УДК 517.5

Р. Р. Салимов (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Е. А. Севостьянов, А. А. Маркиш (Житомир. гос. ун-т им. И. Франко)

ОБ ОЦЕНКЕ ИСКАЖЕНИЯ РАССТОЯНИЯ СНИЗУ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОТОБРАЖЕНИЙ

We study the behavior of one class of mappings with finite distortion in a neighborhood of the origin. Under certain conditions imposed on the characteristic of quasiconformality, we establish a lower estimate for the distortion of distance under mappings of the indicated kind.

Вивчається поведінка підкласу відображень зі скінченним спотворенням в околі початку координат. За певних умов на характеристику квазіконформності встановлено оцінку спотворення відстані знизу для таких відображень.

1. Введение. Настоящая статья посвящена изучению отображений, удовлетворяющих верхним оценкам искажения p-модуля семейства кривых в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ для $p \neq n$. Напомним, что в работе [1] установлена оценка искажения расстояния при таких отображениях, обобщающая классическую теорему К. Икома (см. [2]). Отметим также публикации [3, 4], где, как и в [1], есть ограничение $n-1 < p \leq n$. По мнению авторов, случай $p > n$ также заслуживает внимания, и именно он будет рассмотрен в данной статье. Как будет показано ниже, в случае $p > n$ мы имеем дело с оценкой соответствующей величины снизу, а не сверху, что контрастирует со случаем $n-1 < p \leq n$. Указанное отличие связано с принципиально иным поведением емкости при $p > n$, на что указывает, например, неравенство (8.8) в [5].

Следует отметить, что классы исследуемых в работе отображений шире традиционного „конформного" случая $p = n$. Наиболее изученными являются отображения с ограниченным искажением p-модуля. Еще в 70-е годы 20-го столетия Ф. Герингом установлена квазиизометричность гомеоморфизмов, искажающих p-модуль ограниченное число раз при $n-1 < p < n$ (см. [6], теорема 3). Поскольку квазиконформные отображения не имеют такого свойства, данный факт указывает на целесообразность отдельного исследования p-случая. Отметим также, что при $p > n$ гомеоморфизмы с аналогичным свойством имеют квазиизометричные обратные отображения, в то время как для прямых гомеоморфизмов этот факт, по-видимому, не установлен (см. [6], теорема 3).

Напомним необходимые определения (см. [7–9]). Далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, предполагается непрерывным. Напомним, под что семейством кривых Γ подразумевается некоторое множество кривых γ, а $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Всюду далее

$$A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}, \qquad S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\},$$

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}, \qquad \mathbb{B}^n := B(0,1), \qquad \mathbb{S}^{n-1} := S(0,1),$$

Ω_n — объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, а ω_{n-1} — площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$. Для произвольных множеств E, $F \subset \overline{\mathbb{R}^n} := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ через $\Gamma(E, F, D)$ в дальнейшем обозначается семейство всевозможных кривых $\gamma\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, соединяющих E и F в D (т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a,b)$). Следующие определения могут быть найдены, например, в

[10] (разд. 1 – 6, гл. I). Борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если $\int_\gamma \rho(x)\,|dx| \ge 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. Пусть $p \ge 1$, тогда *p-модулем* семейства кривых Γ называется величина $M_p(\Gamma) = \inf_{\rho\in \operatorname{adm}\Gamma} \int_D \rho^p(x)\,dm(x)$. Пусть $x_0 \in D$, $r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, $Q\colon D \to [0,\infty]$ — некоторая заданная измеримая по Лебегу функция. Обозначим $S_i := S(x_0, r_i)$, $i = 1, 2$. Предположим, что отображение f удовлетворяет для каждых $0 < r_1 < r_2 < r_0$ условию

$$M_p\big(f(\Gamma(S_1,\, S_2,\, A))\big) \le \int\limits_A Q(x)\eta^p(|x - x_0|)\,dm(x),$$

выполненному для произвольной измеримой по Лебегу функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0,\infty]$ такой, что $\int_{r_1}^{r_2} \eta(r)\,dr \ge 1$, где $A = A(x_0, r_1, r_2)$ — сферическое кольцо с центром в точке x_0 радиусов r_1 и r_2. Тогда будем говорить, что f является *кольцевым Q-отображением в точке $x_0 \in D$ относительно p-модуля.* В настоящей работе мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $n \ge 2$, $n < p < \infty$, $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение относительно p-модуля в точке $x_0 = 0$, $f(0) = 0$. Предположим, что $Q\colon \mathbb{B}^n \to [0,\, \infty]$ — локально интегрируемая функция в $\mathbb{B}^n$, удовлетворяющая условию*

$$Q_0 = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int\limits_{B(0,\varepsilon)} Q(x)\,dm(x) > 0. \tag{1}$$

Тогда имеет место оценка

$$\limsup_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \ge c_0 Q_0^{\frac{1}{n-p}},$$

где c_0 — некоторая положительная постоянная, зависящая только от размерности пространства n и числа p.

2. Вспомогательные результаты. Оценка верхнего предела одной функции. Пару $E = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и C — непустое компактное множество, содержащееся в A, будем называть *конденсатором* в $\mathbb{R}^n$. Говорят также, что конденсатор $E = (A, C)$ лежит в области D, если $A \subset D$. Очевидно, что если $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое отображение и $E = (A, C)$ — конденсатор в D, то $f(E) := (f(A), f(C))$ также является конденсатором в $f(D)$.

Обозначим через $C_0(A)$ множество всех непрерывных функций $u\colon A \to \mathbb{R}^1$ с компактным носителем, $W_0(E) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных функций $u\colon A \to \mathbb{R}^1$ таких, что: 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(x) \ge 1$ для $x \in C$; 3) u принадлежит классу абсолютно непрерывных функций ACL (см. [11]). Также обозначим $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2}$. При $p \ge 1$ величину

$$\operatorname{cap}_p E = \operatorname{cap}_p(A, C) = \inf_{u\in W_0(E)} \int\limits_A |\nabla u|^p\,dm(x)$$

называют *p-емкостью* конденсатора E. При $n < p < \infty$

$$\operatorname{cap}_p E = \operatorname{cap}_p(A, C) \geq n\Omega_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{p-1} \left((m(A))^{\frac{p-n}{n(p-1)}} - (m(C))^{\frac{p-n}{n(p-1)}}\right)^{1-p} \tag{2}$$

(см., например, [5], неравенство (8.7)).

Пусть $Q\colon D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Тогда положим

$$q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0, r)} Q(x) d\mathcal{H}^{n-1},$$

где $\mathcal{H}^{n-1}$ — $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа. Следующая лемма при $p \in (1, n]$ доказана в [1] (лемма 1). В случае произвольного $p > 1$ ее доказательство дословно повторяет рассуждения, относящиеся к случаю $p \in (1, n]$, и поэтому опускается.

Лемма 1. *Пусть $n \geq 2$, $p \geq 1$, $Q\colon D \to [0, \infty]$ — заданная измеримая по Лебегу функция, $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 \in D$ относительно p-модуля и E — конденсатор вида $E = \left(B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)}\right)$, $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Полагаем*

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}. \tag{3}$$

Тогда для конденсатора $f(E) = \left(f\big(B(x_0, r_2)\big), f\left(\overline{B(x_0, r_1)}\right)\right)$ выполнено соотношение

$$\operatorname{cap}_p f(E) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}.$$

Предположим, что $0 \in D$ и $0 < r < \operatorname{dist}(0, \partial D)$. Для произвольного отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ в дальнейшем будем использовать обозначение

$$L_f(r) := \max_{|x|=r} |f(x)|.$$

Аналог следующей леммы доказан в [1] (лемма 5).

Лемма 2. *Пусть $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — открытое отображение, удовлетворяющее условию $f(0) = 0$. Предположим, что существует функция $R\colon [0, 1] \to [0, \infty)$ такая, что*

$$m\big(f(B(0, r))\big) \geq \Omega_n R^n(r). \tag{4}$$

Тогда

$$\limsup_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{R(|x|)} \geq 1.$$

Доказательство. Покажем, что

$$f\big(B(0, r)\big) \subset B\big(0, L_f(r)\big) \tag{5}$$

при каждом $r \in (0, 1)$. Для этого зафиксируем $r_0 \in (0, 1)$ и обозначим $M := \sup_{y \in \overline{f(B(0, r_0))}} |y|$. По определению точной верхней грани найдется такая последовательность $y_k \in f(B(0, r_0))$, что $|y_k| \to M$ при $k \to \infty$. Тогда $y_k = f(x_k)$, $x_k \in B(0, r_0)$. Так как $\overline{B(0, r_0)}$ — компакт в $\mathbb{B}^n$, можно считать, что при некотором $x_0 \in \overline{B(0, r_0)}$ выполнено условие $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$.

Поскольку f — непрерывное отображение в $\mathbb{B}^n$, то $f(x_k) \to f(x_0)$ при $k \to \infty$, так что $f(x_0) = y_0$. Таким образом, $y_0 \in f(\overline{B(0,r_0)})$. Значит,

$$M := \max_{y \in f(\overline{B(0,r_0)})} |y| = |y_0|, \quad y_0 \in f\big(\overline{B(0,r_0)}\big). \tag{6}$$

Заметим, что в силу открытости отображения f случай $y_0 \in f(B(0,r_0))$ невозможен. Действительно, если бы $y_0 \in f(B(0,r_0))$, то тогда y_0 входило бы во множество $f(B(0,r_0))$ вместе с некоторой своей окрестностью $B(y_0,\delta)$, кроме того, $y_0 \neq 0$ вследствие открытости отображения f. Представим y_0 в виде $y_0 = |y_0|\dfrac{y_0}{|y_0|}$. Тогда вектор $\widetilde{y_0} := \big(|y_0| + \delta/2\big)\dfrac{y_0}{|y_0|}$ имеет модуль больший, чем y_0, и все еще принадлежит $f(B(0,r_0))$. Однако последнее противоречит определению y_0. Полученное противоречие указывает на то, что $y_0 \notin f(B(0,r_0))$ и, значит, $y_0 \in \partial f(B(0,r_0))$. В частности, отсюда следует, что

$$|f(x)| < M \quad \forall x \in B(0,r_0). \tag{7}$$

Поскольку $y_0 \in \partial f(B(0,r_0))$, в силу открытости отображения f имеем $y_0 \in f(S(0,r_0))$.

Итак, $y_0 = f(x_0)$, где $x_0 \in S(0,r_0)$. В таком случае, согласно соотношениям (6) и (7), для любого $x \in B(0,r_0)$ получим

$$|f(x)| < M = |y_0| = |f(x_0)| \le \sup_{x \in S(0,r_0)} |f(x)| = L_f(r_0),$$

так что $f(x) \in B(0, L_f(r_0))$. Включение (5) установлено.

Из соотношения (5), учитывая условие $f(0) = 0$, получаем $\Omega_n\, L_f^n(r) \ge m(f(B(0,r)))$ и, следовательно,

$$L_f(r) \ge \left(\frac{m(f(B(0,r)))}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{8}$$

Таким образом, учитывая неравенства (4) и (8), имеем

$$\limsup_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{R(|x|)} = \limsup_{r\to 0} \frac{L_f(r)}{R(r)} \ge \limsup_{r\to 0} \left(\frac{m(f(B(0,r)))}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{R(r)} \ge 1.$$

Лемма 2 доказана.

3. Доказательство основного результата. ***Доказательство теоремы* 1.** Рассмотрим кольцо $A = A(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$. Пусть E — конденсатор вида $E = \Big(B(0,\varepsilon_2), \overline{B(0,\varepsilon_1)}\Big)$. Положим

$$\eta_0(r) = \frac{1}{I r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)},$$

где I — величина, определенная в (3). Согласно лемме 2.2 [12],

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}} = \int\limits_A Q(x)\eta_0^p(|x-x_0|)\, dm(x) \le \int\limits_A Q(x)\eta^p(|x-x_0|)\, dm(x) \tag{9}$$

для фиксированной измеримой функции $Q\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ такой, что $q_{x_0}(r) \neq \infty$ для почти всех $r > 0$, и любой функции $\eta\colon (r_1,r_2) \to [0,\infty]$ такой, что $\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr = 1$. В силу леммы 1 и соотношения (9) неравенство

$$\mathrm{cap}_p\, f(E) \le \int\limits_A Q(x)\eta^p(|x-x_0|)\, dm(x) \tag{10}$$

будет выполнено для произвольной измеримой по Лебегу функции $\eta\colon (\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to[0,\infty]$ такой, что $\displaystyle\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\eta(r)\,dr\ge 1$. Заметим, что функция

$$\eta(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}, & t\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2),\\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus(\varepsilon_1,\varepsilon_2),\end{cases}$$

удовлетворяет условию $\displaystyle\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\eta(r)\,dr\ge 1$, поэтому согласно (10) получаем

$$\mathrm{cap}_p\left(f\big(B(0,\varepsilon_2)\big), f\big(\overline{B(0,\varepsilon_1)}\,\big)\right)\le \frac{1}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^p}\int\limits_{A(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} Q(x)\,dm(x).$$

Далее, выбирая $\varepsilon_1=\varepsilon$ и $\varepsilon_2=2\varepsilon$, имеем

$$\mathrm{cap}_p\left(f\big(B(0,2\varepsilon)\big), f\big(\overline{B(0,\varepsilon)}\,\big)\right)\le \frac{1}{\varepsilon^p}\int\limits_{A(0,\varepsilon,2\varepsilon)} Q(x)\,dm(x). \tag{11}$$

С другой стороны, в силу неравенства (2) при каждом фиксированном $\varepsilon>r>0$ справедлива оценка

$$\mathrm{cap}_p\left(f\big(B(0,2\varepsilon)\big), f\big(\overline{B(0,\varepsilon)}\,\big)\right)\ge \mathrm{cap}_p\left(f\big(B(0,2\varepsilon)\big), f\big(\overline{B(0,r)}\,\big)\right)\ge$$

$$\ge n{\Omega_n}^{\frac{p}{n}}\left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{p-1}\left(\Big(m\big(f\big(B(0,2\varepsilon)\big)\big)\Big)^{\frac{p-n}{n(p-1)}}-\Big(m\big(f\big(\overline{B(0,r)}\big)\big)\Big)^{\frac{p-n}{n(p-1)}}\right)^{1-p}. \tag{12}$$

Соотношение (12) имеет место при любом $r\in(0,\varepsilon)$, поэтому можно перейти к пределу при $r\to 0$. В таком случае получаем

$$\mathrm{cap}_p\left(f\big(B(0,2\varepsilon)\big), f\big(\overline{B(0,\varepsilon)}\,\big)\right)\ge c\Big(m\big(f\big(B(0,2\varepsilon)\big)\big)\Big)^{\frac{n-p}{n}}, \tag{13}$$

где $c:=n^{1/(1-p)}{\Omega_n}^{p/(n(1-p))}(p-1)/(p-n)$. Комбинируя (11) и (13), находим

$$\frac{m\big(f\big(B(0,2\varepsilon)\big)}{2^n\Omega_n\varepsilon^n}\ge c_1\left(\frac{1}{2^n\Omega_n\varepsilon^n}\int\limits_{B(0,2\varepsilon)} Q(x)\,dm(x)\right)^{\frac{n}{n-p}}, \tag{14}$$

где c_1 — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Используя соотношение (8), имеем

$$\limsup_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|}=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{L_f(2\varepsilon)}{2\varepsilon}\ge\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{m\big(f\big(B(0,2\varepsilon)\big)\big)}{\Omega_n(2\varepsilon)^n}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{15}$$

Наконец, комбинируя (14) и (15), находим

$$\limsup_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|}\geq c_0\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2^n\Omega_n\varepsilon^n}\int\limits_{B(0,2\varepsilon)}Q(x)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{n-p}}=c_0Q_0^{\frac{1}{n-p}},$$

где $c_0>0$ — некоторая постоянная, зависящая только от n и p.

Теорема доказана.

Из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, $n<p<\infty$, $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение относительно p-модуля в точке x_0, $x_0\in D$. Предположим, что $Q\colon D\to[0,\infty]$ — локально интегрируемая функция, удовлетворяющая условию*

$$Q_0=\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\Omega_n\varepsilon^n}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)}Q(x)\,dm(x)>0. \tag{16}$$

Тогда имеет место оценка

$$\limsup_{x\to x_0}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}\geq c_0Q_0^{\frac{1}{n-p}}, \tag{17}$$

где c_0 — некоторая положительная постоянная, зависящая от точки x_0, размерности пространства n и числа p.

***Доказательство следствия* 1** легко вытекает из теоремы 1. Действительно, если имеется кольцевое Q-отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ в точке $x_0\in D$, то зафиксируем $r>0$ так, чтобы $\overline{B(x_0,r)}\subset D$. Заметим, что вспомогательное преобразование $\widetilde{f}(y):=f(ry+x_0)-f(x_0)$ также является $\widetilde{Q}$-кольцевым отображением $f\colon\mathbb{B}^n\to\mathbb{R}^n$ относительно p-модуля в точке 0, где $\widetilde{Q}(y)=r^{n-p}Q(ry+x_0)$ и, кроме того, $f(0)=0$ (см., например, [10] (теорема 8.2) по поводу изменения p-модуля при растяжениях). Кроме того, заметим, что условие (16) выполняется для функции $\widetilde{Q}$ при $\widetilde{Q}_0$ вместо Q_0, где $\widetilde{Q}_0=r^{n-p}Q_0$. Из этой теоремы следует, что

$$\limsup_{y\to 0}\frac{|\widetilde{f}(y)|}{|y|}=\limsup_{y\to 0}\frac{|f(ry+x_0)-f(x_0)|}{|y|}\geq c_0Q_0^{\frac{1}{n-p}}r.$$

Если в последнем соотношении перейти к переменной $x:=ry+x_0$, то оно примет вид (17), что и требовалось доказать.

В качестве еще одного следствия из теоремы 1 имеем следующее утверждение.

***Следствие* 2.** *Предположим, что в условиях теоремы* 1 *выполнено равенство $Q_0=0$. Тогда $\limsup\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|}{|x|}=\infty$.*

Доказательство. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 1, на основании соотношения вида (8) имеем

$$L_f(r)\geq\left(\frac{m(f(B(0,r)))}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{18}$$

Повторяя также рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, получаем соотношение вида (14), из которого следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{m(f(B(0,2\varepsilon))}{2^n\Omega_n\varepsilon^n}=\infty. \qquad (19)$$

Тогда из (18) и (19) получаем

$$\limsup_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|}=\limsup_{r\to 0}\frac{L_f(r)}{r}=\infty,$$

что и требовалось доказать.

Следующий пример указывает на содержательность условий и заключения следствия 2. При фиксированном $\theta\in(0,1)$ рассмотрим отображение

$$f(x)=\frac{x}{|x|}|x|^{\theta},\quad x\in\mathbb{B}^n.$$

Заметим, что $|f(x)|/|x|\to\infty$ при $x\to 0$. Покажем, что f — кольцевое Q-отображение в нуле. Для этого воспользуемся теоремой 2.2 [13]. Очевидно, $f\in C^1(\mathbb{B}^n\setminus\{0\})$, так что f дифференцируемо почти всюду в $\mathbb{B}^n$, принадлежит классу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^n\setminus\{0\})$ и имеет N-свойство. По тем же причинам отображение $f^{-1}(y)=\dfrac{|y|^{1/\theta}}{|y|}y$ также принадлежит классу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^n\setminus\{0\})$ и имеет N-свойство. По теореме 2.2 [13] отображение f является кольцевым Q-отображением в каждой точке $x_0\in\mathbb{B}^n$ при

$$Q(x):=K_{I,p}(x,f)=\begin{cases}\dfrac{J(x,f)}{l^p(x,f)}, & J(x,f)\neq 0,\\ 1, & f'(x)=0,\\ \infty & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

где $l(f'(x))=\min_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\dfrac{|f'(x)h|}{|h|}$ и $J(x,f)=\det f'(x)$. Подсчитаем $K_{I,p}(x,f)$, для чего воспользуемся предложением 5.1 из [14]. В обозначениях этого предложения

$$\lambda_r(x)=\frac{\partial|f(x)|}{\partial|x|}=\theta|x|^{\theta-1},\qquad \lambda_\tau(x)=\frac{|f(x)|}{|x|}=|x|^{\theta-1}.$$

Заметим, что $l(f'(x))=\min\{\lambda_r(x),\lambda_\tau(x)\}$ и $|J(x,f)|=\lambda_\tau^{n-1}(x)\lambda_r(x)$ (см. [14], разд. 5.1). Очевидно, $\lambda_r(x)<\lambda_\tau(x)$ и

$$Q(x):=K_{I,p}(x,f)=\frac{\theta|x|^{(n-1)(\theta-1)}|x|^{\theta-1}}{(\theta|x|^{\theta-1})^p}=\theta^{1-p}|x|^{(n-p)(\theta-1)}.$$

Вычислим Q_0 по формуле (1). По теореме Фубини получаем

$$\int\limits_{B(0,\varepsilon)}Q(x)\,dm(x)=\int\limits_0^{\varepsilon}\int\limits_{S(0,r)}\theta^{1-p}|x|^{(n-p)(\theta-1)}\,dS\,dr=$$

$$=\omega_{n-1}\theta^{1-p}\int\limits_0^{\varepsilon}r^{n-1}r^{(n-p)(\theta-1)}dr=$$

$$= \frac{\omega_{n-1}\theta^{1-p}\varepsilon^{(n-p)(\theta-1)+n}}{(n-p)(\theta-1)+n} = C\varepsilon^{(n-p)(\theta-1)+n},$$

где $C := \dfrac{\omega_{n-1}\theta^{1-p}}{(n-p)(\theta-1)+n}$. Учитывая полученное выше, имеем

$$Q_0 := \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{C}{\Omega_n}\frac{\varepsilon^{(n-p)(\theta-1)+n}}{\varepsilon^n} = 0.$$

Еще одно утверждение может быть доказано в случае, когда $Q \in L^{\alpha}_{\rm loc}(\mathbb{B}^n)$.

Теорема 2. *Пусть $n \geq 2$, $n < p < \infty$, $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение относительно p-модуля в нуле, $f(0) = 0$. Предположим, что $Q : \mathbb{B}^n \to [0, \infty]$ — локально интегрируемая функция в $\mathbb{B}^n$ в степени $\alpha > 1$. Пусть $K \subset \mathbb{B}^n$ — произвольный компакт, удовлетворяющий условию $0 \in \operatorname{Int} K$. Тогда имеет место оценка*

$$\limsup_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{1+\frac{n}{\alpha(p-n)}}} \geq C > 0,$$

где C — некоторая положительная постоянная, зависящая только от размерности пространства n, чисел p, α и компакта K.

Доказательство. Выберем произвольным образом компакт $K \subset \mathbb{B}^n$, удовлетворяющий условию $0 \in \operatorname{Int} K$. Поскольку $Q \in L^{\alpha}_{\rm loc}(\mathbb{B}^n)$, найдется постоянная $\overline{C} = \overline{C}(K) < \infty$ такая, что $\displaystyle\int_K Q^{\alpha}(x)\, dm(x) \leq \overline{C}(K)$. Повторяя теперь рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, мы вновь получаем соотношения (11), (13). Кроме того, поскольку по выбору компакта K точка 0 является его внутренней точкой, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ кольцо $A(0, \varepsilon, 2\varepsilon)$ находится в K.

Оценим теперь интеграл справа в (11) сверху, использовав неравенство Гельдера с показателями α и $\alpha' = \dfrac{\alpha}{\alpha-1} > 1$, $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha'} = 1$. Учитывая изложенное выше, имеем

$$\int\limits_{A(0,\varepsilon,2\varepsilon)} Q(x)\, dm(x) \leq \left(\int\limits_K Q^{\alpha}(x)\, dm(x)\right)^{1/\alpha} \left(2\Omega_n^{1/n}\varepsilon\right)^{\frac{n(\alpha-1)}{\alpha}} \leq C_1(K)\varepsilon^{\frac{n\alpha-n}{\alpha}},$$

где $C_1 = C_1(K)$ — некоторая новая постоянная, зависящая только от функции Q, компакта K, n и степени α. Применяя (11) и (13), получаем

$$\big(m\big(f\big(B(0, 2\varepsilon)\big)\big)\big)^{1/n} \geq C_2\varepsilon^{\left(\frac{n\alpha-n}{\alpha}-p\right)\frac{1}{n-p}} = C_2\varepsilon^{\frac{n\alpha-n-\alpha p}{\alpha n-\alpha p}} = C_2\varepsilon^{1+\frac{n}{\alpha(p-n)}}, \tag{20}$$

где C_2 — некоторая положительная постоянная, зависящая только от функции Q, компакта K, n и степени α. Из (20) следует, что

$$\frac{\big(m\big(f\big(B(0, 2\varepsilon)\big)\big)\big)^{1/n}}{\varepsilon^{1+\frac{n}{\alpha(p-n)}}} \geq C_2 > 0. \tag{21}$$

Используя соотношения (8) и (21), имеем

$$\limsup_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{1+\frac{n}{\alpha(p-n)}}}=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{L_f(2\varepsilon)}{(2\varepsilon)^{1+\frac{n}{\alpha(p-n)}}}\geq$$

$$\geq\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\big(m\big(f(B(0,2\varepsilon))\big)\big)^{1/n}}{(2\varepsilon)^{1+\frac{n}{\alpha(p-n)}}}\geq\frac{C_2}{2^{1+\frac{n}{\alpha(p-n)}}}.$$

Полагая $C:=C_2/2^{1+\frac{n}{\alpha(p-n)}}$, получаем необходимое заключение.

Заметим, что от условия $Q\in L^{\alpha}_{\rm loc}(\mathbb{B}^n)$, содержащегося в теореме 2, вообще говоря, нельзя отказаться, что составляет содержательную часть следующего утверждения.

Теорема 3. *Для произвольного $\alpha>1$ найдется кольцевой Q-гомеоморфизм $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ в точке $x_0=0$ относительно p-модуля, $p>n$, такой, что $Q\notin L^{\alpha}_{\rm loc}(\mathbb{B}^n)$, и при этом*

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{1+\frac{n}{\alpha(p-n)}}}=0. \tag{22}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольным образом $\alpha>1$, $\varepsilon>0$ и $p>n$. Положим

$$f(x)=x|x|^{\frac{n}{\alpha(p-n)}+\varepsilon}.$$

Из определения следует, что f — гомеоморфизм единичного круга в себя, $f(0)=0$, кроме того, $f^{-1}(y)=\dfrac{y}{|y|}|y|^{1/\beta}$, где $\beta=\dfrac{n}{\alpha(p-n)}+\varepsilon+1$. Отсюда следует, что $f,f^{-1}\in C^1(\mathbb{B}^n\setminus\{0\})$; в частности, f дифференцируемо почти всюду, имеет N- и N^{-1}-свойства Лузина и, кроме того, f^{-1} абсолютно непрерывно на p-почти всех кривых. Тогда по теореме 1.1 [13] отображение f является кольцевым Q-отображением в каждой точке $x_0\in\mathbb{B}^n$ при

$$Q(x):=K_{I,p}(x,f)=\begin{cases}\dfrac{|J(x,f)|}{l^p(x,f)}, & J(x,f)\neq 0,\\[2mm] 1, & f'(x)=0,\\[2mm] \infty & \text{в остальных случаях},\end{cases}$$

где $l(f'(x))=\min_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\dfrac{|f'(x)h|}{|h|}$ и $J(x,f)=\det f'(x)$. Подсчитаем $K_{I,p}(x,f)$, для чего воспользуемся предложением 5.1 из [14]. В обозначениях этого предложения

$$\lambda_r(x)=\frac{\partial|f(x)|}{\partial|x|}=\left(\frac{n}{\alpha(p-n)}+\varepsilon+1\right)|x|^{\frac{n}{\alpha(p-n)}+\varepsilon},$$

$$\lambda_\tau(x)=\frac{|f(x)|}{|x|}=|x|^{\frac{n}{\alpha(p-n)}+\varepsilon}.$$

Заметим, что $l(f'(x))=\min\{\lambda_r(x),\lambda_\tau(x)\}$ и $|J(x,f)|=\lambda_\tau^{n-1}(x)\lambda_r(x)$ (см. [14], разд. 5.1). Очевидно, $\lambda_\tau(x)<\lambda_r(x)$, поэтому

$$K_{I,p}(x,f)=\left(\frac{n}{\alpha(p-n)}+\varepsilon+1\right)\frac{|x|^{(n-1)(\frac{n}{\alpha(p-n)}+\varepsilon)}|x|^{\frac{n}{\alpha(p-n)}+\varepsilon}}{|x|^{p(\frac{n}{\alpha(p-n)}+\varepsilon)}}=$$

$$= \left(\frac{n}{\alpha(p-n)} + \varepsilon + 1\right)|x|^{-n/\alpha+\varepsilon(n-p)} = C|x|^{-n/\alpha+\varepsilon(n-p)},$$

где $C = \dfrac{n}{\alpha(p-n)} + \varepsilon + 1$. Пусть K — произвольный компакт в $\mathbb{B}^n$ такой, что $B(0,\varepsilon_0) \subset K$ при некотором $0 < \varepsilon_0 < 1$. Тогда по теореме Фубини

$$\int\limits_K K^{\alpha}_{I,p}(x,f)\,dm(x) \geq \int\limits_{B(0,\varepsilon_0)} K^{\alpha}_{I,p}(x,f)\,dm(x) =$$

$$= C^{\alpha}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\int\limits_{S(0,r)} |x|^{-n+\alpha\varepsilon(n-p)}\,dS\,dr = C^{\alpha}\omega_{n-1}\int\limits_0^{\varepsilon_0} r^{n-1}r^{-n+\alpha\varepsilon(n-p)}\,dr =$$

$$= C^{\alpha}\omega_{n-1}\int\limits_0^{\varepsilon_0} r^{\alpha\varepsilon(n-p)-1}\,dr = \infty, \tag{23}$$

так как показатель степени при r меньше -1. Очевидно также, что соотношение (22) имеет место, т. е. заключение теоремы 2 не выполнено. Причиной последнего является расходимость интеграла слева в (23).

Литература

1. *Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* Аналоги леммы Икома – Шварца и теоремы Лиувилля для отображений с неограниченной характеристикой // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 10. – С. 1368 – 1380.
2. *Ikoma K.* On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J. – 1965. – **25**. – P. 175 – 203.
3. *Салимов Р. Р.* О кольцевых Q-отображениях относительно неконформного модуля // Дальневост. мат. журн. – 2014. – **14**, № 2. – С. 257 – 269.
4. *Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* О некоторых свойствах пространственных обобщенных квазиизометрий // Мат. заметки. – 2017. – **101**, № 4. – С. 594 – 610.
5. *Mazya V.* Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces // Contemp. Math. – 2003. – **338**. – P. 307 – 340.
6. *Gehring F.* Lipschitz mappings and p-capacity of rings in n-space // Ann. Math. Stud. – 1971. – **66**. – P. 175 – 193.
7. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
8. *Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation: a geometric approach. – New York etc.: Springer, 2012.
9. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yakubov E.* The Beltrami equations and prime ends // Укр. мат. вісн. – 2015. – **12**, № 1. – С. 27 – 66.
10. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1971. – **229**.
11. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
12. *Салимов Р. Р.* Об оценке меры образа шара // Сиб. мат. журн. – 2012. – **53**, № 4. – С. 920 – 930.
13. *Salimov R. R., Sevost'yanov E. A.* The Poletskii and Väisälä inequalities for the mappings with (p,q)-distortion // Complex Var. and Elliptic Equat. – 2014. – **59**, № 2. – P. 217 – 231.
14. *Ильютко Д. П., Севостьянов Е. А.* Об открытых дискретных отображениях с неограниченной характеристикой на римановых многообразиях // Мат. сб. – 2016. – **207**, № 4. – С. 65 – 112.

Получено 06.04.18