УДК 512.579

А. В. Жучок (Луган. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
Й. Коппіц (Ін-т математики та інформатики Болгар. акад. наук, Софія)

ВІЛЬНІ ДОБУТКИ n-КРАТНИХ НАПІВГРУП*

We construct a free product of arbitrary n-tuple semigroups, introduce the notion of n-band of n-tuple semigroups and, in terms of this notion, describe the structure of the free product. We also construct a free commutative n-tuple semigroup of an arbitrary rank and characterize one-generated free commutative n-tuple semigroups. Moreover, we describe the least commutative congruence on a free n-tuple semigroup and establish that the semigroups of the constructed free commutative n-tuple semigroup are isomorphic and its automorphism group is isomorphic to the symmetric group.

Побудовано вільний добуток довільних n-кратних напівгруп, введено поняття n-сполуки n-кратних напівгруп та в термінах цього поняття описано будову вільного добутку. Побудовано вільну комутативну n-кратну напівгрупу довільного рангу та охарактеризовано однопороджені вільні комутативні n-кратні напівгрупи. Описано найменшу комутативну конгруенцію на вільній n-кратній напівгрупі та встановлено, що напівгрупи побудованої вільної комутативної n-кратної напівгрупи ізоморфні, а її група автоморфізмів ізоморфна симетричній групі.

1. Вступ. Нагадаємо, що непорожня множина G називається n-кратною напівгрупою [1], якщо на ній задано n бінарних операцій (позначаються $\boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n}$), які задовольняють аксіоми $(x \boxed{r} y) \boxed{s} z = x \boxed{r} (y \boxed{s} z)$ для всіх $x,\ y,\ z \in G$ та $r,\ s \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Очевидно, що кожна напівгрупа є n-кратною напівгрупою при $n = 1$, проте існує багато прикладів n-кратних напівгруп, які не є напівгрупами.

Поняття n-кратної напівгрупи використовувалося в [1] при вивченні n-кратних алгебр асоціативного типу. Тотожності n-кратної напівгрупи знайшли застосування у роботах [2, 3]. Різні аспекти та властивості n-кратних напівгруп вивчалися кількома авторами (див., наприклад, [4 – 14]). Так, n-кратні напівгрупи тісно пов'язані з допельнапівгрупами [4 – 7], інтерасоціативними напівгрупами [8 – 10], рестриктивними бінапівгрупами [15, 16], комутативними дімоноїдами [11, 12] та комутативними тріоїдами [13]. Для більшої історичної інформації ми відсилаємо читача до робіт [17, 18], в яких розглядаються дімоноїди та тріоїди. У [14] наведено приклади n-кратних напівгруп, що мають важливі застосування, а саме, встановлено, що кожний комутативний дімоноїд (тріоїд) є 2-кратною (3-кратною) напівгрупою, а також доведено незалежність аксіом n-кратної напівгрупи та побудовано вільну n-кратну напівгрупу.

У цій статті продовжено дослідження, розпочаті в [14].

У другому пункті побудовано вільний добуток довільних n-кратних напівгруп.

У третьому пункті ми вперше наводимо приклад n-сполуки з різними операціями, таким чином, відповідаючи на відкрите питання, поставлене першим автором у [5]. Це дозволяє ввести поняття n-сполуки n-кратних напівгруп, яке узагальнює відоме поняття сполуки напівгруп, введене в [19], та є досить ефективним при описі структурних властивостей n-кратних напівгруп. У термінах n-сполуки n-кратних напівгруп описано будову вільного добутку n-кратних напівгруп.

У четвертому пункті побудовано вільну комутативну n-кратну напівгрупу довільного рангу та, як наслідок, охарактеризовано однопороджені вільні комутативні n-кратні напівгрупи. Крім

* Статтю написано під час наукового стажування першого автора в Потсдамському університеті (Німеччина) в рамках програми німецької служби академічних обмінів (DAAD).

того, встановлено, що напівгрупи вільної комутативної n-кратної напівгрупи ізоморфні, а її група автоморфізмів ізоморфна симетричній групі.

У п'ятому пункті описано найменшу комутативну конгруенцію на вільній n-кратній напівгрупі та наведено критерії, за якими операції n-кратної напівгрупи збігаються.

Результати, отримані у статті, узагальнюють деякі результати [4].

2. Конструкція вільного добутку. Побудуємо вільний добуток довільних n-кратних напівгруп.

Нехай R — клас універсальних алгебр A_β, $\beta \in \Omega$. Вільним добутком у класі R алгебр A_β, $\beta \in \Omega$, називається алгебра A з класу R, яка містить усі A_β в якості підалгебр і така, що будь-який набір гомоморфізмів алгебр A_β у будь-яку алгебру B з R продовжується до гомоморфізму алгебри A в B. Вільний добуток завжди існує, якщо R — многовид універсальних алгебр, а кожна вільна алгебра є вільним добутком однопороджених вільних алгебр. У загальній алгебрі відомі конструкції вільних добутків у многовидах груп, напівгруп, дімоноїдів тощо.

Природним чином виникає задача про побудову вільного добутку в многовиді n-кратних напівгруп.

Як завжди, через $\mathbb{N}$ будемо позначати множину всіх натуральних чисел.

Наступна лема знадобиться нам при доведенні основного результату цього пункту.

Лема 1 ([14], лема 1)**.** *У n-кратній напівгрупі $\big(G, \boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n}\big)$ для будь-якого $1 < m \in \mathbb{N}$ та будь-яких $x_i \in G$, $1 \le i \le m+1$, та $*_j \in \big\{\boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n}\big\}$, $1 \le j \le m$, будь-яке розставляння дужок у*

$$x_1 *_1 x_2 *_2 \ldots *_m x_{m+1}$$

дає однаковий елемент із G.

Нехай X — довільна непорожня множина та v — довільне слово в алфавіті X. Довжину v будемо позначати через l_v. За визначенням, довжина порожнього слова дорівнює 0.

Нехай $\mathrm{Fr}[T_i]_{i\in I}$ — вільний добуток довільних напівгруп $T_i, i \in I$. Для кожного $w \in \mathrm{Fr}[T_i]_{i\in I}$ позначимо через $w^{(0)}$ (відповідно $w^{(1)}$) першу (відповідно останню) літеру слова w. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$, і нехай $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ — довільна множина, яка складається з n елементів. Через $\overline{n}$ позначатимемо множину $\{1, 2, \ldots, n\}$. Нехай далі

$$\big\{(S_i, \boxed{i_1}, \boxed{i_2}, \ldots, \boxed{i_n})\big\}_{i\in I}$$

— сім'я довільних n-кратних напівгруп, які попарно не перетинаються, $F^\theta[Y]$ — вільний моноїд на Y і $\theta \in F^\theta[Y]$ — порожнє слово. Для кожного $j \in \overline{n}$ через $\boxed{j^*}$ позначимо операцію на $\mathrm{Fr}\big[\big(S_i, \boxed{i_j}\big)\big]_{i\in I}$. Зафіксуємо $j \in \overline{n}$ та визначимо n бінарних операцій $\boxed{1}', \boxed{2}', \ldots, \boxed{n}'$ на множині

$$V = \Big\{(w, u) \in \mathrm{Fr}[(S_i, \boxed{i_j})]_{i\in I} \times F^\theta[Y] \;\Big|\; l_w - l_u = 1\Big\},$$

поклавши

$$(w_1, u_1)\boxed{r}'(w_2, u_2) = \begin{cases} (w_1 w_2, u_1 y_r u_2), & w_1^{(1)} \in S_k, \quad w_2^{(0)} \in S_m, \quad k, m \in I, \quad k \ne m, \\ \Big(w_1 \boxed{r^*} w_2, u_1 u_2\Big), & w_1^{(1)}, w_2^{(0)} \in S_k, \quad k \in I, \end{cases}$$

для всіх $(w_1, u_1), (w_2, u_2) \in V$ та $r \in \overline{n}$. Ці операції коректно визначені, оскільки для всіх $r \in \overline{n}$

$$l_{w_1 w_2} - l_{u_1 y_r u_2} = l_{w_1 \boxed{r^*} w_2} - l_{u_1 u_2} = 1.$$

Алгебру $(V, \boxed{1}', \boxed{2}', \ldots, \boxed{n}')$ позначимо через $\mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i\in I}$. Очевидно, що побудова $\mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i\in I}$ не залежить від вибору j у визначенні V.

Теорема 1. $\mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i\in I}$ — *вільний добуток n-кратних напівгруп* $(S_i, \boxed{i_1}, \boxed{i_2}, \ldots, \boxed{i_n})$, $i \in I$.

Доведення. Нехай $(w_1, u_1), (w_2, u_2), (w_3, u_3) \in \mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i\in I}$ і $w_1^{(1)} \in S_k$, $w_2^{(0)} \in S_m$, $w_2^{(1)} \in S_f$, $w_3^{(0)} \in S_h$. Зафіксуємо $\varepsilon, e \in \overline{n}$ та розглянемо чотири випадки: 1) $k \neq m$, $f \neq h$; 2) $k \neq m$, $f = h$; 3) $k = m$, $f \neq h$; 4) $k = m$, $f = h$.

Випадок 1:

$$\big((w_1,u_1)\boxed{\varepsilon}'(w_2,u_2)\big)\boxed{e}'(w_3,u_3) = (w_1w_2, u_1y_\varepsilon u_2)\boxed{e}'(w_3,u_3) =$$
$$= (w_1w_2w_3, u_1y_\varepsilon u_2y_eu_3) =$$
$$= (w_1,u_1)\boxed{\varepsilon}'(w_2w_3, u_2y_eu_3) =$$
$$= (w_1,u_1)\boxed{\varepsilon}'\big((w_2,u_2)\boxed{e}'(w_3,u_3)\big).$$

Випадок 2:

$$\big((w_1,u_1)\boxed{\varepsilon}'(w_2,u_2)\big)\boxed{e}'(w_3,u_3) = (w_1w_2, u_1y_\varepsilon u_2)\boxed{e}'(w_3,u_3) =$$
$$= \Big((w_1w_2)\boxed{e^*}w_3, u_1y_\varepsilon u_2u_3\Big) =$$
$$= \Big(w_1(w_2\boxed{e^*}w_3), u_1y_\varepsilon u_2u_3\Big) =$$
$$= (w_1,u_1)\boxed{\varepsilon}'\big(w_2\boxed{e^*}w_3, u_2u_3\big) =$$
$$= (w_1,u_1)\boxed{\varepsilon}'\big((w_2,u_2)\boxed{e}'(w_3,u_3)\big).$$

Випадок 3:

$$\big((w_1,u_1)\boxed{\varepsilon}'(w_2,u_2)\big)\boxed{e}'(w_3,u_3) = \Big(w_1\boxed{\varepsilon^*}w_2, u_1u_2\Big)\boxed{e}'(w_3,u_3) =$$
$$= \Big((w_1\boxed{\varepsilon^*}w_2)w_3, u_1u_2y_eu_3\Big) =$$
$$= \Big(w_1\boxed{\varepsilon^*}(w_2w_3), u_1u_2y_eu_3\Big) =$$
$$= (w_1,u_1)\boxed{\varepsilon}'(w_2w_3, u_2y_eu_3) =$$
$$= (w_1,u_1)\boxed{\varepsilon}'\big((w_2,u_2)\boxed{e}'(w_3,u_3)\big).$$

Випадок 4:

$$\big((w_1,u_1)\boxed{\varepsilon}'(w_2,u_2)\big)\boxed{e}'(w_3,u_3) = \Big(w_1\boxed{\varepsilon^*}w_2, u_1u_2\Big)\boxed{e}'(w_3,u_3) =$$
$$= \Big((w_1\boxed{\varepsilon^*}w_2)\boxed{e^*}w_3, u_1u_2u_3\Big) =$$
$$= \Big(w_1\boxed{\varepsilon^*}(w_2\boxed{e^*}w_3), u_1u_2u_3\Big) =$$
$$= (w_1,u_1)\boxed{\varepsilon}'\big(w_2\boxed{e^*}w_3, u_2u_3\big) =$$

$$= (w_1, u_1)\boxed{\varepsilon}'\left((w_2, u_2)\boxed{e}'(w_3, u_3)\right).$$

Отже, $\mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i\in I}$ — n-кратна напівгрупа.

Якщо $s = 1$, то будемо вважати послідовність $a_1 \ldots a_{s-1} \in F^{\theta}[Y]$ рівною θ.

Для кожної n-кратної напівгрупи $(S_i, \boxed{i_1}, \boxed{i_2}, \ldots, \boxed{i_n}), i \in I$, маємо

$$(S_i, \boxed{i_1}, \boxed{i_2}, \ldots, \boxed{i_n}) \cong \overline{S_i} = \left\{(w, u) \in \mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i\in I} \,|\, w \in S_i\right\},$$

і всі алгебри $\overline{S_i}, i \in I$, породжують $\mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i\in I}$. Крім того, з визначення алгебри $\mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i\in I}$ випливає, що будь-який її елемент $(z_{m_1} \ldots z_{m_s}, a_1 \ldots a_{s-1})$, де $z_{m_p} \in S_{m_p}$, $1 \le p \le s$, $a_\zeta \in Y$, $1 \le \zeta \le s-1$, має єдине зображення у вигляді добутку скінченного числа різних елементів із $\cup_{i\in I}\overline{S_i}$:

$$(z_{m_1} \ldots z_{m_s}, a_1 \ldots a_{s-1}) = (z_{m_1}, \theta) *_1 \ldots *_{s-1} (z_{m_s}, \theta),$$

де $*_r \in \left\{\boxed{1}', \boxed{2}', \ldots, \boxed{n}'\right\}$, $r \in \overline{s-1}$, і $*_r = \boxed{t}'$ для деякого $t \in \overline{n}$ тоді й тільки тоді, коли $a_r = y_t$.

Далі для кожного $i \in I$ покладемо

$$\alpha_i \colon \left(S_i, \boxed{i_1}, \boxed{i_2}, \ldots, \boxed{i_n}\right) \to \left(K, \boxed{1}^{\diamond}, \boxed{2}^{\diamond}, \ldots, \boxed{n}^{\diamond}\right)$$

— гомоморфізм із $\left(S_i, \boxed{i_1}, \boxed{i_2}, \ldots, \boxed{i_n}\right)$ в довільну n-кратну напівгрупу $\left(K, \boxed{1}^{\diamond}, \boxed{2}^{\diamond}, \ldots, \boxed{n}^{\diamond}\right)$. Визначимо відображення

$$\alpha \colon \mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i\in I} \to \left(K, \boxed{1}^{\diamond}, \boxed{2}^{\diamond}, \ldots, \boxed{n}^{\diamond}\right)$$

за правилом

$$\omega\alpha = \begin{cases} z_{m_1}\alpha_{m_1}\widetilde{a}_1 \ldots \widetilde{a}_{s-1} z_{m_s}\alpha_{m_s}, & \text{якщо} \quad \omega = (z_{m_1} \ldots z_{m_s}, a_1 \ldots a_{s-1}), \quad s > 1, \\ z_{m_1}\alpha_{m_1}, & \text{якщо} \quad \omega = (z_{m_1}, \theta), \end{cases}$$

де $\widetilde{a}_r = \boxed{t}^{\diamond}$ для деякого $t \in \overline{n}$ тоді й тільки тоді, коли $a_r = y_t$ $(1 \le r \le s-1,\ s > 1)$. Згідно з лемою 1, відображення α є коректно визначеним. Використавши цю ж лему, покажемо, що α — гомоморфізм.

Нехай $(z_{m_1} \ldots z_{m_s}, a_1 \ldots a_{s-1})$, $\left(c_{q_1} \ldots c_{q_g}, b_1 \ldots b_{g-1}\right) \in \mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i\in I}$, де $c_{q_l} \in S_{q_l}$, $1 \le$ $\le l \le g$, $b_d \in Y$, $1 \le d \le g-1$. Якщо $m_s \ne q_1$, то

$$((z_{m_1} \ldots z_{m_s}, a_1 \ldots a_{s-1})\boxed{\varepsilon}'(c_{q_1} \ldots c_{q_g}, b_1 \ldots b_{g-1}))\alpha =$$
$$= (z_{m_1} \ldots z_{m_s} c_{q_1} \ldots c_{q_g}, a_1 \ldots a_{s-1} y_\varepsilon b_1 \ldots b_{g-1})\alpha =$$
$$= z_{m_1}\alpha_{m_1}\widetilde{a}_1 \ldots \widetilde{a}_{s-1} z_{m_s}\alpha_{m_s}\widetilde{y}_\varepsilon c_{q_1}\alpha_{q_1}\widetilde{b}_1 \ldots \widetilde{b}_{g-1} c_{q_g}\alpha_{q_g} =$$
$$= (z_{m_1}\alpha_{m_1}\widetilde{a}_1 \ldots \widetilde{a}_{s-1} z_{m_s}\alpha_{m_s})\boxed{\varepsilon}^{\diamond}(c_{q_1}\alpha_{q_1}\widetilde{b}_1 \ldots \widetilde{b}_{g-1} c_{q_g}\alpha_{q_g}) =$$
$$= (z_{m_1} \ldots z_{m_s}, a_1 \ldots a_{s-1})\,\alpha\boxed{\varepsilon}^{\diamond}\left(c_{q_1} \ldots c_{q_g}, b_1 \ldots b_{g-1}\right)\alpha.$$

Якщо $v = m_s = q_1$, то, використовуючи гомоморфізми α_i, $i \in I$, отримуємо

$$((z_{m_1} \ldots z_{m_s}, a_1 \ldots a_{s-1})\boxed{\varepsilon}'(c_{q_1} \ldots c_{q_g}, b_1 \ldots b_{g-1}))\alpha =$$

$$= ((z_{m_1} \dots z_{m_s}) \boxed{\varepsilon^*} (c_{q_1} \dots c_{q_g}), a_1 \dots a_{s-1} b_1 \dots b_{g-1})\alpha =$$
$$= (z_{m_1} \dots z_{m_{s-1}} (z_{m_s} \boxed{v_\varepsilon} c_{q_1}) c_{q_2} \dots c_{q_g}, a_1 \dots a_{s-1} b_1 \dots b_{g-1})\alpha =$$
$$= z_{m_1}\alpha_{m_1}\widetilde{a}_1 \dots \widetilde{a}_{s-1}(z_{m_s}\boxed{v_\varepsilon}c_{q_1})\alpha_{m_s}\widetilde{b}_1 c_{q_2}\alpha_{q_2}\widetilde{b}_2 \dots \widetilde{b}_{g-1}c_{q_g}\alpha_{q_g} =$$
$$= z_{m_1}\alpha_{m_1}\widetilde{a}_1 \dots \widetilde{a}_{s-1} z_{m_s}\alpha_{m_s}\boxed{\varepsilon}^{\diamond} c_{q_1}\alpha_{q_1}\widetilde{b}_1 c_{q_2}\alpha_{q_2}\widetilde{b}_2 \dots \widetilde{b}_{g-1}c_{q_g}\alpha_{q_g} =$$
$$= (z_{m_1} \dots z_{m_s}, a_1 \dots a_{s-1})\alpha\boxed{\varepsilon}^{\diamond}(c_{q_1} \dots c_{q_g}, b_1 \dots b_{g-1})\alpha.$$

Таким чином, α — гомоморфізм, який продовжує гомоморфізми $\alpha_i, i \in I$, і $\mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i\in I}$ — вільний добуток n-кратних напівгруп $(S_i, \boxed{i_1}, \boxed{i_2}, \dots, \boxed{i_n}), i \in I$.

Теорему доведено.

Теорема 1 узагальнює теорему 3.2 [4], отриману для допельнапівгруп. При цьому слід зазначити, що в доведенні теореми 3.2 [4] деякі факти було залишено для самостійної перевірки читача, на відміну від теореми 1, яка має повне доведення.

Визначимо n бінарних операцій $\cdot_{y_1}, \cdot_{y_2}, \dots, \cdot_{y_n}$ на множині $F^\theta[Y]$, поклавши

$$u_1 \cdot_{y_r} u_2 = u_1 y_r u_2$$

для всіх $u_1, u_2 \in F^\theta[Y]$ та $r \in \overline{n}$. Згідно з наслідком 1 із роботи [14], $(F^\theta[Y], \cdot_{y_1}, \cdot_{y_2}, \dots, \cdot_{y_n})$ — вільна n-кратна напівгрупа рангу 1. Нехай далі $\{\Lambda_i\}_{i\in I}$ — сім'я вільних n-кратних напівгруп рангу 1. Використовуючи той факт, що кожна вільна алгебра є вільним добутком однопороджених вільних алгебр, із попередньої теореми отримуємо наслідок, який дає вільну n-кратну напівгрупу.

***Наслідок* 1.** *Вільний добуток* $\mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i\in I}$ *n-кратних напівгруп* $\Lambda_i, i \in I$, *є вільною n-кратною напівгрупою рангу* $|I|$.

Нагадаємо, що вільну n-кратну напівгрупу довільного рангу вперше було побудовано в [14].

3. Будова $\mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i\in I}$. У цьому пункті ми введемо поняття n-сполуки n-кратних напівгруп і в термінах цього поняття опишемо будову вільного добутку n-кратних напівгруп. Крім цього дамо відповідь на відкрите питання роботи [5], уперше побудувавши приклад n-сполуки з різними операціями.

Нагадаємо, що напівгрупа називається напівгрупою лівих (правих) нулів, якщо вона задовольняє тотожність $xy = x$ $(xy = y)$. Напівгрупа ідемпотентів називається сполукою. Напівгрупа називається прямокутною сполукою, якщо вона задовольняє тотожність $xyx = x$. Еквівалентно, напівгрупа називається прямокутною сполукою, якщо вона задовольняє тотожності $x^2 = x$, $xyz = xz$. Відомо, що кожна прямокутна сполука є ізоморфною декартовому добутку напівгрупи лівих нулів та напівгрупи правих нулів. Комутативна сполука називається напівструктурою.

n-Кратну напівгрупу назвемо n-сполукою, якщо кожна її операція ідемпотентна. Очевидно, що кожну сполуку можна розглядати як n-сполуку.

Наступне твердження дає ствердну відповідь на відкрите питання з [5] про те, чи існують приклади допельнапівгруп із різними ідемпотентними операціями. Зазначимо, що терміни „допельнапівгрупа" та „2-кратна напівгрупа" збігаються.

Нехай $n \in \mathbb{N}$ та $G = \{a, b\} \cup \{c_i : i \in \overline{n}\} \cup \{d_i : i \in \overline{n}\}$, до того ж множини $\{a, b\}$, $\{c_i : i \in \overline{n}\}$ та $\{d_i : i \in \overline{n}\}$ попарно не перетинаються. Визначимо на множині G операції $[j]$, $j \in \overline{n}$, поклавши

$$a[j]a = a, \quad b[j]b = b,$$
$$a[j]b = c_j, \quad b[j]a = d_j,$$
$$a[j]c_k = c_k, \quad b[j]d_k = d_k,$$
$$a[j]d_k = c_j, \quad b[j]c_k = d_j,$$
$$c_k[j]x = c_k, \quad d_k[j]x = d_k$$

для всіх $x \in G$ та $j, k \in \overline{n}$.

Твердження 1. $(G, [1], [2], \ldots, [n])$ *є n-сполукою. При цьому* $(G, [i]) \cong (G, [j])$ *для будь-яких* $i, j \in \overline{n}$.

Доведення. Оскільки

$$a[j]a = a, \qquad b[j]b = b, \qquad c_k[j]c_k = c_k, \qquad d_k[j]d_k = d_k$$

для всіх $j, k \in \overline{n}$, то операції $[1], [2], \ldots, [n]$ є ідемпотентними. Залишилося перевірити аксіоми n-кратної напівгрупи. Оскільки

$$c_k[j]x = c_k, \quad d_k[j]x = d_k$$

для всіх $x \in G,\ j, k \in \overline{n}$, то достатньо розглянути лише рівняння вигляду

$$a[i](x[j]y) = (a[i]x)[j]y \quad \text{або} \quad b[i](x[j]y) = (b[i]x)[j]y,$$

де $x, y \in G, i, j \in \overline{n}$. Обмежимося розглядом першого рівняння. Друге рівняння перевіряється аналогічно. Якщо $x \notin \{a, b\}$, то

$$a[i](x[j]y) = a[i]x = (a[i]x)[j]y,$$

тому що $a[i]x \notin \{a, b\}$. Залишається розглянути рівняння з $x \in \{a, b\}$, тобто маємо таку сім'ю рівностей:

$$a[i](b[j]a) = a[i]d_j = c_i = c_i[j]a = (a[i]b)[j]a,$$
$$a[i](b[j]b) = a[i]b = c_i = c_i[j]b = (a[i]b)[j]b,$$
$$a[i](a[j]b) = a[i]c_j = c_j = a[j]b = (a[i]a)[j]b,$$
$$a[i](b[j]c_k) = a[i]d_j = c_i = c_i[j]c_k = (a[i]b)[j]c_k,$$
$$a[i](b[j]d_k) = a[i]d_k = c_i = c_i[j]d_k = (a[i]b)[j]d_k,$$
$$a[i](a[j]c_k) = a[i]c_k = c_k = a[j]c_k = (a[i]a)[j]c_k,$$
$$a[i](a[j]d_k) = a[i]c_j = c_j = a_i[j]d_k = (a[i]a)[j]d_k.$$

Нарешті, безпосередньо перевіряється, що для будь-яких $i, j \in \overline{n}$ відображення

$$(G, [i]) \to (G, [j]),$$

визначене за правилом

$$c_i \mapsto c_j, \quad d_i \mapsto d_j, \quad c_j \mapsto c_i, \quad d_j \mapsto d_i \quad \text{та} \quad x \mapsto x \text{ в інших випадках,}$$

є ізоморфізмом.

Твердження доведено.

Зазначимо, що при $n = 2$ з останнього твердження отримуємо приклад допельнапівгрупи з різними ідемпотентними операціями.

Існування n-сполук з різними операціями дозволяє ввести поняття n-сполуки n-кратних напівгруп.

Якщо $\tau \colon S_1 \to S_2$ — гомоморфізм n-кратних напівгруп, то відповідну конгруенцію на S_1 будемо позначати через Δ_τ.

Нехай $(S, \boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n})$ — довільна n-кратна напівгрупа, $(J, \boxed{1}', \boxed{2}', \ldots, \boxed{n}')$ — деяка n-сполука,

$$\alpha \colon (S, \boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n}) \to (J, \boxed{1}', \boxed{2}', \ldots, \boxed{n}') \colon x \mapsto x\alpha$$

— гомоморфізм. Тоді кожний клас конгруенції Δ_α є n-кратною піднапівгрупою n-кратної напівгрупи $(S, \boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n})$, а сама $(S, \boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n})$ є об'єднанням таких n-кратних напівгруп $S_\xi,\ \xi \in J$, що

$$x\alpha = \xi \Leftrightarrow x \in S_\xi = \Delta_\alpha^x = \{t \in S \mid (x; t) \in \Delta_\alpha\},$$

$$S_\xi \boxed{r} S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \boxed{r}' \varepsilon} \quad \text{для всіх} \quad r \in \overline{n},$$

$$\xi \neq \varepsilon \Rightarrow S_\xi \cap S_\varepsilon = \varnothing.$$

У цьому випадку будемо говорити, що $(S, \boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n})$ розкладається у n-сполуку n-кратних напівгруп (або $(S, \boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n})$ є n-сполукою $(J, \boxed{1}', \boxed{2}', \ldots, \boxed{n}')$ n-кратних напівгруп $S_\xi,\ \xi \in J$). Якщо $(J, \boxed{1}', \boxed{2}', \ldots, \boxed{n}')$ є сполукою, тобто $\boxed{1}' = \boxed{2}' = \ldots = \boxed{n}'$, то будемо говорити, що $(S, \boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n})$ є сполукою $(J, \boxed{1}')$ n-кратних напівгруп $S_\xi,\ \xi \in J$. Якщо операції n-сполуки $(J, \boxed{1}', \boxed{2}', \ldots, \boxed{n}')$ збігаються та вона є напівгрупою лівих нулів (відповідно напівгрупою правих нулів), то будемо говорити, що $(S, \boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n})$ є лівою сполукою (відповідно правою сполукою) $(J, \boxed{1}')$ n-кратних напівгруп $S_\xi,\ \xi \in J$.

Слід зазначити, що поняття n-сполуки n-кратних напівгруп узагальнює відоме поняття сполуки напівгруп [19]. Напівструктурні декомпозиції напівгруп описано в [20].

Нехай X — довільна непорожня множина та $X_{\ell z} = (X, \dashv)$, $X_{rz} = (X, \vdash)$ і $X_{rb} = X_{\ell z} \times X_{rz}$ — напівгрупа лівих нулів, напівгрупа правих нулів і прямокутна сполука відповідно. Відомо [21], що $X_{\ell z},\ X_{rz}$ і X_{rb} — вільна напівгрупа лівих нулів, вільна напівгрупа правих нулів і вільна прямокутна сполука відповідно. Нехай далі $B(X)$ — напівструктура всіх непорожніх скінченних підмножин множини X відносно операції теоретико-множинного об'єднання та

$$B_{rb}(X) = \{((x, y), A) \in X_{rb} \times B(X) \,|\, x, y \in A\},$$

$$B_{\ell z}(X) = \{(x, A) \in X_{\ell z} \times B(X) \,|\, x \in A\},$$

$$B_{rz}(X) = \{(x, A) \in X_{rz} \times B(X) \,|\, x \in A\}.$$

Очевидно, що $B_{rb}(X),\ B_{\ell z}(X),\ B_{rz}(X)$ є піднапівгрупами напівгруп $X_{rb} \times B(X)$, $X_{\ell z} \times B(X),\ X_{rz} \times B(X)$ відповідно. Згідно з [21], $B(X),\ B_{rb}(X),\ B_{\ell z}(X)$ і $B_{rz}(X)$ є вільною напівструктурою, вільною нормальною сполукою, вільною лівою нормальною сполукою та вільною правою нормальною сполукою відповідно.

Для кожного елемента $w = z_{m_1} \ldots z_{m_l} \ldots z_{m_s} \in \mathrm{Fr}[(S_i, \boxed{i_j})]_{i \in I}$ (див. п. 2) покладемо $\widetilde{c}(w) = = \bigcup_{l=1}^{s} \{z_{m_l} j'\}$, де

$$j' : \bigcup_{i \in I} S_i \to I : a \mapsto i, \quad \text{якщо} \quad a \in S_i, \quad i \in I.$$

Нехай

$$\Phi^{((x,y),C)} = \{(w,u) \in \mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i \in I} \,|\, ((w^{(0)} j', w^{(1)} j'), \widetilde{c}(w)) = ((x,y),C)\}$$

для всіх $((x,y),C) \in B_{rb}(I)$,

$$\Phi^{(x,C]} = \{(w,u) \in \mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i \in I} \,|\, (w^{(0)} j', \widetilde{c}(w)) = (x,C)\}$$

для всіх $(x,C) \in B_{\ell z}(I)$,

$$\Phi^{[x,C)} = \{(w,u) \in \mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i \in I} \,|\, (w^{(1)} j', \widetilde{c}(w)) = (x,C)\}$$

для всіх $(x,C) \in B_{rz}(I)$,

$$\Phi^{(x,y)} = \{(w,u) \in \mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i \in I} \,|\, (w^{(0)} j', w^{(1)} j') = (x,y)\}$$

для всіх $(x,y) \in I_{rb}$,

$$\Phi^{(x)} = \{(w,u) \in \mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i \in I} \,|\, w^{(0)} j' = x\}$$

для всіх $x \in I_{\ell z}$,

$$\Phi^{[x]} = \{(w,u) \in \mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i \in I} \,|\, w^{(1)} j' = x\}$$

для всіх $x \in I_{rz}$,

$$\Phi^{C} = \{(w,u) \in \mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i \in I} \,|\, \widetilde{c}(w) = C\}$$

для всіх $C \in B(I)$.

У термінах поняття n-сполуки n-кратних напівгруп отримуємо наступні дві структурні теореми.

Теорема 2. *Вільний добуток* $\mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i \in I}$ *n-кратних напівгруп* $(S_i, \boxed{i_1}, \boxed{i_2}, \ldots, \boxed{i_n})$, $i \in I$, *є*:

(i) *нормальною сполукою* $B_{rb}(I)$ *n-кратних напівгруп* $\Phi^{((x,y),C)}$, $((x,y),C) \in B_{rb}(I)$;

(ii) *лівою нормальною сполукою* $B_{\ell z}(I)$ *n-кратних напівгруп* $\Phi^{(x,C]}$, $(x,C) \in B_{\ell z}(I)$;

(iii) *правою нормальною сполукою* $B_{rz}(I)$ *n-кратних напівгруп* $\Phi^{[x,C)}$, $(x,C) \in B_{rz}(I)$.

Доведення. (i) Визначимо відображення $\varrho_{rb} : \mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i \in I} \to B_{rb}(I)$ за правилом

$$(w,u) \mapsto ((w^{(0)} j', w^{(1)} j'), \widetilde{c}(w)), \ (w,u) \in \mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i \in I}.$$

Неважко перевірити, що

$$\widetilde{c}(w \star \omega) = \widetilde{c}(w) \cup \widetilde{c}(\omega),$$

$$(w \star \omega)^{(0)} j' = w^{(0)} j', \ (w \star \omega)^{(1)} j' = \omega^{(1)} j'$$

для всіх $w, \omega \in \mathrm{Fr}[(S_i, \boxed{i_j})]_{i \in I}$ і $\star \in \{\boxed{1^*}, \boxed{2^*}, \ldots, \boxed{n^*}\}$.

Використовуючи попередні рівності, для довільних елементів $(w_1, u_1), (w_2, u_2) \in \mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i \in I}$ та $r \in \overline{n}$ отримуємо

$$((w_1,u_1)\boxed{r}'(w_2,u_2))\varrho_{rb}=\begin{cases}(w_1w_2,u_1y_ru_2)\,\varrho_{rb},\ w_1^{(1)}\in S_k, w_2^{(0)}\in S_m, k,m\in I, k\neq m,\\ \left(w_1\boxed{r^*}w_2,u_1u_2\right)\varrho_{rb},\ w_1^{(1)},w_2^{(0)}\in S_k, k\in I,\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}((((w_1w_2)^{(0)})j',((w_1w_2)^{(1)})j'),\widetilde{c}(w_1w_2)),\ w_1^{(1)}\in S_k, w_2^{(0)}\in S_m, k,m\in I, k\neq m,\\ ((((w_1\boxed{r^*}w_2)^{(0)})j',((w_1\boxed{r^*}w_2)^{(1)})j'),\widetilde{c}(w_1\boxed{r^*}w_2)),\ w_1^{(1)},w_2^{(0)}\in S_k, k\in I,\end{cases}=$$

$$=((w_1^{(0)}j',w_2^{(1)}j'),\widetilde{c}(w_1)\cup\widetilde{c}(w_2))=$$

$$=((w_1^{(0)}j',w_1^{(1)}j'),\widetilde{c}(w_1))((w_2^{(0)}j',w_2^{(1)}j'),\widetilde{c}(w_2))=$$

$$=(w_1,u_1)\varrho_{rb}(w_2,u_2)\varrho_{rb}.$$

Отже, ϱ_{rb} — сюр'єктивний гомоморфізм. Неважко помітити, що $\Phi^{((x,y),C)}$, $((x,y),C)\in B_{rb}(I)$, є класом конгруенції $\Delta_{\varrho_{rb}}$, який є n-кратною піднапівгрупою алгебри $\mathrm{Fr}_nT(S_i)_{i\in I}$. Звідси випливає, що $\mathrm{Fr}_nT(S_i)_{i\in I}$ є нормальною сполукою $B_{rb}(I)$ n-кратних напівгруп $\Phi^{((x,y),C)}$, $((x,y),C)\in B_{rb}(I)$.

(ii) Аналіз, подібний до того, що в доведенні твердження (i), показує, що відображення $\varrho_{\ell z}:\mathrm{Fr}_nT(S_i)_{i\in I}\to B_{\ell z}(I)$, визначене за правилом

$$(w,u)\mapsto(w^{(0)}j',\widetilde{c}(w)),\ (w,u)\in\mathrm{Fr}_nT(S_i)_{i\in I},$$

є сюр'єктивним гомоморфізмом. Звідси $\Phi^{(x,C]}$, $(x,C)\in B_{\ell z}(I)$, є класом конгруенції $\Delta_{\varrho_{\ell z}}$, який є n-кратною піднапівгрупою алгебри $\mathrm{Fr}_nT(S_i)_{i\in I}$. Отже, $\mathrm{Fr}_nT(S_i)_{i\in I}$ є лівою нормальною сполукою $B_{\ell z}(I)$ n-кратних напівгруп $\Phi^{(x,C]}$, $(x,C)\in B_{\ell z}(I)$.

(iii) Визначимо відображення $\varrho_{rz}:\mathrm{Fr}_nT(S_i)_{i\in I}\to B_{rz}(I)$ за правилом

$$(w,u)\mapsto(w^{(1)}j',\widetilde{c}(w)),\ (w,u)\in\mathrm{Fr}_nT(S_i)_{i\in I}.$$

Подібно до доведення (i), ϱ_{rz} — сюр'єктивний гомоморфізм, а $\Phi^{[x,C)}$, $(x,C)\in B_{rz}(I)$, є класом конгруенції $\Delta_{\varrho_{rz}}$, який є n-кратною піднапівгрупою алгебри $\mathrm{Fr}_nT(S_i)_{i\in I}$. Таким чином, $\mathrm{Fr}_nT(S_i)_{i\in I}$ є правою нормальною сполукою $B_{rz}(I)$ n-кратних напівгруп $\Phi^{[x,C)}$, $(x,C)\in B_{rz}(I)$.

Теорему доведено.

Доведення наступної теореми є аналогічним доведенню теореми 2.

Теорема 3. *Вільний добуток* $\mathrm{Fr}_nT(S_i)_{i\in I}$ *n-кратних напівгруп* $(S_i,\boxed{i_1},\boxed{i_2},\ldots,\boxed{i_n})$, $i\in I$, *є*:

(i) *прямокутною сполукою* I_{rb} *n-кратних напівгруп* $\Phi^{(x,y)}$, $(x,y)\in I_{rb}$;

(ii) *лівою сполукою* $I_{\ell z}$ *n-кратних напівгруп* $\Phi^{(x)}$, $x\in I_{\ell z}$;

(iii) *правою сполукою* I_{rz} *n-кратних напівгруп* $\Phi^{[x]}$, $x\in I_{rz}$;

(iv) *напівструктурою* $B(I)$ *n-кратних напівгруп* Φ^C, $C\in B(I)$.

Опишемо одну конгруенцію на $\mathrm{Fr}_nT(S_i)_{i\in I}$, за допомогою якої з вільного добутку n-кратних напівгруп можна отримати вільний добуток напівгруп.

Нехай γ — довільна фіксована конгруенція на вільному добутку $\mathrm{Fr}[(S_i,\boxed{i_j})]_{i\in I}$. Визначимо відношення $\widetilde{\gamma}$ на $\mathrm{Fr}_nT(S_i\,)_{i\in I}$ за правилом

$$(w_1,u_1)\widetilde{\gamma}(w_2,u_2)\Leftrightarrow w_1\gamma w_2$$

для всіх $(w_1,u_1),(w_2,u_2)\in\mathrm{Fr}_nT(S_i)_{i\in I}$.

Неважко довести таке твердження.

Твердження 2. *Відношення $\widetilde{\gamma}$ є конгруенцією на вільному добутку $\mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i\in I}$ n-кратних напівгруп $(S_i, \boxed{i_1}, \boxed{i_2}, \ldots, \boxed{i_n})$, $i \in I$, та операції фактор-алгебри $\mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i\in I}/\widetilde{\gamma}$ збігаються.*

З твердження 2 випливає такий наслідок.

Наслідок 2. *Якщо γ — діагональ $\mathrm{Fr}[(S_i, \boxed{i_j})]_{i\in I}$, то $\mathrm{Fr}_n T(S_i)_{i\in I}/\widetilde{\gamma}$ — вільний добуток напівгруп.*

4. Вільні комутативні n-кратні напівгрупи. У цьому пункті ми побудуємо вільну комутативну n-кратну напівгрупу довільного рангу та окремо розглянемо однопороджені вільні комутативні n-кратні напівгрупи. Крім того, покажемо, що напівгрупи вільної комутативної n-кратної напівгрупи ізоморфні, а її група автоморфізмів ізоморфна симетричній групі.

Наступні три твердження знадобляться нам при доведенні основного результату цього пункту.

Нехай G — довільна n-кратна напівгрупа з операціями $\boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n}$ і $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$. Визначимо нові операції $\boxed{1}_{a_1}, \boxed{2}_{a_2}, \ldots, \boxed{n}_{a_n}$ на G за правилом

$$x \boxed{i}_{a_i} y = x \boxed{i} a_i \boxed{i} y$$

для всіх $x, y \in G$ та $i \in \overline{n}$.

Твердження 3 ([14], твердження 3). $(G, \boxed{1}_{a_1}, \boxed{2}_{a_2}, \ldots, \boxed{n}_{a_n})$ — *n-кратна напівгрупа.*

n-Кратна напівгрупа $(G, \boxed{1}_{a_1}, \boxed{2}_{a_2}, \ldots, \boxed{n}_{a_n})$ називається варіантом G, або, альтернативно, сендвіч-n-кратною напівгрупою алгебри G відносно сендвіч-елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$, або n-кратною напівгрупою з деформованими множеннями. Операції $\boxed{1}_{a_1}$, $\boxed{2}_{a_2}, \ldots, \boxed{n}_{a_n}$ називаються сендвіч-операціями [14].

n-Кратну напівгрупу назвемо комутативною, якщо всі її операції комутативні. Клас усіх комутативних n-кратних напівгруп утворює підмноговид у многовиді n-кратних напівгруп. n-Кратну напівгрупу, вільну в многовиді комутативних n-кратних напівгруп, назвемо вільною комутативною n-кратною напівгрупою.

Лема 2. *У комутативній n-кратній напівгрупі $(G, \boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n})$ виконується рівність*

$$(x \diamond y) \circ z = x \circ (y \diamond z)$$

для всіх $x, y, z \in G$ та $\diamond,\ \circ \in \{\boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n}\}$.

Доведення. Для всіх $x, y, z \in G$ маємо

$$(x \diamond y) \circ z = z \circ (x \diamond y) = (z \circ x) \diamond y =$$
$$= (x \circ z) \diamond y = x \circ (z \diamond y) = x \circ (y \diamond z)$$

згідно з комутативністю операцій $\diamond$, $\circ$ та аксіомою n-кратної напівгрупи.

Лему доведено.

Лема 3. *У комутативній n-кратній напівгрупі $(G, \boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n})$ для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ та будь-яких $x_i \in G$, $1 \leq i \leq m+1$, i $*_j \in \{\boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n}\}$, $1 \leq j \leq m$, виконується рівність*

$$x_1 *_1 x_2 *_2 \ldots *_m x_{m+1} = x_{1\pi} *_{1\pi'} x_{2\pi} *_{2\pi'} \ldots *_{m\pi'} x_{(m+1)\pi},$$

де π, π' — переставлення на $\overline{m+1}$ та $\overline{m}$ відповідно.

Доведення випливає з лем 1, 2 та комутативності операцій $*_j$, $1 \leq j \leq m$.

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ та, як і раніше, нехай X — довільна непорожня множина і $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ — довільна множина, що складається з n елементів. Нехай далі $F^*[X]$ — вільна комутативна напівгрупа на X, $F^\theta_*[Y]$ — вільний комутативний моноїд на Y та $\theta \in F^\theta_*[Y]$ — порожнє слово. Визначимо n бінарних операцій $\boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n}$ на множині

$$XY_{(n)} = \{(w, u) \in F^*[X] \times F^\theta_*[Y] \,|\, l_w - l_u = 1\},$$

поклавши

$$(w_1, u_1)\boxed{i}(w_2, u_2) = (w_1 w_2, u_1 \cdot_{y_i} u_2) \qquad (1)$$

для всіх $(w_1, u_1), (w_2, u_2) \in XY_{(n)}$ та $i \in \overline{n}$, де $\cdot_{y_i}$ — сендвіч-операція на $F^\theta_*[Y]$. Операції, визначені таким чином, є коректними, оскільки $l_{w_1 w_2} - l_{u_1 y_i u_2} = 1$ для всіх $i \in \overline{n}$. Алгебру $(XY_{(n)}, \boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n})$ позначимо через $FC_nS(X)$.

Теорема 4. $FC_nS(X)$ *— вільна комутативна n-кратна напівгрупа.*

Доведення аналогічне доведенню теореми 4.3 [4]. При цьому ми використовуємо твердження 3 та леми 1, 3.

Зазначимо, що при $n = 2$ з останньої теореми отримуємо теорему 4.3 [4].

Наслідок 3. $(F^\theta_*[Y], \cdot_{y_1}, \cdot_{y_2}, \ldots, \cdot_{y_n})$ *— вільна комутативна n-кратна напівгрупа рангу* 1.

Доведення. Якщо $X = \{r\}$, то неважко показати, що відображення

$$\delta \colon (F^\theta_*[Y], \cdot_{y_1}, \cdot_{y_2}, \ldots, \cdot_{y_n}) \to FC_nS(X),$$

визначене за правилом $u\delta = (r^{l_u + 1}, u)$ для всіх $u \in F^\theta_*[Y]$, є ізоморфізмом.

Наслідок доведено.

Наступне твердження встановлює зв'язки між напівгрупами вільної комутативної n-кратної напівгрупи $FC_nS(X)$. Його доведення є аналогічним доведенню леми 2 [14].

Твердження 4. *При будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ напівгрупи $(XY_{(n)}, \boxed{i})$ та $(XY_{(n)}, \boxed{j})$ є ізоморфними.*

Позначимо через $\Im[X]$ симетричну групу на множині X, а через $\operatorname{Aut} G'$ групу автоморфізмів n-кратної напівгрупи G'.

Вільна комутативна n-кратна напівгрупа $FC_nS(X)$ визначається з точністю до ізоморфізму потужністю множини X, оскільки породжуюча множина $FC_nS(X)$ має таку ж саму потужність, що й X. Звідси отримуємо такий опис групи автоморфізмів вільної комутативної n-кратної напівгрупи.

Твердження 5. $\operatorname{Aut} FC_nS(X) \cong \Im[X]$.

Побудуємо одну конгруенцію на $FC_nS(X)$, за допомогою якої з вільної комутативної n-кратної напівгрупи можна отримати вільну комутативну напівгрупу.

Нехай ζ — довільна фіксована конгруенція на вільній комутативній напівгрупі $F^*[X]$. Визначимо відношення $\widetilde{\zeta}$ на $FC_nS(X)$ за правилом

$$(w_1, u_1)\widetilde{\zeta}(w_2, u_2) \Leftrightarrow w_1 \zeta w_2$$

для всіх $(w_1, u_1), (w_2, u_2) \in FC_nS(X)$.

Неважко довести таке твердження.

Твердження 6. *Відношення $\widetilde{\zeta}$ є конгруенцією на вільній комутативній n-кратній напівгрупі $FC_nS(X)$, та операції фактор-алгебри $FC_nS(X)/\widetilde{\zeta}$ збігаються.*

З твердження 6 випливає такий наслідок.

***Наслідок* 4.** *Якщо ζ — діагональ $F^*[X]$, то $FC_nS(X)/\widetilde{\zeta}$ — вільна комутативна напівгрупа.*

5. Найменша комутативна конгруенція на вільній n-кратній напівгрупі. Опишемо найменшу комутативну конгруенцію на вільній n-кратній напівгрупі та наведемо критерії, за якими операції n-кратної напівгрупи збігаються.

Нагадаємо конструкцію вільної n-кратної напівгрупи [14]. Будемо використовувати позначення з попереднього пункту.

У конструкції $FC_nS(X)$ замість вільної комутативної напівгрупи $F^*[X]$ на X візьмемо вільну напівгрупу $F[X]$ на X, а замість вільного комутативного моноїда $F_*^\theta[Y]$ на Y — вільний моноїд $F^\theta[Y]$ на Y з порожнім словом θ. У цьому випадку позначимо через $F_nTS(X)$ алгебру $(XY_{(n)}, \boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n})$ з операціями, визначеними умовою (1). За теоремою 2 [14] $F_nTS(X)$ — вільна n-кратна напівгрупа.

Якщо ρ є такою конгруенцією на n-кратній напівгрупі G', що G'/ρ є комутативною n-кратною напівгрупою, то будемо говорити, що ρ — комутативна конгруенція. У цьому пункті через $\star$ (відповідно $\cdot$) позначатимемо операцію на $F^*[X]$ (відповідно $F_*^\theta[Y]$).

Візьмемо $(x_1x_2\ldots x_s, b_1b_2\ldots b_{s-1}), (z_1z_2\ldots z_k, c_1c_2\ldots c_{k-1}) \in F_nTS(X)$, де $x_d, z_r \in X$, $1 \le d \le s$, $1 \le r \le k$, $b_p, c_j \in Y$, $1 \le p \le s-1$, $1 \le j \le k-1$. Якщо $s = 1$, то послідовність $h_1h_2\ldots h_{s-1}$, де $h_i \in Y, i \in \overline{s-1}$, будемо вважати рівною θ. Визначимо відношення λ на $F_nTS(X)$ за правилом

$$(x_1x_2\ldots x_s, b_1b_2\ldots b_{s-1})\lambda(z_1z_2\ldots z_k, c_1c_2\ldots c_{k-1})$$

тоді й тільки тоді, коли

$$(x_1 \star x_2 \star \ldots \star x_s, b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{s-1}) = (z_1 \star z_2 \star \ldots \star z_k, c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_{k-1}).$$

Теорема 5. *Відношення λ на вільній n-кратній напівгрупі $F_nTS(X)$ є найменшою комутативною конгруенцією.*

Доведення. Нехай $\omega = (x_1x_2\ldots x_s, b_1b_2\ldots b_{s-1}) \in F_nTS(X)$, де $x_d \in X$, $1 \le d \le s$, $b_p \in Y$, $1 \le p \le s-1$.

Визначимо відображення $\pi\colon F_nTS(X) \to FC_nS(X)$ за правилом

$$\omega\pi = \begin{cases} (x_1 \star x_2 \star \ldots \star x_s, b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{s-1}), & \text{якщо } s > 1, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \omega = (x_1, \theta). \end{cases}$$

Безпосередньо перевіряється, що π — сюр'єктивний гомоморфізм. Згідно з теоремою 4, $FC_nS(X)$ — вільна комутативна n-кратна напівгрупа. Тоді Δ_π (див. п. 3) є найменшою комутативною конгруенцією на $F_nTS(X)$. З визначення π випливає, що $\Delta_\pi = \lambda$.

Теорему доведено.

Зазначимо, що при $n = 2$ з останньої теореми отримуємо першу частину теореми 4.9 [4].

Наприкінці цього пункту наведемо умови, при яких операції довільної (комутативної) n-кратної напівгрупи збігаються.

Твердження 7. *Операції комутативної n-кратної напівгрупи збігаються, якщо вони є ідемпотентними.*

Доведення. Нехай $(G, \boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n})$ — довільна комутативна n-кратна напівгрупа. За лемою 2 $(x \diamond y) \circ z = (x \circ y) \diamond z$ для всіх $x, y, z \in G$ та $\diamond, \circ \in \{\boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n}\}$. Звідси у випадку $x = y$, використовуючи ідемпотентність операцій $\diamond$ та $\circ$, отримуємо $x \circ z = x \diamond z$.

Твердження доведено.

Твердження 8. *Операції n-кратної напівгрупи $(G, \boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n})$ збігаються, якщо виконується одна з наступних умов*:

(i) $(G, \boxed{i}\,)$ — *напівгрупа лівих нулів для деякого $i \in \overline{n}$;*

(ii) $(G, \boxed{i}\,)$ — *напівгрупа правих нулів для деякого $i \in \overline{n}$;*

(iii) $(G, \boxed{i}\,)$ — *прямокутна сполука для деякого $i \in \overline{n}$;*

(iv) $(G, \boxed{i}\,)$ — *напівгрупа з нульовим множенням для всіх $i \in \overline{n}$.*

Доведення. Нехай $x, y, z \in G$ та $\diamond, \circ \in \{\boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{n}\}$.

(i) Покладаючи $x \diamond y = x$ для всіх $x, y \in G$ та використовуючи аксіому n-кратної напівгрупи, отримуємо

$$(x \diamond y) \circ z = x \diamond (y \circ z) = x = x \circ z.$$

Звідси $x \circ z = x$ для всіх $x, z \in G$.

Аналогічно доводиться випадок (ii).

(iii) Нехай $(G, \circ)$ — прямокутна сполука. За визначенням прямокутної сполуки (див. п. 3)

$$x \circ y \circ x = x, \quad y \circ x \circ y = y, \quad x \circ z \circ y = x \circ y.$$

Використовуючи останні рівності та аксіоми n-кратної напівгрупи, одержуємо

$$x \diamond y = (x \circ y \circ x) \diamond (y \circ x \circ y) = x \circ ((y \circ x) \diamond (y \circ x \circ y)) =$$

$$= x \circ ((y \circ x) \diamond (y \circ x)) \circ y = x \circ y.$$

(iv) Нехай 0 та $0'$ — нульові елементи напівгруп $(G, \diamond)$ та $(G, \circ)$ відповідно. Тоді

$$0 = (0 \circ 0) \diamond 0 = 0 \circ (0 \diamond 0) = 0'.$$

Твердження доведено.

Нехай V — деякий многовид напівгруп та $u, v \in F[X]$. Через IdV позначатимемо множину всіх таких тотожностей $u \approx v$, що $u \approx v \in IdV$, якщо кожна напівгрупа $S \in V$ задовольняє тотожність $u \approx v$. Через $c(u)$ позначатимемо множину всіх елементів $x \in X$, що входять до запису слова u. Нехай C — многовид напівгруп із нульовим множенням.

Твердження 9. *Нехай V — такий многовид напівгруп, що $C \subseteq V$, G — довільна множина з $|G| \geq 4$ та $n > 1$. Наступні твердження є еквівалентними*:

(i) *для кожної n-кратної напівгрупи $(G, [1], [2], \ldots, [n])$ з $(G, [j]) \in V$ для всіх $j \in \overline{n}$ маємо*: *якщо існує $i' \in \overline{n}$ такий, що $(G, [i']) \in C$, то $[i] = [j]$ для всіх $i, j \in \overline{n}$;*

(ii) *існує $u \in F[X]$ з $c(u) = \{x, y, z\}$ такий, що $xy \approx u \in IdV$.*

Доведення. (i) $\Rightarrow$ (ii). Нехай c і a_0 — різні елементи з G. Визначимо операцію $[2]$ на G за правилом

$$a[2]c = c[2]a = c \quad \text{для всіх} \quad a \in G,$$

$$a[2]b = b[2]a = a_0 \quad \text{для всіх} \quad a, b \in G \setminus \{c\}.$$

Нехай далі $(G,[1])$ — напівгрупа з нульовим множенням та нулем c. Легко перевірити, що $(G,[1],[2],\ldots,[n])$, де $[k]=[2]$ для $3\leq k\leq n$, є n-кратною напівгрупою та $(G,[k])$, $k\in\overline{n}$, задовольняє будь-яку тотожність $u\approx v$, де $u,v\in F[X]$ та $c(u)=c(v)$. Таким чином, існує $u\approx v\in IdV$ з $c(u)\neq c(v)$, тобто існує такий елемент $u_1\in F[X]$ з $c(u_1)=\{x,y\}$, що $u_1\approx x^k\in IdV$ для деякого $k\geq 2$. Інакше, $(G,[j])\in V$ для всіх $j\in\overline{n}$ та, згідно з твердженням (i), отримуємо $[i]=[j]$ для всіх $i,j\in\overline{n}$. Прийшли до суперечності.

Нехай тепер a_0, b_0, d_0 та c — різні елементи з G і операцію $[1]$ визначено, як і раніше. Визначимо на G операцію $[2]$ таким чином:

$$a[2]b=c \text{ для всіх } (a,b)\in G\times G \text{ з } (a,b),(b,a)\neq(a_0,b_0),$$
$$a_0[1]b_0=b_0[1]a_0=d_0.$$

Нехай далі $[k]=[2]$ для $3\leq k\leq n$. Легко перевірити, що $(G,[1],[2],\ldots,[n])$ є такою n-кратною напівгрупою, що для всіх $k\in\overline{n}$ напівгрупа $(G,[k])$ задовольняє комутативний закон та будь-яку тотожність $u\approx v$, $u,v\in F[X]$, з $l_u,l_v\geq 3$ або $l_u\geq 3$ і $v=\upsilon\upsilon$ для деякого $\upsilon\in X$ (або навпаки). Таким чином, існує $u_2\in F[X]$ з $c(u_2)=\{x,y\}$ таке, що $u_2\approx xy\in IdV$. Інакше, для всіх $u\approx v\in IdV$ довжини $l_u,l_v\geq 3$ або $l_u\geq 3$ і $v=\upsilon\upsilon$ для деякого $\upsilon\in X$ (або навпаки), та ми отримуємо, згідно з твердженням (i), $[i]=[j]$ для всіх $i,j\in\overline{n}$. Прийшли до суперечності. За допомогою безпосередніх обчислень можна перевірити, що з $u_1\approx x^k\in IdV$ та $u_2\approx xy\in IdV$ випливає, що $u_3\approx xy\in IdV$ для деякого $u_3\in F[X]$ з $c(u_3)=\{x,y,z\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Нехай $a,b\in G$ і $(G,[1],[2],\ldots,[n])$ — така n-кратна напівгрупа, що $(G,[j])\in V$ для всіх $j\in\overline{n}$. Припустимо, що існує $i'\in\overline{n}$ таке, що $(G,[i'])\in C$. Нехай далі $j\in\overline{n}\setminus\{i'\}$. Якщо ми замінимо x на a, y на b та z на $a[i']b$ в $xy\approx u\in IdV$, то отримаємо $a[j]b=a_1[i']b_1$ для деяких $a_1,b_1\in G$. Це означає, що $[i']=[j]$.

Твердження доведено.

Твердження 10. *Нехай* $(G,\boxed{1},\boxed{2},\ldots,\boxed{n})$ — *n-кратна напівгрупа та* $i,j\in\overline{n}$. $(G,\boxed{i})$ *є напівгрупою з нулем* 0 *тоді й тільки тоді, коли* $(G,\boxed{j})$ *є напівгрупою з нулем* 0.

Доведення. Нехай $0\boxed{i}x=0$ для всіх $x\in G$. Тоді для всіх $y\in G$

$$(0\boxed{i}x)\boxed{j}y=0\boxed{i}(x\boxed{j}y)=0=0\boxed{j}y.$$

Звідси $0\boxed{j}y=0$ для всіх $y\in G$. Аналогічно доводиться, що $y\boxed{j}0=0$ для всіх $y\in G$.

Обернене твердження доводиться аналогічно.

Твердження доведено.

Література

1. *Корешков Н. А.* n-Кратные алгебры ассоциативного типа // Изв. вузов. Математика. – 2008. – **12**. – С. 34 – 42.
2. *Корешков Н. А.* О нильпотентности n-кратных алгебр Ли и ассоциативных n-кратных алгебр // Изв. вузов. Математика. – 2010. – **2**. – С. 33 – 38.
3. *Корешков Н. А.* Ассоциативные n-кратные алгебры // Мат. заметки. – 2014. – **96**, № 1. – С. 36 – 50.
4. *Zhuchok A. V.* Free products of doppelsemigroups // Algebra Univers. – 2017. – **77**, № 3. – P. 361 – 374.
5. *Zhuchok A. V.* Free left n-dinilpotent doppelsemigroups // Communs Algebra. – 2017. – **45**, № 11. – P. 4960 – 4970.
6. *Zhuchok A. V., Demko M.* Free n-dinilpotent doppelsemigroups // Algebra and Discrete Math. – 2016. – **22**, № 2. – P. 304 – 316.
7. *Zhuchok A. V.* Structure of free strong doppelsemigroups // Communs Algebra. – 2018. – **46**, № 8. – P. 3262 – 3279.
8. *Gould M., Linton K. A., Nelson A. W.* Interassociates of monogenic semigroups // Semigroup Forum. – 2004. – **68**. – P. 186 – 201.

9. *Givens B. N., Linton K. A., Rosin A., Dishman L.* Interassociates of the free commutative semigroup on n generators // Semigroup Forum. – 2007. – **74**. – P. 370 – 378.
10. *Givens B. N., Rosin A., Linton K.* Interassociates of the bicyclic semigroup // Semigroup Forum. – 2017. – **94**. – P. 104 – 122.
11. *Zhuchok A. V.* Commutative dimonoids // Algebra and Discrete Math. – 2009. – **3**. – P. 116 – 127.
12. *Zhuchok A. V.* Dimonoids and bar-units // Sib. Math. J. – 2015. – **56**, № 5. – P. 827 – 840.
13. *Zhuchok A. V.* Trioids // Asian-Eur. J. Math. – 2015. – **8**, № 4. – P. 1550089-1 – 1550089-23.
14. *Zhuchok A. V.* Free n-tuple semigroups // Math. Notes. – 2018. – **103**, № 5. – P. 737 – 744.
15. *Schein B. M.* Restrictive semigroups and bisemigroups // Techn. Rept. Univ. Arkansas. – 1989. – P. 1 – 23.
16. *Шайн Б. М.* Рестриктивные биполугруппы // Изв. вузов. Математика. – 1965. – **1**, № 44. – С. 168 – 179.
17. *Loday J.-L.* Dialgebras // Lect. Notes Math. – 2001. – **1763**. – P. 7 – 66.
18. *Loday J.-L., Ronco M. O.* Trialgebras and families of polytopes // Contemp. Math. – 2004. – **346**. – P. 369 – 398.
19. *Clifford A. H.* Bands of semigroups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1954. – **5**. – P. 499 – 504.
20. *Putcha M. S.* Semilattice decompositions of semigroups // Semigroup Forum. – 1973. – **6**. – P. 12 – 34.
21. *Petrich M., Silva P. V.* Structure of relatively free bands // Communs Algebra. – 2002. – **30**, № 9. – P. 4165 – 4187.

Одержано 27.11.17