УДК 517.927

О. М. Атласюк, В. А. Михайлець (Ін-т математики НАН України, Київ)

ФРЕДГОЛЬМОВІ ОДНОВИМІРНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРОМ У ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА

For systems of linear differential equations on a compact interval, we investigate the dependence on a parameter ε of the solutions to boundary-value problems in the Sobolev spaces W^n_∞. We obtain a constructive criterion of the continuous dependence of the solutions of these problems on the parameter ε for $\varepsilon = 0$. The degree of convergence of these solutions is established.

Для систем лінійних диференціальних рівнянь на скінченному інтервалі досліджено залежність від параметра ε розв'язків крайових задач у просторах Соболєва W^n_∞. Встановлено конструктивний критерій неперервної залежності від параметра ε при $\varepsilon = 0$ розв'язків таких задач та знайдено швидкість збіжності цих розв'язків.

1. Вступ. Дослідження розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь є важливою частиною багатьох задач сучасного аналізу та його застосувань (див., наприклад, [1] та наведену там бібліографію). Для лінійних крайових задач умови фредгольмовості та неперервної залежності розв'язків від параметра встановлені І. Т. Кігурадзе в [2, 3]. Отримані ним результати набули подальшого розвитку в роботах другого з авторів та його учнів [4 – 6]. Нещодавно ці дослідження було поширено на більш загальні класи фредгольмових крайових задач, пов'язаних із різними функціональними банаховими просторами [7 – 11]. Такі задачі мають ряд особливостей і потребують нових підходів та методів.

Нехай задано скінченний інтервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ та числа

$$\{m, n\} \subset \mathbb{N}, \quad \varepsilon_0 > 0.$$

Розглянемо параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ сім'ю неоднорідних крайових задач вигляду

$$L(\varepsilon)y(t;\varepsilon) := y'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \quad t \in (a, b), \tag{1}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{2}$$

де при кожному фіксованому значенні параметра ε матриця-функція $A(\cdot;\varepsilon) \in W^{n-1}_\infty\big([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m}\big) =: \big(W^{n-1}_\infty\big)^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot;\varepsilon) \in W^{n-1}_\infty\big([a, b]; \mathbb{C}^m\big) =: \big(W^{n-1}_\infty\big)^m$, вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, а $B(\varepsilon)$ — лінійний неперервний оператор

$$B(\varepsilon)\colon \big(W^n_\infty\big)^m \to \mathbb{C}^m.$$

Під розв'язком крайової задачі (1), (2) розуміємо вектор-функцію $y(\cdot;\varepsilon) \in (W^n_\infty)^m$, яка задовольняє рівняння (1) майже скрізь (при $n \geq 2$ скрізь) на (a, b) та рівність (2). Крайова умова (2) є найбільш загальною для системи (1), розв'язок якої пробігає весь простір Соболєва $(W^n_\infty)^m$ [11] (лема 1). Із крайовою задачею (1), (2) можна пов'язати лінійний оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\colon \big(W^n_\infty\big)^m \to \big(W^{n-1}_\infty\big)^m \times \mathbb{C}^m. \tag{3}$$

Це обмежений фредгольмовий оператор з індексом нуль [11] (теорема 1).

Основна мета даної роботи полягає у встановленні критерію неперервної залежності розв'язків крайових задач (1), (2) від параметра ε при $\varepsilon = 0$.

2. Основні результати. Сформулюємо основні результати статті. Їх доведення наведено у п. 4.

Для того щоб досліджувана задача мала зміст, далі будемо вважати, що виконується **умова (0):** *гранична однорідна крайова задача вигляду* (1), (2)

$$L(0)y(t;0) = 0, \quad t \in (a,b), \qquad B(0)y(\cdot;0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

У цьому випадку відповідна гранична неоднорідна крайова задача має єдиний розв'язок.

Розглянемо такі **граничні умови** при $\varepsilon \to 0+$:

(I) $A(\cdot;\varepsilon) \to A(\cdot;0)$ у просторі $\big(W_\infty^{n-1}\big)^{m\times m}$;

(II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ у $\mathbb{C}^m$ для кожного $y \in \big(W_\infty^n\big)^m$.

Означення 1. *Говоримо, що розв'язок крайової задачі* (1), (2) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$, *якщо виконуються такі умови*:

$(*)$ *існує таке додатне число* $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, *що для кожного* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, *довільних правих частин* $f(\cdot;\varepsilon) \in \big(W_\infty^n\big)^m$ *і* $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ *ця задача має єдиний розв'язок* $y(\cdot;\varepsilon)$, *який належить простору* $\big(W_\infty^n\big)^m$;

$(**)$ *зі збіжності правих частин* $f(\cdot;\varepsilon) \to f(\cdot;0)$ *в* $\big(W_\infty^n\big)^m$ *та* $c(\varepsilon) \to c(0)$ *в* $\mathbb{C}^m$ *при* $\varepsilon \to 0+$ *випливає збіжність розв'язків*

$$y(\cdot;\varepsilon) \to y(\cdot;0) \quad \text{у} \quad \big(W_\infty^n\big)^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+.$$

Сформулюємо критерій неперервності розв'язку $y = y(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) за параметром ε при $\varepsilon \to 0+$ у просторі W_∞^n.

Теорема 1. *Розв'язок крайової задачі* (1), (2) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0) *та граничні умови* (I), (II).

Перейдемо до дослідження швидкості збіжності розв'язків крайової задачі (1), (2) при $\varepsilon \to 0+$.

Покладемо

$$\widetilde{d}_{n-1,\infty}(\varepsilon) := \big\|L(\varepsilon)y(\cdot;0) - f(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n-1,\infty} + \big\|B(\varepsilon)y(\cdot;0) - c(\varepsilon)\big\|_{\mathbb{C}^m},$$

де $\|\cdot\|_{n-1,\infty}$ — норма у просторі W_∞^{n-1}, а $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^m}$ — норма у просторі $\mathbb{C}^m$.

Величини

$$\big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n,\infty}$$

та $\widetilde{d}_{n-1,\infty}(\varepsilon)$ є відповідно похибкою і нев'язкою розв'язку $y(\cdot;\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2), якщо $y(\cdot;\varepsilon)$ розглядати як її точний розв'язок, а $y(\cdot;0)$ — як наближений.

Теорема 2. *Нехай крайова задача* (1), (2) *задовольняє умови* (0), (I) *і* (II). *Тоді існують додатні числа* $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ *і* γ_1, γ_2 *такі, що для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *має місце двобічна оцінка*

$$\gamma_1\, \widetilde{d}_{n-1,\infty}(\varepsilon) \le \big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n,\infty} \le \gamma_2\, \widetilde{d}_{n-1,\infty}(\varepsilon), \tag{4}$$

де числа ε_2, γ_1 *і* γ_2 *не залежать від* $y(\cdot;0)$ *і* $y(\cdot;\varepsilon)$.

Згідно з цією теоремою, похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot;\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) мають однаковий порядок мализни.

3. Допоміжні результати. Наступна теорема містить конструктивні умови, за яких неперервний оператор (3) є оборотним при достатньо малих значеннях параметра ε та гарантує неперервну залежність розв'язків від параметра у просторі $(W_\infty^n)^m$.

Теорема 3. *Нехай при $\varepsilon \to 0+$ виконуються такі умови*:

1) $\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{n-1,\infty} \to 0$ *у просторі* $\left(W_\infty^{n-1}\right)^{m\times m}$;

2) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ *для довільного* $y \in (W_\infty^n)^m$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ є оборотним. Якщо, крім цього,

3) $\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\|_{n-1,\infty} \to 0,\ c(\varepsilon) \to c(0)$,

то розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)$ задачі (1), (2) *задовольняє граничну властивість*

$$\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\|_{n,\infty} \to 0. \tag{5}$$

Доведення теореми 3 подамо у вигляді доведення чотирьох лем, наведених нижче.

Лема 1. *Нехай виконуються умови* (0) *та* 1, 2 *теореми* 3. *Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ є оборотним.*

Доведення. З умови 1 за теоремою про гомеоморфізми [11] випливає, що

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{n,\infty} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{6}$$

Тоді на підставі умови 2 отримаємо збіжність числових матриць

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)] \to [B(0)Y(\cdot;0)], \quad \varepsilon \to 0+. \tag{7}$$

Згідно з умовою (0), гранична квадратна матриця є невиродженою [11] (теорема 2). Тому для достатньо малих $\varepsilon \geq 0$

$$\det[B(\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)] \neq 0.$$

Звідси випливає оборотність оператора $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$.

Лему 1 доведено.

Розглянемо разом із вихідною неоднорідною крайовою задачею (1), (2) відносно вектор-функції $y(t;\varepsilon)$ ще три векторні крайові задачі:

$$v'(t;\varepsilon) = -A(t;\varepsilon)v(t;\varepsilon), \quad B(\varepsilon)v(\cdot;\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{8}$$

$$x'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)x(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \quad x(a;\varepsilon) = 0, \tag{9}$$

$$w'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)w(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \quad B(\varepsilon)w(\cdot;\varepsilon) = 0,$$

де параметр $\varepsilon \geq 0$ є малим. Як відомо, крайова задача (9) (задача Коші) має єдиний розв'язок.

З огляду на лему 1 маємо рівність

$$y(\cdot;\varepsilon) = v(\cdot;\varepsilon) + w(\cdot;\varepsilon) \tag{10}$$

для малих $\varepsilon \geq 0$. Тому для доведення теореми 3 достатньо показати, що за виконання її умов справджуються такі співвідношення при $\varepsilon \to 0+$:

$$\|v(\cdot;\varepsilon) - v(\cdot;0)\|_{n,\infty} \to 0, \tag{11}$$

$$\|w(\cdot;\varepsilon) - w(\cdot;0)\|_{n,\infty} \to 0. \tag{12}$$

Лема 2. *Нехай при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови теореми* 3. *Тоді має місце граничне співвідношення* (11).

Доведення. Із першої рівності крайової задачі (8) випливає, що

$$v(\cdot;\varepsilon) = Y(\cdot;\varepsilon)\widetilde{c}(\varepsilon) \tag{13}$$

для деякого $\widetilde{c}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$. Звідси, враховуючи другу рівність задачі (8), отримуємо

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)]\widetilde{c}(\varepsilon) = c(\varepsilon).$$

Тому на підставі леми 1, критерію оборотності [11] (теорема 2), формули (7) і умови 2 маємо

$$\widetilde{c}(\varepsilon) = [B(\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)]^{-1}c(\varepsilon) \to [B(0)Y(\cdot;0)]^{-1}c(0) = \widetilde{c}(0), \quad \varepsilon \to 0+.$$

Отже, із (6) і (13) отримуємо співвідношення (11).

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Нехай при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови* 1 – 3 *теореми* 3. *Тоді розв'язок задачі* (9) *має властивість*

$$\|x(\cdot;\varepsilon) - x(\cdot;0)\|_{n,\infty} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{14}$$

Доведення. Нехай число $\varepsilon > 0$ є достатньо малим. Розв'язок задачі (9) допускає зображення

$$x(t;\varepsilon) = Y^{-1}(t;\varepsilon)\int\limits_a^t Y(s;\varepsilon)f(s;\varepsilon)\,ds. \tag{15}$$

З умови 1 за теоремою про гомеоморфізми [11] маємо

$$\left\|Y^{\pm 1}(\cdot;\varepsilon) - Y^{\pm 1}(\cdot;0)\right\|_{n,\infty} \to 0 \tag{16}$$

при $\varepsilon \to 0+$. Тоді згідно з умовою 3 і співвідношенням (16)

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)f(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)f(\cdot;0)\|_{n-1,\infty} \to 0. \tag{17}$$

Це випливає з того, що W^n_∞ є банаховою алгеброю. Тепер зі співвідношень (15) – (17) отримуємо (14).

Лему 3 доведено.

Лема 4. *За умов теореми* 3 *виконується граничне співвідношення* (12).

Доведення. Вектор-функція $u(\cdot;\varepsilon) = x(\cdot;\varepsilon) - w(\cdot;\varepsilon)$ є розв'язком крайової задачі вигляду (8):

$$u'(t;\varepsilon) = -A(t;\varepsilon)u(t;\varepsilon),$$

$$B(\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon) = B(\varepsilon)x(\cdot;\varepsilon) =: \widetilde{c}(\varepsilon).$$

Із властивості 2 і леми 3 маємо $\widetilde{c}(\varepsilon) \to \widetilde{c}(0)$ при $\varepsilon \to 0+$. Тому з леми 2 випливає збіжність

$$\|u(\cdot;\varepsilon) - u(\cdot;0)\|_{n,\infty} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{18}$$

Із рівності $w(\cdot;\varepsilon) = x(\cdot;\varepsilon) - u(\cdot;\varepsilon)$ та формул (14), (18) отримуємо (12).

Потрібна гранична властивість (5) є безпосереднім наслідком рівності (10) і лем 2, 4.

Теорему 3 доведено.

***Зауваження* 1.** Означення 1 є еквівалентним наступному означенню.

Означення 2. *Говоримо, що розв'язок крайової задачі* (1), (2) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$, *якщо виконуються такі умови*:

$(*)$ *існує таке додатне число* $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, *що для кожного* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, *довільних правих частин* $f(\cdot) \in (W_\infty^n)^m$ *і* $c \in \mathbb{C}^m$ *ця задача має єдиний розв'язок* $y(\cdot;\varepsilon) \in (W_\infty^n)^m$;

$(**)$ *виконується граничне співвідношення збіжності розв'язків*

$$y(\cdot;\varepsilon) \to y(\cdot;0) \quad у \quad (W_\infty^n)^m \quad при \quad \varepsilon \to 0+.$$

З означення 1 безпосередньо випливає виконання умов означення 2. Доведемо зворотну імплікацію.

За теоремою 3 оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ має обмежений обернений оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$: $\left(W_\infty^{n-1}\right)^m \times \mathbb{C}^m \to (W_\infty^n)^m$ для довільних $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2')$. З означення 2 для достатньо малих ε випливає сильна збіжність обернених операторів

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1} \xrightarrow{s} (L(0), B(0))^{-1} \tag{19}$$

та збіжність правих частин

$$f(\cdot;\varepsilon) \to f(\cdot;0), \quad c(\varepsilon) \to c(0). \tag{20}$$

Виберемо $f(\cdot;\varepsilon) \in \left(W_\infty^{n-1}\right)^m$ та $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$. Тоді виконуються рівності

$$y(\cdot;\varepsilon) = (L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot;\varepsilon), c(\varepsilon)), \tag{21}$$

$$y(\cdot;0) = (L(0), B(0))^{-1}(f(\cdot;0), c(0)), \tag{22}$$

тобто збіжність $y(\cdot;\varepsilon)$ до $y(\cdot;0)$ рівносильна збіжності

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot;\varepsilon), c(\varepsilon)) \to (L(0), B(0))^{-1}(f(\cdot;\varepsilon), c(\varepsilon)), \quad \varepsilon \to 0+. \tag{23}$$

За теоремою Банаха – Штейнгауза для достатньо малих ε маємо

$$\left\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}\right\| \leq C. \tag{24}$$

Оскільки

$$\begin{gathered}\left\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot;\varepsilon), c(\varepsilon)) - (L(0), B(0))^{-1}(f(\cdot;0), c(0))\right\| \leq \\ \leq \left\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}\right\| \left\|(f(\cdot;\varepsilon), c(\varepsilon)) - (f(\cdot;0), c(0))\right\| + \\ + \left\|[(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1} - (L(0), B(0))^{-1}](f(\cdot;0), c(0))\right\|,\end{gathered}$$

то, враховуючи умови (19) – (24), переконуємось у виконанні граничного співвідношення $(**)$ означення 1.

Встановимо ще один допоміжний результат. Нехай оператор $(L(0), B(0))$ є оборотним. Розглянемо такі дві умови:

(i) оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$ збігається до оператора $(L(0), B(0))^{-1}$ в сильній операторній топології;

(ii) оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ збігається до оператора $(L(0), B(0))$ в сильній операторній топології.

Теорема 4. *Умови* (i) *та* (ii) *є еквівалентними, тобто при* $\varepsilon \to 0+$

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1} \xrightarrow{s} (L(0), B(0))^{-1} \Longleftrightarrow (L(\varepsilon), B(\varepsilon)) \xrightarrow{s} (L(0), B(0)). \tag{25}$$

Розіб'ємо обґрунтування рівносильності (25) на два кроки.

Крок 1. Доведемо, що сильна збіжність обернених операторів еквівалентна виконанню системи умов (I), (II).

Крок 2. Доведемо, що виконання системи умов (I), (II) еквівалентне сильній збіжності операторів.

Дійсно, за теоремою 1 оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ має обмежений обернений оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$, причому виконується сильна збіжність обернених операторів. Отже, з теореми 1 безпосередньо випливає виконання умов кроку 1. Зауважимо, що для довільних неперервних операторів, які діють у нескінченновимірних банахових просторах і залежать від ε, така рівносильність не має місця.

Перейдемо до кроку 2. Для цього покажемо, що справджується наступна лема.

Лема 5. *Гранична умова* (I) *еквівалентна кожній із таких умов*:

(a_1) $\|L(\varepsilon) - L(0)\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0+$;

(a_2) $L(\varepsilon)y \to L(0)y$ *в* $\left(W_\infty^{n-1}\right)^m$ *при* $\varepsilon \to 0+$ *для кожного* $y \in (W_\infty^n)^m$.

Доведення. Імплікація (a_1) $\Rightarrow$ (a_2) є очевидною. Залишилося показати, що з граничної умови (I) випливає умова (a_1), а з умови (a_2) — гранична умова (I). Спочатку обґрунтуємо першу імплікацію. Припустимо, що $\|A(\varepsilon) - A(0)\|_{n-1,\infty} \to 0$ при $\varepsilon \to 0+$. Для довільної вектор-функції $y \in (W_\infty^n)^m$ маємо

$$\|(L(\varepsilon) - L(0))y\|_{n-1,\infty} = \|(A(\varepsilon) - A(0))y\|_{n-1,\infty} \leq$$
$$\leq c_{n-1,\infty}\|A(\varepsilon) - A(0)\|_{n-1,\infty}\|y\|_{n-1,\infty} \leq$$
$$\leq c_n\|A(\varepsilon) - A(0)\|_{n-1,\infty}\|y\|_{n,\infty} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+.$$

Тут c_n — деяке додатне число, що не залежить від y; воно існує, оскільки W_∞^n — банахова алгебра. Тому

$$\|L(\varepsilon) - L(0)\| \leq c_n\|A(\varepsilon) - A(0)\|_{n-1,\infty} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+,$$

де $\|\cdot\|$ позначає норму лінійного неперервного оператора на парі просторів

$$L(\varepsilon)\colon\ (W_\infty^n)^m \to \left(W_\infty^{n-1}\right)^m.$$

Першу імплікацію доведено.

Доведемо тепер, що з умови (a_2) випливає гранична умова (I). Припустимо, що виконується умова (a_2). Тоді

$$Y' + A(\varepsilon)Y = [L(\varepsilon)Y] \to [L(0)Y] = Y' + A(0)Y \quad \text{в} \quad \left(W_\infty^{n-1}\right)^{m\times m}$$

при $\varepsilon \to 0+$ для кожної матриці-функції $Y \in (W_\infty^n)^{m\times m}$. При цьому матриця-функція $[L(\varepsilon)Y]$ утворена стовпцями, які є результатами дії оператора $L(\varepsilon)$ на відповідні стовпці матриці Y. Узявши тут $Y(t) \equiv I_m$, отримаємо потрібну збіжність $A(\varepsilon) \to A(0)$ в $\left(W_\infty^{n-1}\right)^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$. Другу імплікацію, а з нею лему 5 і теорему 4, доведено.

4. Доведення теорем 1 і 2. *Достатність* умов (0), (I) і (II) для того, щоб задача (1), (2) задовольняла означення 1, було встановлено в теоремі 3. Доведемо *необхідність*. Припустимо, що ця задача задовольняє означення 1. Тоді виконується умова (0). Залишилося показати, що для цієї задачі виконуються умови (I) і (II). Розіб'ємо це доведення на три кроки.

Крок 1. Доведемо, що крайова задача (1), (2) задовольняє граничну умову (I). За умови $(*)$ означення 1 оператор

$$\big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big) : \, (W^n_\infty)^m \to \big(W^{n-1}_\infty\big)^m \times \mathbb{C}^m$$

оборотний для будь-якого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$. Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ розглянемо матричну крайову задачу

$$Y'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)Y(t;\varepsilon) = O_m, \quad t \in (a,b),$$
$$[BY(\cdot;\varepsilon)] = I_m.$$

Ця крайова задача є сукупністю m крайових задач (1), (2) із правими частинами, які не залежать від ε. Тому за припущенням вона має єдиний розв'язок $Y(\cdot;\varepsilon) \in (W^n_\infty)^{m\times m}$, який задовольняє умову $Y(\cdot;\varepsilon) \to Y(\cdot;0)$ у просторі $(W^n_\infty)^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$. Зазначимо, що $\det Y(t;\varepsilon) \neq 0$ для довільного $t \in (a,b)$, оскільки інакше стовпці матриці-функції $Y(\cdot;\varepsilon)$ будуть лінійно залежними, що суперечитиме умові $[BY(\cdot;\varepsilon)] = I_m$. Тому

$$A(\cdot;\varepsilon) = -Y'(\cdot;\varepsilon)(Y(\cdot;\varepsilon))^{-1} \to -Y'(\cdot;0)(Y(\cdot;0))^{-1} = A(\cdot;0)$$

у просторі $(W^n_\infty)^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$, тобто виконується умова (I).

Крок 2. Покажемо, що виконується умова (II). Спочатку доведемо, що $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$ при $\varepsilon \to 0+$, де $\|\cdot\|$ — норма обмеженого оператора $B(\varepsilon) : (W^n_\infty)^m \to \mathbb{C}^m$. Припустимо супротивне, тобто існує числова послідовність $\big(\varepsilon^{(k)}\big)_{k=1}^\infty \subset (0, \varepsilon_1)$ така, що $\varepsilon^{(k)} \to 0$ і

$$0 < \left\|B\big(\varepsilon^{(k)}\big)\right\| \to \infty, \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Для кожного номера k виберемо таку вектор-функцію $x_k \in (W^n_\infty)^m$, що

$$\|x_k\|_{n,\infty} = 1 \quad \text{і} \quad \left\|B\big(\varepsilon^{(k)}\big)x_k\right\|_{\mathbb{C}^m} \geq \frac{1}{2}\left\|B\big(\varepsilon^{(k)}\big)\right\|.$$

Покладемо

$$y(\cdot;\varepsilon^{(k)}) := \left\|B(\varepsilon^{(k)})\right\|^{-1} x_k,$$
$$f(\cdot;\varepsilon^{(k)}) := L(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot;\varepsilon^{(k)}),$$
$$c(\varepsilon^{(k)}) := B(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot;\varepsilon^{(k)}).$$

Оскільки $y\left(\cdot;\varepsilon^{(k)}\right) \to 0$ у просторі $(W^n_\infty)^m$ при $\varepsilon \to 0+$, то $f\left(\cdot;\varepsilon^{(k)}\right) \to 0$ в $\left(W^{n-1}_\infty\right)^m$, бо за доведеним $A(\cdot;\varepsilon)$ задовольняє умову (I). Оскільки скінченновимірний простір $\mathbb{C}^m$ є локально компактним, то виконуються нерівності $1/2 \leq \left\|c\left(\varepsilon^{(k)}\right)\right\|_{\mathbb{C}^m} \leq 1$. Перейшовши до підпослідовності чисел $\varepsilon^{(k)}$, можна вважати, що $c\left(\varepsilon^{(k)}\right) \to c(0)$ при $k \to \infty$, де $c(0)$ — деякий ненульовий вектор в $\mathbb{C}^m$. Отже, для кожного номера k вектор-функція $y\left(\cdot;\varepsilon^{(k)}\right) \in (W_\infty^n)^m$ є єдиним розв'язком крайової задачі

$$L(\varepsilon^{(k)})\, y(t;\varepsilon^{(k)}) = f(t;\varepsilon^{(k)}), \quad t \in (a,b),$$
$$B(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot;\varepsilon^{(k)}) = c(\varepsilon^{(k)}).$$

Нагадаємо, що $f\left(\cdot;\varepsilon^{(k)}\right) \to 0$ у $\left(W_\infty^{n-1}\right)^m$ і $c\left(\varepsilon^{(k)}\right) \to c(0) \neq 0$ у $\mathbb{C}^m$ при $k \to \infty$. Тому на підставі умови $(**)$ означення 1 функція $y\left(\cdot;\varepsilon^{(k)}\right)$ збігається у просторі $(W_\infty^n)^m$ до єдиного розв'язку $y(\cdot;0)$ граничної крайової задачі, яка складається з диференціального рівняння $L(0)y(t,0) = 0,\ t \in (a,b)$, і неоднорідної крайової умови $B(0)y(\cdot;0) = c(0)$. Але врахуємо, що $y\left(\cdot;\varepsilon^{(k)}\right) \to 0$ у тому ж просторі. Отже, $y(\cdot;0) \equiv 0$, що суперечить крайовій умові. Тому зроблене припущення є хибним, тобто $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$ при $\varepsilon \to 0+$.

Крок 3. Тепер можемо показати, що виконується умова (II). Із доведеного вище випливає, що існують такі числа $\gamma' > 0$ і $\varepsilon' \in (0,\varepsilon_1)$, що $\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\| \leq \gamma'$ для всіх $\varepsilon \in [0,\varepsilon')$, де $\|\cdot\|$ — норма обмеженого оператора, що діє з простору $(W_\infty^n)^m$ у простір $\left(W_\infty^{n-1}\right)^m \times \mathbb{C}^m$. Виберемо вектор-функцію $y \in (W_\infty^n)^m$ довільним чином та покладемо $f(\cdot;\varepsilon) := L(\varepsilon)y$ і $c(\varepsilon) := B(\varepsilon)y$ для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. Тоді при $\varepsilon \to 0+$, враховуючи умову $(**)$, маємо

$$\left\|B(\varepsilon)y - B(0)y\right\|_{\mathbb{C}^m} \leq \left\|(f(\cdot;\varepsilon), c(\varepsilon)) - (f(\cdot;0), c(0))\right\|_{\left(W_\infty^{n-1}\right)^m \times \mathbb{C}^m} =$$
$$= \left\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot;\varepsilon), c(\varepsilon)) - (f(\cdot;0), c(0))\right\|_{\left(W_\infty^{n-1}\right)^m \times \mathbb{C}^m} \leq$$
$$\leq \gamma' \left\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}\big((f(\cdot;\varepsilon), c(\varepsilon)) - (f(\cdot;0), c(0))\big)\right\|_{n,\infty} =$$
$$= \gamma' \left\|(L(0), B(0))^{-1}(f(\cdot;0), c(0)) - (L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot;0), c(0))\right\|_{n,\infty} \to 0.$$

Оскільки $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$ та $\left\|B(\varepsilon)y - B(0)y\right\|_{\mathbb{C}^m} \to 0$, маємо збіжність $B(\varepsilon)y$ до $B(0)y$ у $\mathbb{C}^m$ для кожного $y \in (W_\infty^n)^m$. Отже, крайова задача (1), (2) задовольняє умову (II).

Теорему 1 доведено.

Перейдемо до доведення теореми 2. Спочатку покажемо, що має місце ліва частина подвійної нерівності (4). Покладемо

$$f(\cdot,\varepsilon) := L(\varepsilon)\, y(\cdot;\varepsilon), \quad c(\varepsilon) := B(\varepsilon)\, y(\cdot;\varepsilon). \tag{26}$$

Із граничних умов (I), (II) випливає сильна збіжність обернених операторів

$$\big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big) \xrightarrow{s} \big(L(0), B(0)\big), \quad \varepsilon \to 0+.$$

Тому існують числа $\gamma' > 0$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2')$ такі, що норма цього оператора задовольняє нерівність

$$\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\| \leq \gamma'. \tag{27}$$

Дійсно, припустивши протилежне, можна знайти таку послідовність додатних чисел $\left(\varepsilon^{(k)}\right)_{k=1}^\infty$, що $\varepsilon^{(k)} \to 0$ і $\left\|\big(L(\varepsilon^{(k)}), B(\varepsilon^{(k)})\big)\right\| \to \infty$ при $k \to \infty$. Але за теоремою Банаха – Штейнгауза це суперечить сильній збіжності $\big(L(\varepsilon^{(k)}), B(\varepsilon^{(k)})\big)$ до $(L(0), B(0))$ при $k \to \infty$. Тому для довільного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2')$ з урахуванням (26), (27) робимо висновок, що

$$\left\|L(\varepsilon)y(\cdot;0) - f(\cdot;\varepsilon)\right\|_{n-1,\infty} + \left\|B(\varepsilon)y(\cdot;0) - c(\varepsilon)\right\|_{\mathbb{C}^m} =$$

$$= \big\|L(\varepsilon)y(\cdot;0) - L(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n-1,\infty} + \big\|B(\varepsilon)y(\cdot;0) - B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{\mathbb{C}^m} \leq$$

$$\leq \big\|L(\varepsilon)\big\|\big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n,\infty} + \big\|B(\varepsilon)\big\|\big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n,\infty} \leq \gamma'\big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n,\infty},$$

тобто встановлено ліву частину нерівності (4) із $\gamma_1 := 1/\gamma'$.

Доведемо праву частину подвійної нерівності (4). Згідно з теоремою 1, оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ має обмежений обернений оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$ для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2')$, причому виконується сильна збіжність

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1} \xrightarrow{s} (L(0), B(0))^{-1}, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Справді, для довільних $f \in \left(W_\infty^{n-1}\right)^m$ та $c \in \mathbb{C}^m$ за умовою $(**)$ означення 1 маємо збіжність

$$\big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big)^{-1}(f;c) =: y(\cdot;\varepsilon) \to y(\cdot;0) := \big(L(0), B(0)\big)^{-1}(f;c)$$

у $\left(W_\infty^n\right)^m$ при $\varepsilon \to 0+$. Тоді за теоремою Банаха – Штейнгауза, як і вище, випливає, що норми цих обернених операторів обмежені, тобто існують такі додатні числа ε_2 і γ_2, що норма оберненого оператора

$$\big\|\big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big)^{-1}\big\| \leq \gamma_2.$$

Отже, для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ справджуються співвідношення

$$\big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{n,\infty} = \big\|\big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big)^{-1}\big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big)\big(y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big)\big\|_{n,\infty} \leq$$

$$\leq \gamma_2\big(\,\|L(\varepsilon)y(\cdot;0) - f(\cdot;\varepsilon)\|_{n-1,\infty} + \|B(\varepsilon)y(\cdot;0) - c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m}\big).$$

Звідси безпосередньо випливає права частина двобічної оцінки (4).

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht, Boston: VSP, 2004. – xiv+317 p.
2. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. – 352 с.
3. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // ВИНИТИ. – 1987. – **30**. – С. 3 – 103.
4. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 1. – P. 77 – 90.
5. *Михайлец В. А., Пелехата О. Б., Рева Н. В.* Предельные теоремы для решений краевых задач // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 2. – С. 216 – 223.
6. *Mikhailets V. A., Chekhanova G. A.* Limit theorem for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sci. – 2015. – **204**, № 3. – P. 333 – 342.
7. *Gnyp E. V., Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, № 5. – P. 658 – 667.
8. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sci. – 2013. – **190**, № 4. – P. 589 – 599.
9. *Hnyp Y. V., Mikhailets V. A., Murach A. A.* Parameter-dependent one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // Electron. J. Different. Equat. – 2017. – № 81. – 13 p.
10. *Mikhailets V. A., Murach A. A., Soldatov V. O.* Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems // Electron. J. Qual. Theory Different. Equat. – 2016. – № 87. – 16 p.
11. *Атласюк О. М., Михайлець В. А.* Фредгольмові одновимірні крайові задачі у просторах Соболєва // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 10. – С. 1324 – 1333.

Одержано 19.07.18