$

Об'єднуючи (26), (27), (28) із (24), приходимо до оцінки

$$I_3 \ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} m^{\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

Нарешті, співставляючи оцінки (29), (23) і (16) та враховуючи, що $M = M(m) \asymp 2^m m^{d-1}$, отримуємо шукану оцінку зверху:

$$\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{2,\theta}, L_\infty\right) \ll \omega\left(2^{-m}\right) m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} m^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(2^{-m}\right) (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \sqrt{\log M}.$$

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 1.** Для класів Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ при $1 \le \theta < \infty$ результати, відповідні теоремі 1, встановлено у роботі А. С. Романюка [9], а для класів Нікольського $H^{\boldsymbol{r}}_p$ — у роботі Е. С. Белінського [7].

Далі встановимо оцінку знизу ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, у метриці простору L_1. Введемо необхідні позначення. Отже, нехай для $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{N}^d$

$$\overline{\rho}(\boldsymbol{s}) = \left\{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : 2^{s_j - 1} \le k_j < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1,d}\right\},$$

$$\Omega^*_n = \left\{\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{N}^d : (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1}) = n, n \ge d, n, s_j - \text{парні числа}, j = \overline{1,d}\right\},$$

$$Q'_n = \bigcup_{s\in\Omega^*_n} \overline{\rho}(\boldsymbol{s}), \qquad T(\overline{\rho}(\boldsymbol{s})) = \left\{t : t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\overline{\rho}(\boldsymbol{s})} \widehat{t}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\right\}.$$

Легко бачити, що при $s_j \ge 2$, $j = \overline{1,d}$, для кожного полінома $t \in T(\overline{\rho}(\boldsymbol{s}))$ існує поліном t^1 степеня 2^{s_j-2} за змінною x_j, $j = \overline{1,d}$, такий, що $t(\boldsymbol{x}) = e^{i(\boldsymbol{k^s},\boldsymbol{x})} t^1(\boldsymbol{x})$, де $\boldsymbol{k^s} = (k_1^{s_1}, \ldots, k_d^{s_d})$, $k_j^{s_j} = 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}$, $j = \overline{1,d}$.

Нехай далі $\boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_d)$, $l_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$. Розглянемо множини дійсних тригонометричних поліномів

$$RT(\boldsymbol{l}) = \left\{t : t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{|k_j|\le l_j\\ j=\overline{1,d}}} \widehat{t}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\right\},$$

$$T'(\overline{\rho}(\boldsymbol{s})) = \left\{ t : t(\boldsymbol{x}) = e^{i(\boldsymbol{k^s}, \boldsymbol{x})} t^1(\boldsymbol{x}), \quad t^1 \in RT(2^{\boldsymbol{s}-2}) \right\},$$

$$T'(Q'_n) = \left\{ t : t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s} \in \Omega^*_n} e^{i(\boldsymbol{k^s}, \boldsymbol{x})} t^1_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}), \quad t^1_{\boldsymbol{s}} \in RT(2^{\boldsymbol{s}-2}) \right\}.$$

Справедливою є така теорема.

Теорема 2. *Нехай* $1 \leq \theta \leq \infty$, *а* $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\big(\prod_{j=1}^d t_j\big)$, *де функція* ω *задовольняє умову* (S^α) *з деяким* $\alpha > 0$ *та умову* (S_l). *Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n *таких, що* $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, *справджується оцінка*

$$\varepsilon_M \left(B^\Omega_{\infty,\theta}, L_1 \right) \gg \omega(2^{-n}) (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}. \tag{30}$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку знизу величини $\varepsilon_M \left(B^\Omega_{\infty,\theta}, L_2 \right)$. Для цього використаємо множину тригонометричних поліномів

$$T'\left(Q'_n\right)_\infty = \left\{ t \in T'\left(Q'_n\right) : \|t^1_s\|_\infty \leq 1 \right\},$$

запропоновану В. М. Темляковим [3].

Для $f \in L_2(\pi_d)$ визначимо функції

$$f^R_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s} \in \Omega^*_n} e^{i(\boldsymbol{k^s}, \boldsymbol{x})} \operatorname{Re}\left(\overline{\delta}_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) e^{-i(\boldsymbol{k^s}, \boldsymbol{x})} \right),$$

$$f^I_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s} \in \Omega^*_n} e^{i(\boldsymbol{k^s}, \boldsymbol{x})} \operatorname{Im}\left(\overline{\delta}_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) e^{-i(\boldsymbol{k^s}, \boldsymbol{x})} \right),$$

де

$$\overline{\delta}_{\boldsymbol{s}}(f) := \overline{\delta}_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \overline{\rho}(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})}.$$

Тоді $f^R_n \in T'\left(Q'_n\right)$ і для полінома $t \in T'\left(Q'_n\right)$ можемо записати

$$\|f - t\|_2^2 \geq \left\| f^R_n + i f^I_n - t \right\|_2^2 =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{s} \in \Omega^*_n} \left\| t^1_{\boldsymbol{s}} - \operatorname{Re}\left(\overline{\delta}_{\boldsymbol{s}}(f) e^{-i(\boldsymbol{k^s}, \boldsymbol{x})} \right) - i \operatorname{Im}\left(\overline{\delta}_{\boldsymbol{s}}(f) e^{-i(\boldsymbol{k^s}, \boldsymbol{x})} \right) \right\|_2^2 \geq \left\| t - f^R_n \right\|_2^2. \tag{31}$$

Отже, згідно з (31), не зменшуючи загальності можна вважати, що елементи ε-сітки множини $T'\left(Q'_n\right)_\infty$ в L_2 належать $T'\left(Q'_n\right)$.

В [3] було встановлено оцінку

$$\varepsilon_M \left(T'\left(Q'_n\right)_\infty, L_2 \right) \gg |\Omega^*_n|^{\frac{1}{2}}. \tag{32}$$

Щоб скористатися оцінкою (32), покажемо, що функції f з множини $C_6 T'\left(Q'_n\right)_\infty \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}}$ з деякою сталою $C_6 > 0$ належать класу $B^\Omega_{\infty,\theta}$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Оцінимо норму $\|g\|_{B^\Omega_{\infty,\theta}}$, $g \in T'\left(Q'_n\right)_\infty$.

Спочатку розглянемо випадок $1 \leq \theta < \infty$. Згідно з (5) та властивістю згортки, одержуємо

$$\|g\|_{B^{\Omega}_{\infty,\theta}} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*} \left(\omega\left(2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})}\right)\right)^{-\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(g)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq$$

$$\leq \left(\omega(2^{-n})\right)^{-1} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*} \left\| A_{\boldsymbol{s}} * \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \leq 1} \delta_{\boldsymbol{s}'}(g) \right\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq$$

$$\leq \left(\omega(2^{-n})\right)^{-1} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*} \|A_{\boldsymbol{s}}\|_1^\theta \left\| \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \leq 1} \delta_{\boldsymbol{s}'}(g)) \right\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\omega(2^{-n})\right)^{-1} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp \left(\omega(2^{-n})\right)^{-1} n^{\frac{d-1}{\theta}}. \tag{33}$$

Нехай тепер $\theta = \infty$. Тоді для $\|g\|_{B^{\Omega}_{\infty,\infty}}$, повторюючи міркування, використані при встановленні оцінки (33), можемо записати

$$\|g\|_{B^{\Omega}_{\infty,\infty}} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*} \frac{\|A_{\boldsymbol{s}}(g)\|_\infty}{\omega\left(2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})}\right)} = \left(\omega(2^{-n})\right)^{-1} \sup_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*} \|A_{\boldsymbol{s}}(g)\|_\infty \ll$$

$$\ll \left(\omega(2^{-n})\right)^{-1} \sup_{\boldsymbol{s}\in\Omega_n^*} \left\| \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \leq 1} \delta_{\boldsymbol{s}'}(g) \right\|_\infty \leq \left(\omega(2^{-n})\right)^{-1}. \tag{34}$$

Отже, згідно з (33) та (34), функція $f(\boldsymbol{x}) = C_6 \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} g(\boldsymbol{x})$, $g \in T'\left(Q_n'\right)_\infty$, належить класу $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$, $1 \leq \theta \leq \infty$.

Таким чином, скориставшись оцінкою (32) і врахувавши, що $|\Omega_n^*|^{\frac{1}{2}} \asymp n^{\frac{d-1}{2}}$, отримаємо

$$\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_2\right) \gg \varepsilon_M\left(T'\left(Q_n'\right)_\infty \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}}, L_2\right) \gg \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{2}} =$$

$$= \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{35}$$

Тепер перейдемо до встановлення оцінки величини $\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_1\right)$. Із (35) робимо висновок, що в $C_6 T'\left(Q_n'\right)_\infty \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}}$ знайдеться 2^M функцій f_i таких, що

$$\|f_i - f_j\|_2 \gg \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1, 2^M}. \tag{36}$$

Покажемо, що при цьому буде справедливою оцінка

$$\|f_i - f_j\|_1 \gg \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1, 2^M}.$$

Дійсно, використовуючи нерівність [22]

$$\|f\|_a \leq \|f\|_1^\nu \|f\|_b^{1-\nu}, \quad f \in L_b, \quad 1 < a < b, \quad \nu = \left(a^{-1} - b^{-1}\right)\left(1 - b^{-1}\right)^{-1},$$

у випадку $a = 2,\ b = 4$ отримуємо

$$\|f_i - f_j\|_1^{1/3} \geq \|f_i - f_j\|_2 \|f_i - f_j\|_4^{-2/3}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, 2^M}. \tag{37}$$

Далі, розглянемо набір функцій $f_i(\boldsymbol{x}) = \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \varphi_i(\boldsymbol{x}), \quad i = \overline{1, 2^M}$, де φ_i належать $T'\left(Q'_n\right)_\infty$. Тоді для f_i та f_j, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, 2^M}$, використовуючи лему А, одержуємо

$$\|f_i - f_j\|_4 \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Omega_n^*} \|\delta_{\boldsymbol{s}}((f_i - f_j))\|_4^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Omega_n^*} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(\varphi_i - \varphi_j)\|_4^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Omega_n^*} \left(\|\delta_{\boldsymbol{s}}(\varphi_i)\|_\infty + \|\delta_{\boldsymbol{s}}(\varphi_j)\|_\infty\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Omega_n^*} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \asymp \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{2}} = \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}. \tag{38}$$

Співставляючи (36), (38) і (37) та враховуючи, що $M = M(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, маємо

$$\|f_i - f_j\|_1 \gg \omega(2^{-n}) (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}.$$

Тому справедливою є оцінка

$$\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_1\right) \gg \omega(2^{-n}) (\log M)^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}.$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження 2. Для класів Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ відповідні теоремі 2 результати встановлено у роботі А. С. Романюка [9], а для класів Нікольського $H^{\boldsymbol{r}}_p$ — у роботі В. М. Темлякова [3].

Покажемо тепер, що оцінка з теореми 1 у загальному випадку є непокращуваною. З цією метою встановимо у двовимірному випадку точні за порядком оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $2 \leq p \leq \infty$, у просторі L_∞.

Справедливим є таке твердження.

Теорема 3. *Нехай* $d = 2$, $2 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, *а* $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right)$, *де функція* ω *задовольняє умову* (S^α) *з деяким* $\alpha > 1/2$ *і умову* (S_l). *Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n *таких, що* $M = M(n) \asymp 2^n n$, *виконується співвідношення*

$$\varepsilon_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty\right) \asymp \omega(2^{-n}) (\log M)^{1 - \frac{1}{\theta}}. \tag{39}$$

Доведення. Оцінка зверху в (39) випливає безпосередньо з теореми 1, якщо у (30) покласти $d = 2$.

Оцінку знизу достатньо довести для класу $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$, оскільки $B^{\Omega}_{\infty,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \leq p < \infty$.

Насамперед означимо для парних n такі множини:

$$S_n = \{\boldsymbol{s}\colon \boldsymbol{s} = (2n_1, 2n_2), \quad n_1 + n_2 = n/2\}, \qquad D_n = \bigcup_{\boldsymbol{s}\in S_n} \rho(\boldsymbol{s}).$$

Зазначимо, що при $d=2$ $S_n = \Omega_n^*$, $D_n = Q_n'$ і $|D_n| \asymp 2^n n$.

Далі розглянемо набір функцій $\{f_i^n\}_{i=1}^{A_n}$, $A_n \geq |D_n|/2$, які є тригонометричними поліномами з гармоніками із множини D_n та мають такі властивості:

$$\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f_i^n)\|_\infty \leq 1, \quad i = \overline{1, A_n}, \quad \boldsymbol{s} \in S_n, \tag{40}$$

$$\|f_i^n - f_j^n\|_\infty \geq C_7 n, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1, A_n}, \quad C_7 > 0. \tag{41}$$

Функції $\{f_i^n\}_{i=1}^{A_n}$ були введені В. М. Темляковим [6] при встановленні оцінок знизу ентропійних чисел класів Нікольського $H_\infty^{\boldsymbol{r}}$.

Оцінимо $\|f_i^n\|_{B^\Omega_{\infty,\theta}}$. Повторивши міркування, використані при встановленні (33), (34), та врахувавши (40), отримаємо:

при $1 \leq \theta < \infty$

$$\|f_i^n\|_{B^\Omega_{\infty,\theta}} \leq \big(\omega(2^{-n})\big)^{-1} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in S_n} \|A_{\boldsymbol{s}}\|_1^\theta \left\| \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \leq 1} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f_i^n)) \right\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \big(\omega(2^{-n})\big)^{-1} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in S_n} \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \leq 1} \|\delta_{\boldsymbol{s}'}(f_i^n))\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp \big(\omega(2^{-n})\big)^{-1} n^{\frac{1}{\theta}},$$

і, відповідно, при $\theta = \infty$

$$\|f_i^n\|_{B^\Omega_{\infty,\infty}} \ll \big(\omega(2^{-n})\big)^{-1} \sup_{\substack{\boldsymbol{s}\in S_n \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \leq 1}} \|\delta_{\boldsymbol{s}'}(f_i^n)\|_\infty \leq \big(\omega(2^{-n})\big)^{-1}.$$

Отже, функції з множини

$$\left\{ C_8\, \omega(2^{-n}) n^{-\frac{1}{\theta}} f_i^n \right\}_{i=1}^{A_n}, \qquad C_8 > 0,$$

належать класу $B^\Omega_{\infty,\theta}$, $1 \leq \theta \leq \infty$.

Покладемо $M = M(n) = |D_n| \asymp 2^n n$. Тоді, згідно з (3) та (41), будемо мати

$$\varepsilon_M \left(B^\Omega_{p,\theta}, L_\infty\right) \gg \varepsilon_M \left(B^\Omega_{\infty,\theta}, L_\infty\right) \gg \omega(2^{-n}) n^{1-\frac{1}{\theta}} \asymp \omega(2^{-n}) (\log M)^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Теорему 3 доведено.

***Зауваження* 3.** Для класів Нікольського $H_p^{\boldsymbol{r}}$ оцінка знизу величини $\varepsilon_M \left(H_p^{\boldsymbol{r}}, L_\infty\right)$ випливає із результату В. М. Темлякова [6], а оцінку зверху встановлено Е. С. Белінським [7].

Література

1. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε-Энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**, № 2. – С. 3 – 86.
2. *Höllig K.* Diameters of classes of smooth functions // Quant. Approxim. – New York: Acad. Press, 1980. – P. 163 – 176.

3. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **189**. – С. 138 – 168.
4. *Belinskii E. S.* Approximation of functions of several variables by trigonometric polinomials with given number of harmonics, and estimates of ε-entropy // Anal. Math. – 1989. – **15**. – P. 67 – 74.
5. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Мат. заметки. – 1994. – **56**, № 5. – С. 57 – 86.
6. *Temlyakov V. N.* An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the entropy numbers // J. Complexity. – 1995. – **11**. – P. 293 – 307.
7. *Belinskii E. S.* Estimates of entropy numbers and Gaussian measures for classes of functions with bounded mixed derivative // J. Approxim. Theory. – 1998. – **93**. – P. 114 – 127.
8. *Temlyakov V. N.* An inequality for the entropy numbers and its application // J. Approxim. Theory. – 2013. – **173**. – P. 110 – 121.
9. *Романюк А. С.* Оценки энтропийных чисел и колмогоровских поперечников классов Никольского – Бесова периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 11. – С. 1540 – 1556.
10. *Dung D., Temlyakov V. N., Ullrich T.* Hyperbolic cross approximation, arXiv: 1601.03978v3.
11. *Temlyakov V. N.* On the entropy numbers of the mixed smoothness function classes // J. Approxim. Theory. – 2017. – **217**. – P. 26 – 56.
12. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным модулем непрерывности // Anal. Math. – 1994. – **20**, № 2. – P. 35 – 48.
13. *Yongsheng S., Heping W.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
14. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$ $(0 \leq x_j \leq 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **77**. – С. 5 – 34.
15. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
16. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
17. *Стасюк С. А., Федуник О. В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 5. – С. 692 – 704.
18. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
19. *Стасюк С. А.* Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 11. – С. 1551 – 1559.
20. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977. – 456 с.
21. *Харди Г., Литтлвуд И. Е., Пойа Дж.* Неравенства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
22. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. — М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.

Одержано 18.12.17