УДК 517.91+517.984.64

И. М. Гусейнов, Аг. Х. Ханмамедов

(Бакин. гос. ун-т; Ин-т математики и механики НАН Азербайджана; Ун-т „Азербайджан”, Баку)

К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ *

We consider a one-dimensional Schrödinger equation on the entire axis whose potential rapidly decreases at the left end and infinitely increases at the right end. By the method of transformation operators, we study the inverse scattering problem. We establish conditions for the scattering data under which the inverse problem is solvable. The basic Marchenko-type integral equations are investigated and their unique solvability is established.

Розглядається одновимірне рівняння Шредінгера на всій осі, потенціал якого на лівому кінці швидко спадає, а на правому нескінченно зростає. Методом операторів перетворення вивчається обернена задача розсіяння. Отримано умови на дані розсіяння, що дають можливість розв'язати обернену задачу. Виведено основні інтегральні рівняння типу Марченка та доведено їх однозначну розв'язність.

1. Введение и основные результаты. Обратная задача рассеяния для одномерного уравнения Шредингера с убывающим потенциалом и с потенциалом типа ступеньки детально исследована в работах многих авторов (см. $[1-5]$ и приведенную там библиографию). Интерес представляет также обратная задача для оператора Шредингера с бесконечно растущим потенциалом. Важный шаг в этом направлении был сделан в работе [6], точнее, была решена обратная задача рассеяния для одномерного уравнения Шредингера с растущим на одном конце потенциалом. В последнем случае, как следует из работы [6], в отличие от уравнения Шредингера с убывающим потенциалом и с потенциалом типа ступеньки, не удается получить условия на данные рассеяния, обеспечивающие принадлежность потенциала к данному классу с условием на обоих концах. Последнее обстоятельство в свою очередь связано с отсутствием основного уравнения типа Марченко на левом конце.

В настоящей работе указан класс растущих на одном конце потенциалов, в котором обратная задача рассеяния для одномерного уравнения Шредингера решается эффективно. Рассмотрим уравнение Шредингера

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty, \tag{1}$$

где вещественный потенциал $q(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{0} (1+|x|)\,|q\,(x)|\,dx + \int_{0}^{\infty} \left(1+|x|^4\right) |q\,(x)-x|\,dx + < \infty. \tag{2}$$

В данной работе изучена обратная задача рассеяния. Найдены условия на данные рассеяния, которые позволяют решить обратную задачу в классе (2). Получены основные интегральные уравнения типа Марченко на обоих концах. Доказана их однозначная разрешимость.

Отметим, что обратные задачи для одномерного уравнения Шредингера с дополнительным линейным потенциалом в различных постановках исследовались в работах $[7-10]$.

* Выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики (гранты № EIF/MQM/Elm-Tehsil-1-2016-1(26)-71/05/1, № EIF/MQM/Elm-Tehsil-1-2016-1(26)-71/12/1).

Сформулируем основные результаты работы.

Пусть Γ — комплексная λ-плоскость с разрезом по положительной полуоси. В плоскости Γ рассмотрим функцию $\sqrt{\lambda}$, выбирая аналитическую ветвь радикала так, что $\sqrt{\lambda + i0} > 0$ при $\lambda > 0$.

Известно [1–4], что уравнение (1) при условии (2) имеет решение $e(x, \lambda)$, представимое в виде

$$e_-(x,\lambda) = e^{-i\sqrt{\lambda}x} + \int\limits_{-\infty}^{x} K^-(x,t)e^{-i\sqrt{\lambda}t}dt. \tag{3}$$

При этом ядро $K^-(x,t)$ вещественно и удовлетворяет соотношениям

$$\left|K^-(x,t)\right| \leq \frac{1}{2}\,\sigma^-\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{\sigma_1^-\left(\frac{x+t}{2}\right)}, \tag{4}$$

$$K^-(x,x) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} q(t)dt, \tag{5}$$

где $\sigma^-(x) = \int_{-\infty}^{x} |q(t)|dt,\ \sigma_1^-(x) = \int_{-\infty}^{x} \sigma^-(t)dt.$

Введем в рассмотрение уравнение Эйри

$$-y'' + xy = \lambda y. \tag{6}$$

Известно [10, 11], что решением уравнения (6) является функция Эйри $\mathrm{A}i(x-\lambda)$.

Положим

$$e_0(x,\lambda) = \sqrt{\pi}\mathrm{A}i(x-\lambda). \tag{7}$$

Как следует из работ [7, 8], при условии (2) уравнение (1) имеет решение $e_+(x,\lambda)$, представимое в виде

$$e_+(x,\lambda) = e_0(x,\lambda) + \int\limits_{x}^{\infty} K^+(x,t)e_0(t,\lambda)dt. \tag{8}$$

Ядро $K^+(x,t)$ вещественно и удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\left|K^+(x,t)\right| \leq \frac{1}{2}\,\sigma^+\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{\sigma_1^+\left(\frac{x+t}{2}\right)}, \tag{9}$$

$$K^+(x,x) = \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\infty}[q(t)-t]dt, \tag{10}$$

где $\sigma^+(x) = \int_{x}^{\infty} |q(t)-t|dt,\ \sigma_1^+(x) = \int_{x}^{\infty} \sigma^+(t)dt.$

Рассмотрим решение задачи рассеяния

$$e_+(x,\lambda) = a(\lambda)\overline{e_-(x,\lambda)} + \overline{a(\lambda)}e_-(x,\lambda), \quad \lambda \in \partial\Gamma, \quad \lambda \neq 0, \tag{11}$$

где

$$a(\lambda) = \frac{\{e_-(x,\lambda), e_+(x,\lambda)\}}{2i\sqrt{\lambda}}, \tag{12}$$

причем здесь и далее через $\{u,v\} = uv' - u'v$ обозначен вронскиан функций u и v.

Функции $t(\lambda) = a^{-1}(\lambda)$ и $r(\lambda) = \dfrac{\overline{a(\lambda)}}{a(\lambda)}$ назовем соответственно коэффициентом прохождения и коэффициентом отражения. Нам понадобятся некоторые свойства коэффициента прохождения. Запишем их в виде условия.

I. Функция $a(\lambda)$ аналитична в плоскости Γ и непрерывна вплоть до границы $\partial\Gamma$, за исключением, быть может, точки $\lambda = 0$. Кроме того, функция $a(\lambda)$ может иметь лишь конечное число простых отрицательных нулей $\lambda_j,\ j = 1,\ldots,N$. Имеют место соотношения

$$a(\lambda) = \frac{C}{2i\sqrt{\lambda}} + O(1), \quad \lambda \to 0, \tag{13}$$

$$a(\lambda) = \sqrt{\pi}\frac{\mathrm{A}i'(-\lambda) + i\sqrt{\lambda}\mathrm{A}i(-\lambda)}{2i\sqrt{\lambda}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right], \quad \lambda \to \infty. \tag{14}$$

Введем обозначения

$$\left(m_j^{\pm}\right)^2 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e_{\pm}^2(x,\lambda_j)dx, \quad j = 1,\ldots,N, \tag{15}$$

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \pi\sum_{\lambda_j<\lambda}\left(m_j^+\right)^{-2}, & \lambda \le 0, \\ \pi\sum_{j=1}^{N}\left(m_j^+\right)^{-2} + \int_0^{\lambda}\dfrac{|a(u)|^{-2}}{4\sqrt{u}}du, & \lambda > 0. \end{cases} \tag{16}$$

Величины $m_j^{\pm}, j = 1,\ldots,N$, называются нормировочными коэффициентами. Нормировочные коэффициенты связаны равенствами

$$\left(m_j^+\right)^2\left(m_j^-\right)^2 = -4\lambda_j\dot{a}^2(\lambda_j), \quad j = 1,\ldots,N. \tag{17}$$

Набор величин $\left\{t(\lambda) = a^{-1}(\lambda), \lambda \in \partial\Gamma; \lambda_j, \lambda_j < 0; m_j^+ > 0, j = 1,\ldots,N\right\}$ назовем данными рассеяния уравнения (1). Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера (1) состоит в восстановлении потенциала $q(x)$ по данным рассеяния.

При решении обратной задачи особую роль играют так называемые основные интегральные уравнения типа Марченко.

Теорема 1. *При каждом фиксированном* x *функции* $K^{\pm}(x,y)$, *входящие в представления* (3), (8), *удовлетворяют интегральным уравнениям*

$$F^{\pm}(x,y)+K^{\pm}(x,y)\pm\int\limits_{x}^{\pm\infty}K^{\pm}(x,t)F^{\pm}(t,y)dt=0,\quad \pm(y-x)>0, \tag{18}$$

где

$$F^{+}(x,y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e_{+}^{0}\left(x,\lambda\right)e_{+}^{0}\left(y,\lambda\right)d\xi\left(\lambda\right),\quad \xi\left(\lambda\right)=\rho\left(\lambda\right)-\lambda, \tag{19}$$

$$F^{-}(x,y)=F^{-}(x+y)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial\Gamma}\frac{r\left(\lambda\right)}{\sqrt{\lambda}}e^{-i\sqrt{\lambda}(x+y)}d\lambda+\sum_{j=1}^{N}\left(m_{j}^{-}\right)^{-2}e^{-i\sqrt{\lambda_j}(x+y)}. \tag{20}$$

Исследования уравнения (18) типа Марченко позволяют получить следующие необходимые условия на функции рассеяния $F^{\pm}(x,y)$.

II. Функция $F^{+}(x,y)$, определенная формулой (19), непрерывно дифференцируема и при всех $a>\infty$ удовлетворяет условиям

$$\left|F^{+}(x,y)\right|\le C(a),\quad x\ge a,\quad y\ge a,\qquad \left|\int\limits_{a}^{\infty}\sup_{x>a}\left|F^{+}(x,t)\right|dt\right|<\infty,$$

$$\lim_{N\to\infty}\left|\int\limits_{N}^{\infty}\sup_{x\ge a}\left|F^{+}(x,y)\right|dy\right|=0,$$

$$\left|\int\limits_{x_1}^{\infty}(1+|y|)\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)F^{+}(x,y)\right|dy\right|\le C_1(a),\quad x\ge a,$$

$$\left|\int\limits_{a}^{\infty}\left(1+|x|^4\right)\left|\frac{d}{dx}F^{+}(x,x)\right|dx\right|<C_2(a),$$

$$\lim_{h\to 0}\sup_{z\ge x}\left|\int\limits_{x}^{\infty}\left|F^{+}(z,y+h)-F^{+}(z,y)\right|dy\right|=0.$$

III. Функция $F^{-}(x)$, определенная формулой (20), абсолютно непрерывна и при всех $a<\infty$ удовлетворяет условиям

$$\int\limits_{-\infty}^{a}\left|F^{-}(x)\right|dx<\infty,\qquad \int\limits_{-\infty}^{a}(1+|x|)\left|\frac{dF^{-}}{dx}\right|dx<\infty.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* I – III. *Тогда при каждом фиксированном* x *уравнения* (18) *имеют единственные решения* $K^{+}(x,\cdot)\in L_1(x,\infty)$, $K^{-}(x,\cdot)\in L_1(-\infty,x)$.

Теоремы 1, 2 позволяют решить обратную задачу по следующему алгоритму:

Пусть даны данные рассеяния $\left\{a(\lambda); \lambda_j; m_j^+, j = 1, \ldots, N\right\}$.

Шаг 1. По формулам (7), (15)–(19) строим функции $F^{\pm}(x, y)$.

Шаг 2. Решая основные уравнения (18), находим функции $K^{\pm}(x, y)$.

Шаг 3. Коэффициент $q(x)$ восстанавливаем по любой из формул (5), (10).

2. Прямая задача рассеяния. Рассмотрим решение $e_-(x, \lambda)$ уравнения (1). В силу (3), (4) $e_-(x, \lambda)$ является аналитической функцией переменной λ в плоскости Γ и непрерывной вплоть до ее границы $\partial\Gamma$.

Для дальнейших исследований нам понадобятся некоторые свойства функции Эйри $\mathrm{A}i(z)$. Известно [11, 3], [10] (§4), что $\mathrm{A}i\,(z)$ является целой функцией и принимает вещественные значения на действительной оси. Имеют место [11, 3], [10] (§4) следующие асимптотические формулы при $z \to \infty$:

$$\mathrm{A}i(z) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\zeta}\left(1 + O\left(\zeta^{-1}\right)\right), \quad |\arg z| < \pi, \tag{21}$$

$$\mathrm{A}i(-z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} \left\{\sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + O\left(\zeta^{-1}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) O\left(\zeta^{-1}\right)\right\}, \quad |\arg z| < \frac{2\pi}{3}, \tag{22}$$

$$\mathrm{A}i'(z) = -\frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}\, z^{\frac{1}{4}} e^{-\zeta}\left(1 + O\left(\zeta^{-1}\right)\right), \quad |\arg z| < \pi, \quad z \to \infty, \tag{23}$$

$$\mathrm{A}i'(-z) = -\pi^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{4}} \left\{\cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + O\left(\zeta^{-1}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) O\left(\zeta^{-1}\right)\right\}, \quad |\arg z| < \frac{2\pi}{3}. \tag{24}$$

Из формул (7), (21) следует, что решение $e_0(x, \lambda)$ уравнения (6) для всех λ экспоненциально убывает при $x \to +\infty$. Более того [7], справедлива формула

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e_0(x, \lambda) e_0(y, \lambda) d\lambda = \delta(x - y), \tag{25}$$

где δ — дельта-функция Дирака.

Рассмотрим теперь решение $e_+(x, \lambda)$ уравнения (1). В силу (8), (9) $e_+(x, \lambda)$ является целой функцией переменной λ в плоскости Γ и принимает вещественные значения при действительных значениях λ.

Далее, из представления (3) вследствие вещественности потенциала $q(x)$ следует, что при $\lambda \in \partial\Gamma$ решением уравнения (3) является также функция

$$\overline{e_-(x, \lambda)} = e^{i\sqrt{\lambda}x} + \int_{-\infty}^{x} K^-(x, t) e^{i\sqrt{\lambda}t} dt. \tag{26}$$

Более того, решения $e_-(x,\lambda)$ и $\overline{e_-(x,\lambda)}$ линейно независимы, поскольку в силу (3), (4), (26) их вронскиан равен $2i\sqrt{\lambda}$: $\left\{e_-(x,\lambda), \overline{e_-(x,\lambda)}\right\} = 2i\sqrt{\lambda}$. Поэтому при $\lambda \in \partial\Gamma,\ \lambda \neq 0$, справедливо тождество (11). Из (11) следует формула (12), согласно которой функция $a(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение в плоскость Γ и непрерывна вплоть до границы $\partial\Gamma$, за исключением, быть может, точки $\lambda = 0$.

Изучим расположение нулей функции $a(\lambda)$. В силу (7) функция $a(\lambda)$ не равна нулю при $\lambda \in \partial\Gamma,\ \lambda \neq 0$. Если при $\lambda = \lambda_j,\ \lambda_j \notin \partial\Gamma,\ a(\lambda)$ равна нулю, то решения $e_-(x,\lambda_j)$ и $e_+(x,\lambda_j)$ окажутся линейно зависимыми, так что $e_-(x,\lambda_j) = d_j e_+(x,\lambda_j) = \psi(x)$, где d_j — постоянная. Так как $e_+(x,\lambda_j)$ экспоненциально убывает при $x \to +\infty$, а $e_-(x,\lambda_j)$ — при $x \to -\infty$, то $\psi(x)$ — собственная функция уравнения (1) с собственным значением λ_j. Но при действительных $q(x)$ уравнение (1) самосопряжено, поэтому λ_j — отрицательное число. С другой стороны, полагая в формуле (12) $x = 0$ и учитывая (21)–(24), после несложных преобразований получаем (14). Отсюда и из (21), (23) следует, что при достаточно больших значениях $-\lambda$ функция $a(\lambda)$ принимает только отрицательные значения, т. е. не равна нулю. Следовательно, нули функции $a(\lambda)$ образуют ограниченное множество.

Далее, из соотношений (3), (4), (8), (9) следует, что при $\lambda = 0$ любое решение уравнения (1) имеет конечное число нулей. Поэтому задача (1) может иметь только конечное число собственных значений. Отсюда следует, что число нулей функции $a(\lambda)$ в плоскости Γ конечно. Покажем, что эти нули простые. Пусть $f(x,\lambda)$ — некоторое решение уравнения (1). С помощью простых вычислений имеем $f^2 = \left\{\dot{f}, f\right\}'$, где $\dot{f} = \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}$. Из последнего соотношения следует тождество

$$2i\sqrt{\lambda_j}\,\dot{a}(\lambda_j) = \int_{-\infty}^{\infty} e_+(x,\lambda_j)e_-(x,\lambda_j)dx = d_j \int_{-\infty}^{\infty} e_+^2(x,\lambda_j)dx = d_j^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e_-^2(x,\lambda_j)dx. \qquad (27)$$

Из соотношений (15), (27) следует справедливость формулы (17), согласно которой $\dot{a}(\lambda_j) \neq 0$, т. е. нули функции $a(\lambda)$ простые.

В дальнейшем нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1. *Функция* $\dfrac{1}{a(\lambda)}$ *ограничена вблизи нуля.*

Доказательство. Утверждение леммы очевидно, если $\{e_-(x,\lambda), e_+(x,\lambda)\}|_{\lambda=0} = C \neq 0$, поскольку в этом случае в силу (12) справедливо соотношение $a(\lambda) \sim \dfrac{C}{2i\sqrt{\lambda}},\ \lambda \to 0$. В общем случае нам придется рассмотреть семейство уравнений $-y'' + q_\beta(x)y = \lambda y$, имеющих „срезанные" потенциалы

$$q_\beta(x) = \begin{cases} q(x), & x > -\beta, \\ 0, & x \leq -\beta, \end{cases}$$

и их решения $e_-^{(\beta)}(x,\lambda)$, $e_+^{(\beta)}(x,\lambda)$. Поскольку при таких потенциалах функция $e_-^{(\beta)}(x,\lambda)$ непрерывно дифференцируема по λ, то из (12) следует, что

$$a_\beta(\lambda) = \frac{C_\beta}{\sqrt{\lambda}} + A_\beta(\lambda),$$

где $C_\beta = \left\{e_-^{(\beta)}(x,\lambda), e_+^{(\beta)}(x,\lambda)\right\}\Big|_{\lambda=0}$, а функция $A_\beta(\lambda)$ непрерывна в точке $\lambda = 0$. Заметим, что если $C_\beta = 0$, то в силу (11) $a_\beta(0) \neq 0$. Кроме того, для достаточно малых ρ в области $0 < |\lambda| < \rho$ функция $a_\beta(\lambda)$ не имеет нулей и равномерно по окружности $|\lambda| = \rho$ справедливо равенство $\lim_{\beta\to+\infty} a_\beta(\lambda) = a(\lambda)$. Поэтому в последней окружности функции $\dfrac{1}{a_\beta(\lambda)}$ равномерно ограничены. Из формулы (11) видно, что они равномерно ограничены и при $\lambda \in \partial\Gamma,\ \lambda \leq \rho$. Следовательно, начиная с некоторого β функции $\dfrac{1}{a_\beta(\lambda)}$ аналитичны в области $D_\rho = \{\lambda\colon \lambda \in \Gamma, |\lambda| < \rho\}$ и равномерно ограничены на ее границе ∂D_ρ: $\sup_{\lambda\in\partial D_\rho}\left|\dfrac{1}{a_\beta(\lambda)}\right| = M < \infty$, откуда, согласно теореме о максимуме модуля аналитической функции, заключаем, что $\sup_{\lambda\in D_\rho}\left|\dfrac{1}{a_\beta(\lambda)}\right| = M < \infty$. Так как $\lim_{\beta\to+\infty} a_\beta(\lambda) = a(\lambda)$, то, переходя в этом неравенстве к пределу, получаем $\sup_{\lambda\in D_\rho}\left|\dfrac{1}{a(\lambda)}\right| \leq M$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Имеют место формулы разложения*

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial\Gamma}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\overline{e_-(x,\lambda)} + r(\lambda)e_-(x,\lambda)\right]e_-(y,\lambda)d\lambda +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\left(m_j^-\right)^{-2}e_-(x,\lambda_j)e_-(y,\lambda_j) = \delta(x-y), \tag{28}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e_+(x,\lambda)e_+(y,\lambda)d\rho(\lambda) = \delta(x-y), \tag{29}$$

где $\rho(\lambda)$ определяется формулой (26) *и* $\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda + i0}$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$-y'' + q(x)y - \lambda y = f(x),$$

где $f(x)$ — произвольная вещественная функция из $L_2(-\infty,\infty)$, для которой нужно получить разложение. Следуя соответствующим рассуждениям Титчмарша [12, 3, 2], находим, что соответствующая функция Грина $G(x,y,\lambda)$ имеет вид

$$G(x,y,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e_+(x,\lambda)e_-(y,\lambda)}{2i\sqrt{\lambda}a(\lambda)}, & y \leq x,\\[2ex] \dfrac{e_-(x,\lambda)e_+(y,\lambda)}{2i\sqrt{\lambda}a(\lambda)}, & y > x. \end{cases}$$

Согласно последнему равенству $G\left(x,y,\lambda\right)$ является аналитической функцией в плоскости Γ, за исключением простых полюсов $\lambda_j,\ j = 1,\ldots,N$. Положим

$$\Phi(x,\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,\lambda)f(y)dy.$$

Тогда будем иметь

$$f(x) = -\frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x,\lambda+i0)d\lambda,$$

$$f(x) = \frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x,\lambda-i0)d\lambda.$$

Отсюда следует, что

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma}\Phi(x,\lambda)d\lambda + \sum_{j=1}^{N}\operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_j}\Phi(x,\lambda).$$

Подставляя в последнее равенство вместо $\Phi(x,\lambda)$, $G(x,y,\lambda)$ их выражения, получаем

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma}\frac{e_+(x,\lambda)\,e_-(y,\lambda)}{2i\sqrt{\lambda}a(\lambda)}d\lambda + \sum_{j=1}^{N}\operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_j}\frac{e_+(x,\lambda)e_-(y,\lambda)}{2i\sqrt{\lambda}a(\lambda)} = \delta(x-y), \tag{30}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma}\frac{e_-(x,\lambda)\,e_+(y,\lambda)}{2i\sqrt{\lambda}a(\lambda)}d\lambda + \sum_{j=1}^{N}\operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_j}\frac{e_-(x,\lambda)e_+(y,\lambda)}{2i\sqrt{\lambda}a(\lambda)} = \delta(x-y). \tag{31}$$

Учитывая равенства (11), (15), (27) в формуле (30), получаем (28).

Далее, из формулы (11) следует, что при $\lambda > 0$ справедливо тождество

$$\frac{e_+(x,\lambda)}{|a(\lambda)|^2} = \frac{e_-(x,\lambda+i0)}{a(\lambda+i0)} + \frac{\overline{e_-(x,\lambda+i0)}}{\overline{a(\lambda+i0)}} = \frac{e_-(x,\lambda+i0)}{a(\lambda+i0)} + \frac{e_-(x,\lambda-i0)}{a(\lambda-i0)}.$$

Последнее соотношение вместе с (16), (27), (31) приводят к формуле разложения (29).

Лемма 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Заметим, прежде всего, что из соотношений (12), (21)–(24) следует существование интегралов, входящих в правые части формул (19), (20), в смысле главного значения. Для вывода основных интегральных уравнений (18) воспользуемся формулами разложения (25), (29) по собственным функциям задачи рассеяния. Из известных свойств операторов преобразования и (8), (9) следует, что

$$e_0(y,\lambda) = e_+(y,\lambda) + \int\limits_{y}^{\infty}K(y,t)e_+(t,\lambda)dt,$$

где ядро $K(y,t)$ удовлетворяет неравенству, аналогичному (9). Тогда из формулы разложения (29) имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e_+(x,\lambda)\,e_0(y,\lambda)\,d\rho(\lambda) = \delta(x-y) +$$

$$+\int\limits_y^\infty K\left(y,t\right)\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty e_+\left(x,\lambda\right)e_+\left(t,\lambda\right)d\rho\left(\lambda\right)\right)\delta\left(x-t\right)dt=$$

$$=\delta\left(x-y\right)+\int\limits_y^\infty K\left(y,t\right)\delta\left(x-t\right)dt=\delta\left(x-y\right)+K\left(y,x\right)=\delta\left(x-y\right).$$

С другой стороны, из (8) получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty e_+\left(x,\lambda\right)e_0\left(y,\lambda\right)d\lambda=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty e_0\left(x,\lambda\right)e_0\left(y,\lambda\right)d\lambda+$$

$$+\int\limits_x^\infty K^+\left(x,t\right)\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty e_0\left(t,\lambda\right)e_0\left(y,\lambda\right)d\lambda\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty e_0\left(x,\lambda\right)e_0\left(y,\lambda\right)d\lambda+\int\limits_x^\infty K^+\left(x,t\right)\delta\left(t-y\right)dt=\delta\left(x-y\right)+K^+\left(x,y\right),$$

т. е.

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty e_+\left(x,\lambda\right)e_0\left(y,\lambda\right)d\lambda-K^+\left(x,y\right)=\delta\left(x-y\right).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty e_+\left(x,\lambda\right)e_0\left(y,\lambda\right)d\xi\left(\lambda\right)+K^+\left(x,y\right)=0.$$

Подставляя в последнюю формулу вместо $e_+(x,\lambda)$ его представление (8), имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty e_+\left(x,\lambda\right)e_0\left(y,\lambda\right)d\xi\left(\lambda\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty e_0\left(x,\lambda\right)e_0\left(y,\lambda\right)d\xi\left(\lambda\right)+$$

$$+\int\limits_x^\infty K^+\left(x,t\right)\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty e_0\left(t,\lambda\right)e_0\left(y,\lambda\right)d\xi\left(\lambda\right)\right)dt.$$

Из последних двух равенств с учетом (19) получаем уравнение (18) для случая „$+$”.

Выведем теперь основное уравнение (18) для случая „$-$”. Рассмотрим формулу разложения (28). Из (3), (4) находим

$$e^{-i\sqrt{\lambda}y}=e_-\left(y,\lambda\right)+\int\limits_{-\infty}^y\hat{K}\left(y,t\right)e\left(t,\lambda\right)dt,$$

где ядро $\hat{K}(y,t)$ удовлетворяет неравенству, аналогичному (4). Тогда из (28) имеем

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial\Gamma}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\overline{e_-(x,\lambda)}+r(\lambda)\,e_-(x,\lambda)\right]e^{-i\sqrt{\lambda}y}d\lambda+\sum_{j=1}^{N}\left(m_j^-\right)^{-2}e_-(x,\lambda_j)e^{-i\sqrt{\lambda_j}y}=$$

$$=\delta(x-y)+\int\limits_{-\infty}^{y}\hat{K}(y,t)\,\delta(x-t)\,dt=\delta(x-y)+\hat{K}(y,x)=\delta(x-y). \tag{32}$$

С другой стороны, используя известное равенство

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial\Gamma}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{i\sqrt{\lambda}(x-y)}d\lambda=\delta(x-y) \tag{33}$$

и соотношения (3), (20), находим

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial\Gamma}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\overline{e_-(x,\lambda)}+r(\lambda)e_-(x,\lambda)\right]e^{-i\sqrt{\lambda}y}d\lambda+\sum_{j=1}^{N}\left(m_j^-\right)^{-2}e_-(x,\lambda_j)e^{-i\sqrt{\lambda_j}}y=$$

$$=\delta(x-y)+\int\limits_{-\infty}^{x}K^-(x,t)\delta(y-t)dt+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial\Gamma}\frac{r(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\,e^{-i\sqrt{\lambda}(x+y)}d\lambda+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\left(m_j^-\right)^{-2}e^{-i\sqrt{\lambda_j}(x+y)}+\int\limits_{-\infty}^{x}K^-(x,t)\left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial\Gamma}\frac{r(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}e^{-i\sqrt{\lambda}(t+y)}d\lambda\right)dt+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{x}K^-(x,t)\left(\sum_{j=1}^{N}\left(m_j^-\right)^{-2}e^{-i\sqrt{\lambda_j}(t+y)}\right)dt=$$

$$=\delta(x-y)+K^-(x,y)+F^-(x+y)+\int\limits_{-\infty}^{x}K^-(x,t)F^-(t+y)dt.$$

Сравнивая эти равенства с (32), получаем основное уравнение (18) для случая „$-$”.

Теорема 1 доказана.

Следует отметить, что основные интегральные уравнения позволяют выявить более тонкие характеристики коэффициента $a(\lambda)$ вблизи точки $\lambda=0$. Действительно, если решения $e(x,\lambda)$ и $f(x,\lambda)$ линейно независимы при $\lambda=0$, т. е. $\{e_-(x,\lambda),e_+(x,\lambda)\}|_{\lambda=0}\neq 0$, то $a(\lambda)\sim\dfrac{C}{2i\sqrt{\lambda}}$, $\lambda\to 0$. При этом коэффициент отражения $r(\lambda)$ непрерывен в точке $\lambda=0$ и $r(0)=-1$. Пусть теперь $\{e_-(x,\lambda),e_+(x,\lambda)\}|_{\lambda=0}=0$. Тогда возможны два случая:

1) $e_-(0,0)=e_+(0,0)=0$;

2) $e'_{-x}(0,0)=me_-(0,0)$, $e'_{+x}(0,0)=me_+(0,0)$, где m — некоторое действительное число.

С помощью методики, предложенной в работе [5], устанавливается, что в обоих случаях функция $a(\lambda)$ непрерывна в точке $\lambda=0$, причем в силу (11) $a(0)$ — отличное от нуля вещественное число. Отсюда следует, что коэффициент отражения $r(\lambda)$ непрерывен в точке $\lambda=0$ и $r(0)=1$, если $\{e_-(x,\lambda),e_+(x,\lambda)\}|_{\lambda=0}=0$.

Тем самым условие I установлено.

Далее, пользуясь основными уравнениями (18) и оценками (4), (9), выводим условия II, III (см., например, [8, 13]).

3. Обратная задача рассеяния. ***Доказательство теоремы*** **2.** Заметим, прежде всего, что в силу условий I – III уравнения (18) порождаются вполне непрерывными операторами в пространствах $L_1(x, \pm\infty)$. Поэтому достаточно доказать, что соответствующие однородные уравнения имеют только нулевое решение.

Рассмотрим сначала случай „+". Пусть $h_+(y) \in L_1(x, \infty)$ является решением однородного уравнения

$$h_+(y) + \int_x^\infty F^+(y,t)h_+(t)dt = 0, \quad y > x. \tag{34}$$

В силу вещественности $F^+(x, y)$ можно считать, что решение $h_+(y)$ является вещественным. Из (34) и условия II вытекает, что функция $h_+(y)$ ограничена на полуоси $y > x$, и, следовательно, $h_+(y) \in L_2(x, \infty)$. Тогда справедливо равенство

$$\int_x^\infty |h_+(y)|^2 dy + \int_x^\infty \int_x^\infty F^+(y+t)\, h_+(t)\ h_+(y)\, dtdy = 0.$$

Заметим, что в силу формулы разложения (25) имеет место равенство

$$\int_x^\infty |h_+(y)|^2 dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty |H_+(\lambda)|^2 d\lambda,$$

где $H_+(\lambda) = \int_x^\infty h_+(y) e_0(y, \lambda)\, dy$. Подставляя в предпоследнее равенство вместо функции $F^+(x, y)$ ее выражение (19) и учитывая, что $H_+(\lambda)$ принимает вещественные значения, получаем

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{|a(\lambda)|^2 \sqrt{\lambda}} |H_+(\lambda)|^2 d\lambda + \sum_{j=1}^N \left(m_j^+\right)^{-2} H_+^2(\lambda_j) = 0.$$

Отсюда следует, что $H_+(\lambda) = 0$, т. е. $h_+(y) = 0$.

Рассмотрим теперь случай „−". Пусть при любом x однородное уравнение

$$h_-(y) + \int_{-\infty}^x F^-(y+t)h(t)dt = 0, \quad y < x, \tag{35}$$

имеет нетривиальное решение из $L_1(-\infty, x)$. В силу вещественности $F^-(x)$ можно считать, что $h_-(y)$ является вещественным. Из (35) и условия III вытекает, что функция $h_-(y)$ ограничена на полуоси $y < x$, и, следовательно, $h_-(y) \in L_2(-\infty, x)$. Тогда справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^x |h_-(y)|^2 dy + \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^x F^-(y+t)\, h_-(t)\, h_-(y)\, dtdy = 0.$$

Подставляя в последнее равенство вместо функции $F^{-}(x)$ ее выражение (20), получаем

$$\int_{-\infty}^{x} |h_{-}(y)|^2 \, dy + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Gamma} \frac{r(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} H_{-}^2(\lambda) \, d\lambda + \sum_{j=1}^{N} \left(m_j^{-}\right)^{-2} H_{-}^2(\lambda_j) = 0,$$

где

$$H_{-}(\lambda) = \int_{-\infty}^{x} h_{-}(y) e^{-i\sqrt{\lambda} y} dy. \tag{36}$$

В силу формулы разложения (33) имеем

$$\int_{-\infty}^{x} |h_{-}(y)|^2 \, dy = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Gamma} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} |H_{-}(\lambda)|^2 \, d\lambda.$$

Поскольку при $\lambda > 0$ справедливы равенства $\overline{H_{-}(\lambda + i0)} = H_{-}(\lambda - i0)$, $\overline{r(\lambda + i0)} = r(\lambda - i0)$, из последних равенств следует, что

$$\frac{1}{4\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[2 |H_{-}(\lambda + i0)|^2 + r(\lambda + i0) H_{-}^2(\lambda + i0) + \overline{r(\lambda + i0)}\, \overline{H_{-}^2(\lambda + i0)}\right] d\lambda +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \left(m_j^{-}\right)^{-2} H_{-}^2(\lambda_j) = 0.$$

Запишем последнее соотношение в виде

$$\frac{1}{4\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left|\overline{H_{-}(\lambda + i0)} + r(\lambda + i0) H_{-}(\lambda + i0)\right|^2 d\lambda + \sum_{j=1}^{N} \left(m_j^{-}\right)^{-2} H_{-}^2(\lambda_j) = 0.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\frac{\overline{H_{-}(\lambda)}}{\overline{a(\lambda)}} = -\frac{H_{-}(\lambda)}{a(\lambda)}, \quad \lambda \in \partial\Gamma,$$

$$H_{-}(\lambda_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, N.$$

В силу предпоследнего соотношения получаем

$$\frac{\overline{H_{-}(\lambda)}}{\overline{a(\lambda)\sqrt{\lambda}}} = \frac{H_{-}(\lambda)}{a(\lambda)\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda \in \partial\Gamma.$$

Два последних соотношения показывают, что функция $g(\lambda) = \dfrac{H_{-}(\lambda)}{a(\lambda)\sqrt{\lambda}}$ является целой функцией. Но тогда

$$\varphi(\lambda) = \left[\mathrm{A}i'\left(-\lambda^2\right) + i\lambda \mathrm{A}i\left(-\lambda^2\right)\right] g\left(\lambda^2\right)$$

также является целой функцией, причем согласно (14) имеет место соотношение

$$\varphi(\lambda) \sim 2\pi^{-\frac{1}{2}} i H_{-}\left(\lambda^{2}\right), \quad \lambda \to \infty.$$

Из (36) следует, что $H_{-}(\lambda) \to 0$, $\lambda \to \infty$. Поэтому из последнего соотношения и теоремы Лиувилля получаем $\varphi(\lambda) \equiv 0$, т. е. $H_{-}(\lambda) \equiv 0$. Следовательно, $h_{-}(y) = 0$.

Теорема 2 доказана.

В заключение отметим, что указанные выше необходимые условия I – III также достаточны, чтобы по данным рассеяния уравнения (1) можно было однозначно восстановить потенциал $q(x)$ из класса (2). Действительно, стандартным методом (см., например, [1, 8, 13]) устанавливается, что определенные формулами (3), (8) функции $e_{\pm}(x,\lambda)$ являются решениями уравнений

$$-e_{\pm}''(x,\lambda) + q_{\pm}(x) e_{\pm}(x,\lambda) = \lambda e_{\pm}(x,\lambda),$$

в которых потенциалы $q_{\pm}(x)$ вещественны и удовлетворяют при каждом фиксированном a неравенствам

$$\int\limits_{-\infty}^{a} (1+|x|)\,|q_{-}(x)|\,dx < \infty, \quad \int\limits_{a}^{\infty} \left(1+|x|^{4}\right) |q_{+}(x) - x|\,dx < \infty.$$

Более того, при $\lambda \in \partial\Gamma$, $\lambda \neq 0$, функции $e_{\pm}(x,\lambda)$ связаны равенством

$$e_{+}(x,\lambda) = a(\lambda)\overline{e_{-}(x,\lambda)} + \overline{a(\lambda)} e_{-}(x,\lambda),$$

из которого следует равенство $q_{-}(x) = q_{+}(x)$. Тем самым устанавливается справедливость приведенного выше алгоритма.

Литература

1. *Фаддеев Л. Д.* Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера // Тр. Мат. ин-та АН СССР. –1964. – **73**. – С. 314 – 326.
2. *Буслаев В. С., Фомин В. Л.* К обратной задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера на всей оси // Вестн. Ленингр. гос. ун-та. – 1962. – **17**, № 1. – С. 56 – 64.
3. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 332 с.
4. *Андерс И. А., Котляров В. П.* Характеризация данных рассеяния операторов Шредингера и Дирака // Теор. и мат. физика. – 1991. – **88**, № 1. – С. 72 – 84.
5. *Гусейнов И. М.* О непрерывности коэффициентов отражения одномерного уравнения Шредингера // Дифференц. уравнения. – 1985. – **22**, № 11. – С. 1993 – 1995.
6. *Кулиш П. П.* Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера на оси // Мат. заметки. – 1968. – **4**, № 6. – С. 677 – 684.
7. *Yishen Li.* One special inverse problem of the second order differential equation on the whole real axis // Chin. Ann. Math. – 1981. – **2**, № 6. – P. 147 – 155.
8. *Качалов А. П., Курылев Я. В.* Метод операторов преобразования в обратной задаче рассеяния. Одномерный Штарк-эффект // Зап. науч. сем. ЛОМИ. –1989. – **179**. – С. 73 – 87.
9. *Liu Y.* Scattering and spectral theory for Stark – Hamiltonians in one dimension // Math. Scand. – 1993. – **72**. – P. 265 – 297.
10. *Korotyaev E. L.* Resonances for 1d Stark operators // arXiv: 1703. 10820,v1[Math. SP] 31 Mar 2017.
11. *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 827 с.
12. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. – М., 1960. – Т. 1. – 278 с.
13. *Фирсова Н. Е.* Прямая и обратная задачи рассеяния для возмущенного оператора Хилла // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 3. – С. 349 – 385.

Получено 12.04.18