УДК 512.542

В. Н. Князина, В. С. Монахов, Е. В. Зубей (Гомел. ун-т им. Ф. Скорины, Беларусь)

О РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С S-ПОЛУНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

A finite nonnilpotent group is called a Schmidt group if all its proper subgroups are nilpotent. A subgroup A is called S-seminormal (or SS-permutable) in a finite group G if there is a subgroup B such that $G = AB$ and A is permutable with every Sylow subgroup of B. We establish the criteria of solvability and π-solvability of finite groups in which some Schmidt subgroups are S-seminormal. In particular, we prove the solvability of a finite group in which all supersoluble Schmidt subgroups of even order are S-seminormal.

Скінченна ненільпотентна група, всі власні підгрупи якої нільпотентні, називається групою Шмідта. Підгрупа A називається S-напівнормальною (або SS-переставною) в скінченній групі G, якщо існує така підгрупа B, що $G = AB$ та A є переставною з кожною силовською підгрупою із B. Встановлено ознаки розв'язності і π-розв'язності скінченних груп, в яких деякі з підгруп Шмідта S-напівнормальні. Зокрема, доведено розв'язність скінченної групи, в якій всі надрозв'язні підгрупи Шмідта парного порядку є S-напівнормальними.

1. Введение. Будем рассматривать только конечные группы. Ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Эти группы впервые рассматривались О. Ю. Шмидтом [1], который доказал их бипримарность, нормальность одной силовской подгруппы и цикличность другой. Обзоры о строении групп Шмидта и их приложений в теории конечных групп имеются в [2, 3].

Поскольку группы Шмидта содержатся в качестве подгрупп в каждой ненильпотентной группе, то они являются универсальными подгруппами конечных групп. Поэтому свойства заключенных в группе подгрупп Шмидта оказывают существенное влияние на строение самой группы. Группы с ограничениями на подгруппы Шмидта исследовались во многих работах. Например, в [4–6] изучены группы с субнормальными подгруппами Шмидта, а в [7] — с холловыми подгруппами Шмидта.

Подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если существует такая подгруппа B, что $G = AB$ и AB_1 — собственная в G подгруппа для каждой собственной подгруппы B_1 из B. Очевидно, что подгруппа простого индекса полунормальна. Квазинормальная подгруппа (т. е. подгруппа, перестановочная со всеми подгруппами группы) будет полунормальной. В простой группе $SL(2,4)$ подгруппа A, изоморфная знакопеременной группе A_4 степени 4, является полунормальной подгруппой Шмидта, но A не квазинормальна и не субнормальна.

Отдельные свойства полунормальных подгрупп получены в [8–11]. Признаки разрешимости группы с некоторыми полунормальными подгруппами Шмидта установлены в [12]. Результаты этой работы представлены в следующей теореме.

Теорема 1.1. 1. *Если A — полунормальная подгруппа Шмидта группы G и A^G неразрешима, то $A/\Phi(A) \simeq A_4$* [12] (*теорема* 1).

2. *Если в группе G все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта полунормальны, то G будет 3-разрешимой* [12] (*теорема* 2).

3. *Если в группе G все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2,5\}$-подгруппы Шмидта полунормальны, то G разрешима* [12] (*следствие*).

Имеются различные обобщения понятия полунормальной подгруппы (см. [13]). В частности, более широким, чем квазинормальность и полунормальность, является следующее понятие.

Подгруппа A называется *S-полунормальной* (или *SS-перестановочной*) в группе G, если существует такая подгруппа B, что $G = AB$ и A перестановочна с каждой силовской подгруппой из B. В этом случае подгруппу B будем называть *S-добавлением* к A в G.

В любой группе каждая подгруппа, индексом которой является степень некоторого простого числа p, будет S-полунормальной, а силовская p-подгруппа группы G будет ее S-добавлением. Полунормальная и S-квазинормальная (т. е. подгруппа, перестановочная со всеми силовскими подгруппами группы [14]) подгруппы будут также S-полунормальными. В симметрической группе S_4 степени 4 подгруппа S_3 S-полунормальна, но не полунормальна и не S-квазинормальна. Группы с некоторыми S-полунормальными подгруппами исследовались во многих работах (см., например, [15 – 20]).

В настоящей работе изучаются группы, в которых некоторые из подгрупп Шмидта S-полунормальны, и устанавливаются признаки разрешимости и π-разрешимости таких групп. Доказывается следующая теорема.

Теорема 1.2. 1. *Если в группе G все сверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка S-полунормальны в G, то G разрешима.*

2. *Если в группе G все несверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка S-полунормальны, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $SL(2,4)$ или $SL(2,8)$. В частности, группа G $\{2,3,5,7\}'$-разрешима.*

3. *Если в группе G все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта S-полунормальны, то G будет 3-разрешимой.*

4. *Если в группе G все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2,5\}$-подгруппы Шмидта S-полунормальны, то G разрешима.*

Отметим вытекающие из теоремы 1.2 новые признаки частичной разрешимости группы с полунормальными подгруппами Шмидта, дополняющие теорему 1.1.

***Следствие* 1.1.** 1. *Если в группе G все сверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка полунормальны в G, то G разрешима.*

2. *Если в группе G все несверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка полунормальны, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $SL(2,4)$. В частности, группа G $\{2,3,5\}'$-разрешима.*

2. Используемые обозначения и результаты. Все обозначения и используемые определения соответствуют [21, 22].

Пусть p — простое число. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой. Группа, содержащая нормальную подгруппу, индекс который совпадает с порядком силовской p-подгруппы, называется p-нильпотентной. Через $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются центр, подгруппа Фиттинга и подгруппа Фраттини группы G соответственно, а H^G — наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащая подгруппу H. Симметрическая и знакопеременная группы степени n обозначаются через S_n и A_n; циклическая и элементарная абелева группы порядков m и p^t обозначаются через Z_m и E_{p^t} соответственно, $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G. Если $|\pi(G)| = 1$, то группа G называется примарной, при $|\pi(G)| = 2$ — бипримарной. Если $\pi \subseteq \pi(G)$, то $\pi' = \pi(G) \setminus \pi$.

Нормальным (субнормальным) рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_m = G,$$

в которой подгруппа G_i нормальна в G (нормальна в G_{i+1}) для всех $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами этого ряда. Нормальный ряд называется главным, если G_{i+1}/G_i — минимальная нормальная подгруппа группы G/G_i для каждого i, а числа $|G_{i+1}/G_i|$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, называются индексами главного ряда. Субнормальный ряд называется композиционным, если G_{i+1}/G_i — простая группа для каждого i.

Группа G называется π-разрешимой, $\pi \subseteq \pi(G)$, если индексы ее главного ряда являются степенями простых чисел из π, либо не делятся на простые числа из π. Группа G называется сверхразрешимой, если индексы ее главного ряда — простые числа. Полупрямое произведение нормальной в G подгруппы A и подгруппы B записывается так: $G = [A]B$.

В следующей лемме приведены свойства групп Шмидта, полученные самим О. Ю. Шмидтом в 1924 году.

Лемма 2.1 [1]. *Пусть S — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $S = [P]Q$, *где P — нормальная силовская p-подгруппа, Q — ненормальная силовская q-подгруппа, p и q — различные простые числа*;

2) $Q = \langle y \rangle$ *— циклическая подгруппа и $y^q \in Z(S)$*;

3) $|P/P'| = p^m$, *где m — показатель числа p по модулю q*;

4) *главный ряд группы S имеет систему индексов*

$$p, p, \ldots, p, p^m, q, \ldots, q,$$

число индексов равных p совпадает с n, где $p^n = |P'|$; число индексов равных q совпадает с b, где $q^b = |Q|$.

Условимся называть $S_{\langle p,q \rangle}$-группой группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой P и циклической силовской q-подгруппой Q.

Лемма 2.2 ([23], лемма 1). *$S_{\langle p,q \rangle}$-группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда $|P| = p$ и q делит $p-1$.*

Лемма 2.3. 1. *Каждая не p-нильпотентная группа содержит $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппу для некоторого $q \in \pi(G)$* ([21], IV.5.4).

2. *Каждая не 2-замкнутая группа содержит $S_{<q,2>}$-подгруппу для некоторого $q \in \pi(G)$* (*см.* [24, с. 34], [25], 3.1.1).

***Пример* 2.1.** Для любого нечетного p аналог утверждения 2 леммы 2.3 не имеет места. Для $p = 3$ контрпримером является простая группа $SL(2, 2^n)$ при любом нечетном $n > 2$, а для $p \geq 5$ — группа $PSL(2, p)$.

Лемма 2.4 ([12], лемма 1). *Если K и D — подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и K/D — $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K имеет следующие свойства*:

1) *L — p-замкнутая $\{p, q\}$-подгруппа*;

2) *все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны*;

3) *L содержит $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в D и $L = ([P]Q)^L = Q^L$.*

Лемма 2.5 ([21], VI.4.10). *Пусть A и B — подгруппы группы G такие, что $G \neq AB$ и $AB^g = B^g A$ для всех $g \in G$. Тогда либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$.*

Лемма 2.6. *Пусть A — S-полунормальная подгрупа группы G и B — ее S-добавление.*

1. *Если $A \leq H \leq G$, то A — S-полунормальная подгруппа группы H и $B \cap H$ — S-добавление к A в H.*

2. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то AN/N — S-полунормальная в G/N подгруппа и BN/N — S-добавление к AN/N в G/N.*

3. *Подгруппа A перестановочна с P^g для всех $g \in G$ и всех силовских подгрупп P из B. В частности, подгруппа B^g будет S-добавлением к подгруппе A для каждого $g \in G$.*

Доказательство. 1. По тождеству Дедекинда $H = A(H \cap B)$. Пусть P — силовская подгруппа из $H \cap B$ и P_1 — такая силовская подгруппа в B, что $P \leq P_1$. Тогда

$$P = P_1 \cap H, \qquad AP_1 = P_1 A,$$

$$AP = A(P_1 \cap H) = AP_1 \cap H = P_1 A \cap H = (P_1 \cap H)A = PA.$$

Поэтому A — S-полунормальная подгруппа в H и $B \cap H$ — S-добавление к A в H.

2. Так как $G = AB$, то

$$G/N = (AN/N)(BN/N).$$

Пусть K/N — силовская p-подгруппа в BN/N. Тогда существует такая силовская подгруппа P в BN, что $PN/N = K/N$. По лемме VI.4.6 [21] существуют такие силовские p-подгруппы P_1 в B и P_2 в N, что $P = P_1 P_2$. Ясно, что $PN = P_1 N$. По условию подгруппа A перестановочна с P_1, поэтому $A(PN) = (PN)A$ и

$$(AN/N)(PN/N) = (AN/N)(K/N) = (PN/N)(AN/N) = (K/N)(AN/N).$$

3. Пусть $g = ba$, $a \in A$, $b \in B$. Тогда $P^b \leq B$ и

$$AP^g = AP^{ba} = (AP^b)^a = (P^b A)^a = P^{ba} A = P^g A.$$

В силу $G = AB^g$ подгруппа B^g будет S-добавлением к A в G.

Лемма 2.7. *Если A — S-полунормальная подгруппа группы G, а B — ее S-добавление, то для любого элемента $g \in G$ подгруппа A^g S-полунормальна в G и подгруппа B является S-добавлением к подгруппе A^g.*

Доказательство. По определению S-полунормальной подгруппы и S-добавления группа $G = AB$ и AP — подгруппа группы G для любой силовской подгруппы P из B. По утверждению 3 леммы 2.6 подгруппа A перестановочна с $P^{g^{-1}}$ для любого $g \in G$, т. е.

$$AP^{g^{-1}} = P^{g^{-1}} A, \qquad A^g P = PA^g.$$

Из равенства $G = A^g B$ следует, что A^g — S-полунормальная подгруппа в группе G и B — S-добавление к A^g в группе G.

Лемма 2.8. *Если A — S-полунормальная подгруппа группы G, а X — непустое множество элементов из G, то подгруппа $A^X = \langle A^x \mid x \in X \rangle$ S-полунормальна в G и B — S-добавление к A^X в G.*

Доказательство. Пусть B — S-добавление к подгруппе A. По лемме 2.7 подгруппа A^x, $x \in X$, S-полунормальна в G, а подгруппа B является S-добавлением к A^x. По определению каждая силовская подгруппа P из B перестановочна с A^x. Согласно лемме 4 [12] подгруппа P перестановочна с A^X. Из $G = AB$ и $A \leq A^X$ следует, что $G = A^X B$. Теперь A^X — S-полунормальная в G подгруппа и B — S-добавление к A^X в G.

Лемма 2.9. *Пусть в группе G все $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппы S-полунормальны. Тогда*:

1) *если H — подгруппа группы G, то все $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппы из H S-полунормальны в H*;

2) *если N — нормальная подгруппа группы G, то в фактор-группе G/N все $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппы S-полунормальны*;

3) *если $N \leq H \leq G$, N нормальна в H, то в H/N все $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппы S-полунормальны.*

Доказательство. 1. Утверждение следует из леммы 2.6 (1).

2. Пусть K/N — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G/N, а L — такая минимальная подгруппа из K, что $K = LN$. По лемме 2.4 (3) подгруппа L содержит такую $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу A, что $L = A^L$. По условию подгруппа A S-полунормальна в G, а по лемме 2.8 подгруппа L S-полунормальна в G. Теперь по лемме 2.6 (2) подгруппа $LN/N = K/N$ S-полунормальна в G/N.

3. Утверждение следует из утверждений 1 и 2.

Лемма 2.10. *Пусть A — нетривиальная S-полунормальная подгруппа простой группы G. Тогда существует такая p-подгруппа P, $p \in \pi(G)$, что $G = AP$.*

Доказательство. Пусть B — S-добавление к A в G, а P — такая силовская p-подгруппа из B, что P не содержится в A. Подгруппа P существует, иначе $G = AB = A$, а это противоречит тому, что $A \neq G$. Предположим, что $G \neq AP$. Тогда $G \neq AP^g$ для всех $g \in G$. Так как G — простая группа, то $P^G = G$. По лемме 2.6 (3) подгруппа A перестановочна с P^g для каждого $g \in G$, поэтому $A^G \neq G$ по лемме 2.5. Но это противоречит простоте группы G. Поэтому допущение $G \neq AP$ ошибочно и $G = AP$.

Предложение 2.1. *Если в простой группе G существует S-полунормальная подгруппа Шмидта A, то справедливо одно из следующих утверждений*:

1) $G \simeq A_5,\ A \simeq [A_4]Z_3,\ B \simeq Z_5$;
2) $G \simeq PSL(2,7),\ A \simeq [Z_7]Z_3,\ B \simeq D_8$;
3) $G \simeq SL(2,8),\ A \simeq [E_8]Z_7,\ B \simeq Z_9$.

Здесь B — S-добавление к A в группе G.

Доказательство. В теореме 3 [26] перечислены неразрешимые группы $G = AB$, где A — группа Шмидта, а B — нильпотентная группа. При такой факторизации $G/S(G)$ изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2,7)$, $PGL(2,7)$, $SL(2,2^n)$ и $2^n - 1$ — простое число, $P\Gamma L(2,2^n)$ для некоторого простого n. Поскольку в данном случае группа G простая и $|\pi(G)| = 3$ по лемме 2.10, то для группы $SL(2,2^n)$ возможен только случай, когда $n \in \{2,3\}$. Таким образом,

$$G \in \big\{PSL(2,7), PSL(2,5) = SL(2,4) = A_5, SL(2,8)\big\}.$$

Факторизации этих групп известны, искомые факторизации указаны в пунктах 1 – 3 доказываемого предложения.

3. Доказательство теоремы 1.2. ***Доказательство утверждения* 1.** Пусть в группе G все сверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка S-полунормальны. Предположим, что группа G неразрешима и H/K — неабелевый композиционный фактор группы G. Тогда H/K — простая группа четного порядка, она не 2-замкнута. По лемме 2.3 (2) в H/K существует $S_{\langle p,2\rangle}$-подгруппа A/K для некоторого $p \in \pi(G)$. По лемме 2.2 каждая $S_{\langle p,2\rangle}$-подгруппа из G сверхразрешима и по условию S-полунормальна. По лемме 2.9 (3) подгруппа A/K S-полунормальна в H/K и применимо предложение 2.1. Но там исключается возможность, при которой A/K является $S_{\langle p,2\rangle}$-подгруппой. Поэтому предположение, что G — неразрешимая группа, ошибочно, и G разрешима. Утверждение 1 теоремы 1.2 доказано.

***Доказательство утверждения* 2.** Пусть в группе G все несверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка S-полунормальны. Предположим, что группа G неразрешима и H/K — неабелевый композиционный фактор группы G. Тогда H/K — простая группа четного порядка, поэтому не 2-нильпотентна. Согласно лемме 2.3 (1) в H/K существует $S_{\langle 2,q\rangle}$-подгруппа A/K для некоторого $q \in \pi(G)$. По лемме 2.2 каждая $S_{\langle 2,q\rangle}$-подгруппа несверхразрешима. По лемме 2.9 (3) и условию подгруппа A/K S-полунормальна в H/K и применимо предложение 2.1.

Если $H/K \simeq SL(2,4)$, то $A/K \simeq A_4 = [E_4]Z_3$. В $SL(2,4)$ подгруппы Шмидта исчерпываются с точностью до сопряженности следующими подгруппами: A_4, $[Z_5]Z_2$ и $[Z_3]Z_2$. Подгруппы $[Z_5]Z_2$ и $[Z_3]Z_2$ сверхразрешимы, подгруппа A_4 несверхразрешима и полунормальна. Поэтому группа $SL(2,4)$ может быть композиционным фактором группы G.

Если $H/K \simeq SL(2,8)$, то $A/K \simeq [E_8]Z_7$. В $SL(2,8)$ подгруппы Шмидта исчерпываются с точностью до сопряженности следующими подгруппами: $[E_8]Z_7$, $[Z_7]Z_2$ и $[Z_3]Z_2$. Из них несверхразрешимой является только подгруппа $[E_8]Z_7$, и она S-полунормальна в H/K. Поэтому группа $SL(2,8)$ может быть композиционным фактором группы G.

Изоморфизм H/K с группой $PSL(2,7)$ исключается, в $PSL(2,7)$ есть несверхразрешимая подгруппа Шмидта A_4, она не S-полунормальна в $PSL(2,7)$.

Таким образом, неабелевы композиционные факторы группы G исчерпываются группами $SL(2,4)$ и $SL(2,8)$, которые имеют порядки $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ и $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ соответственно. Следовательно, неабелевы композиционные факторы группы G будут $\{2,3,5,7\}$-группами и G $\{2,3,5,7\}'$-разрешима. Утверждение 2 теоремы 1.2 доказано.

***Доказательство утверждения* 3.** Пусть в группе G все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта S-полунормальны. Воспользуемся индукцией по порядку группы G и докажем, что группа G 3-разрешима. Пусть N — нормальная подгруппа группы G. По лемме 2.9 (1), (2) в подгруппе N и в фактор-группе G/N все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта полунормальны. Если $1 \neq N \neq G$, то по индукции подгруппа N и фактор-группа G/N 3-разрешимы. Отсюда следует, что группа G 3-разрешима. Поэтому будем считать, что группа G простая.

Предположим, что группа G содержит $\{2,3\}$-подгруппу Шмидта A. Из предложения 2.1 следует, что $A \simeq A_4$ и $G \simeq SL(2,4)$. Но в группе $SL(2,4)$ имеется подгруппа Шмидта $[Z_3]Z_2$, которая не S-полунормальна. Противоречие.

Таким образом, в группе G нет $\{2,3\}$-подгрупп Шмидта. Проверим, что в этом случае группа G является S_4-свободной. Допустим противное, т. е. предположим, что существуют такие подгруппы U и V, что U нормальна в V и $V/U \simeq S_4$. Группа S_4 содержит подгруппу S_3, которая является $S_{<3,2>}$-подгруппой. По лемме 2.4 подгруппа V содержит $S_{<3,2>}$-подгруппу. Пришли к противоречию. Следовательно, группа G является S_4-свободной. По теореме 4.174 [27] либо силовская 2-подгруппа в G абелева, либо $G \in \{Sz(2^n), U(3,2^n)\}$, n нечетно. Простые группы с абелевой силовской 2-подгруппой известны (см. теорему 4.126 [27]), каждая из них содержит неабелеву подгруппу порядка 6, которая является $S_{<3,2>}$-подгруппой. В группе $U(3,2^n)$, где n нечетно, также содержится $S_{<3,2>}$-подгруппа [27] (теорема 4.168). Поэтому эти группы исключаются. Группа Судзуки $Sz(2^n)$ имеет порядок, не делящийся на 3, следовательно, она 3-разрешима. Утверждение 3 теоремы 1.2 доказано.

***Доказательство утверждения* 4.** Пусть в группе G все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2,5\}$-подгруппы Шмидта S-полунормальны. Воспользуемся индукцией по порядку группы и докажем, что группа G разрешима. Как и в доказательстве утверждения 3, получаем, что G — простая группа. По утверждению 3 группа G 3-разрешима, поэтому G — простая $3'$-группа. По теореме Томпсона $G \simeq Sz(2^n)$. Согласно теоремам XI.3.6, XI.3.10 [28] в группе G содержится $S_{<5,2>}$-подгруппа A. Поскольку A — S-полунормальная в G подгруппа, то применимо предложение 2.1. Теперь порядок группы G делится на 3. Пришли к противоречию. Утверждение 4 теоремы 1.2 доказано.

Поскольку полунормальные подгруппы S-полунормальны, то из утверждения 1 теоремы 1.2 следует утверждение 1 следствия 1.1.

***Доказательство утверждения* 2 *следствия* 1.1.** Пусть в группе G все несверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка полунормальны. Поскольку каждая полунормальная подгруппа S-полунормальна, то применимо утверждение 2 теоремы 1.2. В группе $SL(2,8)$ подгруппа Шмидта $[E_8]Z_7$ S-полунормальна, ее индекс равен 9 и она не полунормальна. Поэтому в $SL(2,8)$ нет полунормальных подгрупп Шмидта четного порядка, и эта группа исключается. Следовательно, неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $SL(2,4)$.

4. Признаки p-разрешимости группы с S-полунормальными подгруппами Шмидта нечетного порядка. Группа, порядок которой делится на простое число p, называется pd-группой.

Утверждения, аналогичные утверждениям 1 – 3 теоремы 1.2, для групп с S-полунормальными подгруппами Шмидта нечетного порядка не имеют места. В простых группах $SL(2,2^n)$, $n \geq 2$, $Sz(2^{2m+1})$, $m \geq 1$, все подгруппы нечетного порядка нильпотентны, поэтому в них нет подгрупп Шмидта нечетного порядка. Значит, перечисленные группы (и не только они) могут быть композиционными факторами групп с S-полунормальными подгруппами Шмидта нечетного порядка.

Кроме того, из леммы 2.2 следует, что группа Шмидта четного порядка либо сверхразрешима (когда она 2-нильпотентна), либо несверхразрешима (когда она 2-замкнута). Для групп Шмидта нечетного порядка альтернативность не выполняется, например любая $\{3,5\}$-группа Шмидта (как 3-замкнутая, так и 3-нильпотентная) несверхразрешима. Поэтому при нечетном p будем pd-подгруппы Шмидта разделять на p-замкнутые и p-нильпотентные.

Теорема 4.1. *Пусть p — нечетное простое число и в группе G все p-замкнутые pd-подгруппы Шмидта S-полунормальны. Если G не p-разрешима, то $p=7$ и не p-разрешимый композиционный фактор группы G изоморфен $PSL(2,7)$.*

Доказательство. Предположим, что группа G не p-разрешима и H/K — не p-разрешимый композиционный фактор группы G. Тогда H/K — простая pd-группа, поэтому не p-нильпотентна. Согласно лемме 2.3 (1) в H/K существует $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа A/K для некоторого $q \in \pi(G)$. По условию все $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппы группы G S-полунормальны в G, а по лемме 2.9 (3) подгруппа A/K S-полунормальна в H/K. Теперь применимо предложение 2.1. Поскольку $p>2$, то $H/K \simeq PSL(2,7)$ и $p=7$.

Теорема доказана.

***Следствие* 4.1.** *Если p — нечетное простое число и в группе G все p-замкнутые pd-подгруппы Шмидта полунормальны, то G p-разрешима.*

Доказательство. Предположим, что группа G не p-разрешима и H/K — не p-разрешимый композиционный фактор группы G. По теореме 4.1 $H/K \simeq PSL(2,7)$ и $p=7$. В группе $PSL(2,7)$ 7-замкнутая $7d$-подгруппа Шмидта $A=[Z_7]Z_3$ имеет индекс 8, подгруппа A S-полунормальна, но не полунормальна. Поэтому группа $PSL(2,7)$ исключается. Значит, допущение ошибочно и G p-разрешима.

***Пример* 4.1.** Как отмечалось в примере 2.1, в $SL(2,2^n)$ нет 3-нильпотентных $3d$-подгрупп Шмидта при любом нечетном n, а в $PSL(2,p)$ нет p-нильпотентных pd-подгрупп Шмидта при любом $p \geq 5$. Значит, перечисленные группы (и не только они) могут быть композиционными факторами группы с S-полунормальными p-нильпотентными pd-подгруппами Шмидта.

Таким образом, описание композиционных факторов неразрешимой группы с несверхразрешимыми (сверхразрешимыми) S-полунормальными подгруппами Шмидта нечетного порядка зависит от решения следующей задачи.

Перечислить простые группы со сверхразрешимыми (*нильпотентными*) *подгруппами нечетного порядка.*

Литература

1. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. – 1924. – **31**. – С. 366 – 372.
2. *Кузенный Н. Ф., Левищенко С. С.* Конечные группы Шмидта и их обобщения // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7-8. – С. 963 – 968.
3. *Монахов В. С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Тр. Укр. мат. конгресса-2001. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – № 1. – С. 81 – 90.
4. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. – 2004. – **45**, № 6. – С. 1316 – 1322.
5. *Ведерников В. А.* Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. – 2007. – **46**, № 6. – С. 669 – 687.
6. *Al-Sharo Kh. A., Skiba A. N.* On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups // Communs Algebra. – 2017. – **45**. – P. 4158 – 4165.
7. *Kniahina V. N., Monakhov V. S.* Finite groups with Hall – Schmidt subgroups // Publ. Math. Debrecen. – 2012. – **81**, № 3-4. – P. 341 – 350.
8. *Su Xiongying.* On semi-normal subgroups of finite group // J. Math. (Wuhan). – 1988. – **8**, № 1. – P. 7 – 9.
9. *Carocca A., Matos H.* Some solvability criteria for finite groups // Hokkaido Math. J. – 1997. – **26**, № 1. – P. 157 – 161.
10. *Подгорная В. В.* Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 2000. – № 4. – С. 22 – 25.
11. *Монахов В. С.* Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой // Мат. заметки. – 2006. – **80**, № 4. – С. 573 – 581.
12. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. – 2007. – **46**, № 4. – С. 448 – 458.
13. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M.* Products of finite groups // De Gruyter Exp. Math. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2010. – **53**.
14. *Kegel O.* Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. – 1962. – **78**. – S. 205 – 221.
15. *Assad M., Heliel A. A.* On S-quasinormally embedded subgroups of finite groups // J. Pure and Appl. Algebra. – 2001. – **165**. – P. 129 – 135.
16. *Го Вэньбинь, Шам К. П., Скиба А. Н.* X-перестановочные максимальные подгруппы силовских подгрупп конечных групп // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 10. – С. 1299 – 1309.
17. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* X-semipermutable subgroups of finite groups // J. Algebra. – 2007. – **315**. – P. 31 – 41.
18. *Li S. R., Shen Z. C., Kong X. H.* On SS-quasinormal subgroups of finite groups // Communs Algebra. – 2008. – **36**, № 12. – P. 4436 – 4447.
19. *Li S. R., Shen Z. C., Liu J. J., Liu X. C.* The influence of SS-quasinormality of some subgroups on the structure of finite groups // J. Algebra. – 2008. – **319**. – P. 4275 – 4287.
20. *Isaacs I. M.* Semipermutable π-subgroups // Arch. Math. – 2014. – **102**. – P. 1 – 6.
21. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. – Berlin etc.: Springer, 1967. – 793 S.
22. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. – Минск: Вышэйш. шк., 2006. – 207 с.
23. *Монахов В. С.* О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // Мат. заметки. – 1995. – **58**, № 5. – С. 717 – 722.
24. *Беркович Я. Г.* Теорема о ненильпотентных разрешимых подгруппах конечной группы // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1966. – С. 24 – 39.
25. *Монахов В. С.* О подгруппах Шмидта конечных групп // Вопросы алгебры. – 1998. – Вып. 13. – С. 153 – 171.
26. *Монахов В. С.* О произведении 2-разложимой группы и группы Шмидта // Докл. АН БССР. – 1974. – **18**, № 10. – С. 871 – 874.
27. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию. – М.: Мир, 1985.
28. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups III. – Berlin etc.: Springer, 1982.

Получено 07.02.18,
после доработки — 31.08.18