УДК 519.21

Я. Чабанюк, В. Роса (Ун-т „Люблін. політехніка”, Польща)

ПРОЦЕДУРА СТОХАСТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ ДИФУЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ З НАПІВМАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ

We obtain sufficient conditions for the convergence of the procedure of stochastic approximation for the diffusion process in the case of a uniformly ergodic semi-Markov process of switchings of the regression function with the use of a small parameter in the scheme of series.

Отримано достатні умови збіжності процедури стохастичної апроксимації для дифузійного процесу у випадку рівномірно ергодичного напівмарковського процесу перемикань функції регресії з використанням малого параметра в схемі серій.

1. Вступ. Внаслідок широкого використання стохастичних дифузійних процесів виникла проблема встановлення умов стійкості та контролю таких процесів. У статті [6] встановлено достатні умови стійкості стохастичних систем за функціональними властивостями функцій Ляпунова та отримано оцінки великих відхилень лінійних дифузійних систем. Проблемам оптимального управління дифузійними процесами, що описуються стохастичними диференціальними рівняннями з прийнятним контролем, присвячено роботу [20]. При цьому використано генератор дифузійного процесу, властивість Маркова та його мартингальну характеризацію, а також тест-функцію типу Ляпунова.

З іншого боку, важливою є асимптотична поведінка дифузійних процесів, що розглядається в [23, 24]. Для отримання умов слабкої збіжності випадкових процесів у роботах [11, 12, 16] використано метод малого параметра та розв’язок проблеми сингулярного збурення для побудови генератора граничного процесу. Цей метод використовується у схемах усереднення, дифузійної апроксимації та асимптотично малої дифузії. Зокрема, у роботі [16] розглянуто випадкові еволюції з марковськими та напівмарковськими перемиканнями.

Побудові напівмарковських процесів та дослідженню асимптотичних властивостей випадкових процесів із напівмарковськими перемиканнями присвячено роботи [1 – 4]. Для таких процесів встановлено слабку збіжність до розв’язку рівнянь з частинними похідними у схемах усереднення та дифузійної апроксимації до дифузійних процесів [3, 5].

У роботі [19] проаналізовано асимптотичні властивості напівмарковських процесів із лінійним збуренням генератора супроводжуючого марковського процесу з використанням напівгрупових властивостей останнього. Ці результати було узагальнено в [14]. Класифікацію розв’язків проблеми сингулярного збурення для випадкових процесів у напівмарковському середовищі наведено у [15, 16] із використанням компенсуючого оператора [25]. Асимптотичні властивості компенсуючого оператора дозволили в [10] отримати достатні умови збіжності випадкової еволюції з напівмарковськими перемиканнями до дифузійного процесу в умовах балансу та у схемі усереднення [13]. Результати цих досліджень були використані в різних застосуваннях [8, 9, 17, 18].

У роботі [21] збіжність процедури стохастичної апроксимації (ПСА) встановлюється за допомогою властивостей функцій типу Ляпунова. Узагальнення ПСА на випадок, коли функція регресії враховує напівмарковські перемикання, розглянуто в [7].

2. Постановка задачі. У даній статті розглядаємо динамічну систему з напівмарковськими перемиканнями та малим параметром серій. Нехай $x(t),\ t \geq 0,$ — напівмарковський процес у стандартному фазовому просторі станів $(X, \mathcal{E})$, що визначається процесом марковського відновлення $x_n,\ \tau_n,\ n \geq 0$, та напівмарковським ядром

$$Q(t, x, B) = P(x, B) G_x(t),$$

де стохастичне ядро

$$P(x, B) := \mathrm{P}\{x_{n+1} \in B | x_n = x\}, \quad B \in \mathcal{E},$$

описує вкладений ланцюг Маркова $x_n = x(\tau_n)$ в моменти відновлення:

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k, \qquad n \geq 0, \quad \tau_0 = 0,$$

з інтервалами $\theta_{k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k$ між моментами відновлення; θ_n визначені функціями розподілу

$$G_x(t) = \mathrm{P}\{\theta_{n+1} \leq t \mid x_n = x\} =: \mathrm{P}\{\theta_x \leq t\}.$$

Напівмарковський процес визначається зображенням

$$x(t) = x_{\nu(t)}, \quad t \geq 0,$$

де лічильний процес $\nu(t)$ визначається співвідношенням

$$\nu(t) := \max\{n \colon \tau_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Будемо розглядати напівмарковський процес $x(t),\ t \geq 0$, який є регулярним і рівномірно ергодичним із стаціонарним розподілом $\pi(B),\ B \in \mathcal{E}$:

$$\pi(dx) = \rho(dx) g(x)/m, \qquad g(x) = \int_0^\infty (1 - G_x(t)\, dt, \qquad m = \int_X g(x) \pi(dx).$$

Тут $\rho(B),\ B \in \mathcal{E},$ — стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова.

Дифузійний процес $u^\varepsilon(t) \in R^d$ у схемі усереднення з малим параметром $\varepsilon > 0$ визначається стохастичним диференціальним рівнянням

$$du^\varepsilon(t) = a(t) \left[C\left(u^\varepsilon(t); x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) dt + \sigma\left(u^\varepsilon(t); x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) dw(t) \right], \tag{1}$$

де $u^\varepsilon(t),\ t \geq 0,$ — випадкова еволюція, що визначена дифузійним процесом (1) [2, 15, 16, 25]; $x(t),\ t \geq 0,$ — напівмарковський процес [1, 14, 16, 19]; $w(t)$ — процес Вінера [11, 23, 24].

Напівгрупа $\mathbf{C}_{t+s}^t(x),\ t \geq 0,\ s \geq 0,\ x \in X,$ супроводжуючої системи

$$du_x(t) = a(t) \big[C(u_x(t); x) dt + \sigma(u_x(t); x) dw(t) \big], \quad u_x(0) = u,$$

визначається співвідношенням

$$\mathbf{C}_{t+s}^t(x) \phi(u) = \phi(u_x(t+s)), \quad u_x(t) = u,$$

де

$$u_x(t+s) := u_x(t+s,u), \qquad u_x(t) := u_x(t,u)$$

— напівгрупова властивість.

Генератор $\mathbf{C}_t(x)$ напівгрупи $\mathbf{C}^t_{t+s}(x)$визначається таким чином:

$$\mathbf{C}_t(x)\phi(u) = a(t)C(u,x)\phi'(u) + a^2(t)\frac{1}{2}\sigma^2(u,x)\phi''(u),$$

де $\phi(u) \in C^2(R^d)$.

Далі розглянемо усереднення функції регресії $C(u) = \displaystyle\int_X C(u,x)\pi(dx)$.

3. Основний результат.

Теорема 1. *Нехай функція Ляпунова* $V(u)$ *системи* $\dfrac{du}{dt} = C(u)$ *задовольняє умови*:

C$_1$) $C(u)V'(u) \le -c_0V(u)$, $c_0 > 0$,

C$_2$) $|C(u,x)R_0C(u,x)V'(u)| \le c_1(1+V(u))$, $c_1 > 0$,

C$_3$) $[C(u,x)R_0[C(u,x)V'(u)]'] \le c_2(1+V(u))$, $c_2 > 0$,

C$_4$) $|C(u,x)[C(u,x)R_0[C(u,x)V'(u)]']'| \le c_3(1+V(u))$, $c_3 > 0$,

C$_5$) $\|\sigma(u,x)\|^2 \le c_4(1+V(u))$, $c_4 > 0$.

Крім того, нехай виконуються додаткові умови:

C$_6$) $\sup_{x\in X} \displaystyle\int_0^\infty e^{ht}G_x(t)\,dt \le H < \infty$, $h > 0$,

C$_7$) $\displaystyle\int_0^\infty a(t)\,dt = \infty$, $\displaystyle\int_0^\infty a^2(t)\,dt < \infty$,

C$_8$) $b_1^\varepsilon(t,s) = \dfrac{a(t+\varepsilon s)}{a(t)} \le A_1 < \infty$, *для* $b_2^\varepsilon(t,s) = \dfrac{a'(t+\varepsilon s)}{a(t)}$ *має місце оцінка* $\left|b_2^\varepsilon(t,s)\right| <$ $< A_2 < \infty$.

Тоді розв'язок $u^\varepsilon(t)$, $t \ge 0$, *рівняння* (1) *збігається з імовірністю* 1:

$$\mathrm{P}\left(\lim_{t\to\infty} u^\varepsilon(t) = u^*\right) = 1,$$

де u^* *— точка рівноваги функції регресії*, *тобто* $C(u^*) = 0$.

Визначимо розширений процес марковського відновлення (ПМВ) [16] співвідношеннями

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \qquad x_n^\varepsilon = x^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \quad \tau_n^\varepsilon = \varepsilon\tau_n, \tag{2}$$

де $\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k$, $n \ge 0$, $\tau_0 = 0$, — моменти відновлення напівмарковського процесу $x(t)$, $t \ge 0$ [16].

Означення 1 [10, 16]. *Компенсуючий оператор розширеного ПМВ* (2) *визначається співвідношенням*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\phi(u,x,t) = \varepsilon^{-1}\big[\mathrm{E}\big\{\phi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon, \tau_{n+1}^\varepsilon) \;\big|\; u_n^\varepsilon = u,\ x_n^\varepsilon = x,\ \tau_n^\varepsilon = t\big\} - \phi(u,x,t)\big]/g(x). \tag{3}$$

Лема 1. *Компенсуючий оператор* (3) *на тест-функціях* $\phi(u,x)$ *має вигляд*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\phi(u,x) = \varepsilon^{-1}q(x)\left[\int_0^\infty G_x(ds)\mathbf{C}^t_{t+\varepsilon s}(x)\int_X P(x,dy)\phi(u,y) - \phi(u,x)\right]. \tag{4}$$

Доведення. Для точки u_1 маємо [13, 16, 25]

$$\mathrm{E}\phi(u_1^\varepsilon, x_1^\varepsilon) = \mathrm{E}\mathbf{C}_{t+\theta_{x_0}}^t(x)\phi(u, x_1^\varepsilon) = \int\limits_0^\infty G_x(ds)\mathbf{C}_{t+s}^t(x)\int\limits_X P(x,dy)\phi(u,y).$$

Звідси отримуємо (4).

Лема 2. *Компенсуючий оператор* $\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)$ *має вигляд*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\phi(u,x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\phi(u,x) + \varepsilon^{-1}q(x)\big[\mathbf{G}_t^\varepsilon(x) - I\big]\mathbf{P}\phi(u,x), \tag{5}$$

де

$$\mathbf{G}_t^\varepsilon(x) = \int\limits_0^\infty G_x(ds)\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}^t(x), \qquad \mathbf{P}\phi(x) = \int\limits_X P(x,dy)\phi(y).$$

Доведення. Із зображення (4) маємо

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\phi(u,x) =$$

$$= \varepsilon^{-1}q(x)\left[\int\limits_0^\infty G_x(ds)\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}^t(x)\int\limits_X P(x,dy)\phi(u,y) - \phi(u,x)\right] =$$

$$= \varepsilon^{-1}q(x)\int\limits_X P(x,dy)\big[\phi(u,y) - \phi(u,x)\big] +$$

$$+\varepsilon^{-1}q(x)\int\limits_0^\infty G_x(ds)\left[\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}^t - I\right]\int\limits_X P(x,dy)\phi(u,y).$$

Звідси отримуємо (5).

Лема 3. *Компенсуючий оператор* $\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)$ *має такі асимптотичні зображення*:

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,x) + q(x)\theta_1^\varepsilon(x)\mathbf{P}\varphi(u,x), \tag{6}$$

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,x) + \mathbf{C}_t(x)\mathbf{P}\varphi(u,x) + \varepsilon a^2(t)\theta_2^\varepsilon(x)\mathbf{P}\varphi(u,x), \tag{7}$$

де

$$\theta_1^\varepsilon(x) = \int\limits_0^\infty \overline{G}_x(s)\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}(x)\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}^t(x)\,ds,$$

$$\theta_2^\varepsilon(x) = \int\limits_0^\infty \overline{G}_x^{(2)}(s)\widetilde{\mathbf{C}}_{t+\varepsilon s}'(x)\widetilde{\mathbf{C}}_{t+\varepsilon s}\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}^t(x)\,ds,$$

$$\widetilde{\mathbf{C}}_{t+\varepsilon s}\varphi(u) = b_1^\varepsilon(t,s)C(u,x)\varphi'(u) + \frac{1}{2}a(t+\varepsilon s)b_1^\varepsilon(t,s)\sigma^2(u,x)\varphi''(u),$$

$$\widetilde{\mathbf{C}}_{t+\varepsilon s}'\varphi(u) = b_2^\varepsilon(t,s)C(u,x)\varphi'(u) + a(t+\varepsilon s)b_2^\varepsilon(t,s)\sigma^2(u,x)\varphi''(u).$$

Доведення. Для напівгрупи $\mathbf{C}^t_{t+\varepsilon s}(x),\ t \geq 0, x \in X$, справджується рівняння

$$d\mathbf{C}^t_{t+\varepsilon s}(x) = \varepsilon \mathbf{C}_{t+\varepsilon s}(x)\mathbf{C}^t_{t+\varepsilon s}\, ds.$$

Інтегруючи частинами, отримуємо

$$\mathbf{G}^\varepsilon_t(x) - I = \int\limits_0^\infty G_x(ds)\big[\mathbf{C}^t_{t+s}(x) - I\big] =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \mathbf{C}^t_{t+\varepsilon s} - I & dv = G_x(ds) \\ du = \varepsilon \mathbf{C}_{t+\varepsilon s}(x)\mathbf{C}^t_{t+\varepsilon s}(x)\, ds & v = -\overline{G}_x(s) \end{bmatrix} =$$

$$= -\overline{G}_x(s)\big[\mathbf{C}^t_{t+\varepsilon s}(s) - I\big]\ \Big|_0^\infty + \varepsilon \int\limits_0^\infty \overline{G}_x(s)\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}(x)\mathbf{C}^t_{t+s}(x)\, ds.$$

Враховуючи умову Крамера C_6, маємо

$$\mathbf{G}^\varepsilon_t(x) - I = \varepsilon \int\limits_0^\infty \overline{G}_x(s)\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}(x)\mathbf{C}^t_{t+\varepsilon s}(x)\, ds = \varepsilon \theta^\varepsilon_1(x).$$

Звідси отримуємо (6).

Для

$$\mathbf{G}^\varepsilon_{t,1}(x) = \int\limits_0^\infty \overline{G}_x(s)\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}(x)\mathbf{C}^t_{t+\varepsilon s}(x)\, ds$$

інтегруванням частинами одержуємо

$$\mathbf{G}^\varepsilon_{t,1}(s) = \int\limits_0^\infty \overline{G}_x(s)\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}(x)\mathbf{C}^t_{t+\varepsilon s}(x)\, ds =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \mathbf{C}_{t+\varepsilon s}(x)\mathbf{C}^t_{t+\varepsilon s}(x) & dv = \overline{G}_x(s) \\ du = (\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}(x)\mathbf{C}^t_{t+\varepsilon s}(x))' ds & v = -\overline{G}^{(2)}_x(s) \end{bmatrix} =$$

$$= -\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}(x)\mathbf{C}^t_{t+\varepsilon s}(x)\overline{G}^{(2)}_x(s)\ \Big|_0^\infty + \varepsilon \int\limits_0^\infty \big(\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}(x)\mathbf{C}^t_{t+\varepsilon s}(x)\big)'\, \overline{G}^{(2)}_x(s)\, ds =$$

$$= g(x)\mathbf{C}_t(x)I + \varepsilon^2 \int\limits_0^\infty \mathbf{C}'_{t+\varepsilon s}(x)\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}(x)\mathbf{C}^t_{t+\varepsilon s}(x)\overline{G}^{(2)}_x(s)\, ds =$$

$$= g(x)\mathbf{C}_t(x)I + \varepsilon^2 a^2(t)\theta^\varepsilon_2(x),$$

де $\overline{G}^{(2)}_x(t) = \int_t^\infty \overline{G}_x(s)\, ds.$

Лема 4. *Компенсуючий оператор* $\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)$ *на тест-функціях* $\phi^\varepsilon(u,x) = \phi(u) + \varepsilon\phi_1(u,x)$ *має асимптотичне зображення*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\phi^\varepsilon(u,x) = \mathbf{L}_t\phi(u) + \varepsilon\theta_t^\varepsilon(x)\phi(u),$$

де

$$\mathbf{L}_t\phi(u) = a(t)C(u)\phi'(u) + \frac{a^2(t)\sigma^2(u)}{2}\phi''(u),$$

$$\sigma^2(u) = \int\limits_X \sigma^2(u,x)\pi(dx),$$

$$\theta_t^\varepsilon(x)\phi(u) = q(x)\theta_1(x)\mathbf{P}\mathbf{R}_0\widetilde{\mathbf{L}}_t(x)\phi(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_2^\varepsilon(x)\phi(u),$$

$$\widetilde{\mathbf{L}}_t(x) = \mathbf{C}_t(x) - \mathbf{L}_t.$$

Доведення. Виконаємо обчислення

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\left[\phi(u) + \varepsilon\phi_1(u,x)\right] =$$
$$= \left[\varepsilon^{-1}\mathbf{Q} + \mathbf{C}_t(x)\mathbf{P} + \varepsilon a^2(t)\theta_2^\varepsilon(x)\mathbf{P}\right]\phi(u) +$$
$$+ \varepsilon\left[\varepsilon^{-1}\mathbf{Q} + q(x)\theta_1^\varepsilon(x)\mathbf{P}\right]\phi_1(u,x) =$$
$$= \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\phi(u) + \mathbf{C}_t(x)\phi(u) + \mathbf{Q}\phi_1(u,x) +$$
$$+ \varepsilon q(x)\theta_1^\varepsilon(x)\mathbf{P}\phi_1(u,x) + \varepsilon a^2(t)\theta_2^\varepsilon(x)\mathbf{P}\phi(u).$$

З того, що $\phi(u)$ належить N_Q, випливає

$$\mathbf{C}_t(x)\phi(u) + \mathbf{Q}\phi_1(u,x) = \mathbf{L}_t\phi(u).$$

Отже, має місце зображення

$$\mathbf{Q}\phi_1(u,x) = (\mathbf{C}_t(x) - \mathbf{L}_t)\phi(u) = \widetilde{\mathbf{L}}_t(x)\phi(u),$$

де

$$\widetilde{\mathbf{L}}_t(x) = \mathbf{C}_t(x) - \mathbf{L}_t.$$

Таким чином,

$$\phi_1(u,x) = \mathbf{R}_0\widetilde{\mathbf{L}}_t(x)\phi(u).$$

Остаточно отримуємо

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\phi^\varepsilon(u,x) = \mathbf{L}_t\phi(u) + \varepsilon\theta_t^\varepsilon(x)\phi(u),$$

де

$$\theta_t^\varepsilon(x) = q(x)\theta_1(x)\mathbf{P}\mathbf{R}_0\widetilde{\mathbf{L}}_t(x) + a^2(t)\theta_2^\varepsilon(x).$$

Розглянемо функцію Ляпунова $V(u)$ для усередненої системи

$$\frac{du}{dt} = C(u).$$

Як наслідок з попередньої леми випливає таке твердження.

Лема 5. *Для збуреної функції Ляпунова* $V^\varepsilon(u,x) = V(u) + \varepsilon V_1(u,x)$ *має місце зображення*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x) V^\varepsilon(u,x) = \mathbf{L}_t V(u) + \varepsilon \theta_t^\varepsilon(x) V(u).$$

***Доведення теореми* 1.** З умов C_4, C_5, C_7 та C_8 маємо

$$\left|\theta_t^\varepsilon(x) V(u)\right| \leq A_3(1 + V(u)) < \infty.$$

Далі, враховуючи умови $\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_3$, отримуємо оцінку

$$\mathbf{L}_t V(u) \leq -c_0 a(t) V(u) + a^2(t) c (1 + V(u)).$$

Остання оцінка дає можливість застосувати модельну теорему Королюка [16] та теорему Невельсона – Хасьмінського [21] і отримати

$$\mathrm{P}\left(\lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon(t) = u^\star\right) = 1.$$

4. Висновки. Отриманий у цій статті результат дає можливість встановити асимптотичні властивості задачі керування у схемі усереднення з напівмарковськими перемиканнями [22].

Література

1. *Anisimov V. V.* Limit theorems for switching processes and their applications // Cybernetics. – 1978. – **14**, № 6. – P. 917 – 929.
2. *Anisimov V. V.* Limit theorems for switching processes // Theory Probab. and Math. Statist. – 1988. – **37**. – P. 1 – 5.
3. *Anisimov V. V.* Switching processes: averaging principle, diffusion approximation and applications // Acta Appl. Math. – 1995. – **40**. – P. 95 – 141.
4. *Anisimov V. V.* Averaging methods for transient regimes in overloading retrial queuing systems // Math. and Comput. Modelling. – 1999. – **30**, № 3-4. – P. 65 – 78.
5. *Anisimov V. V.* Switching processes in queueing models. – Wiley and Sons, 2008.
6. *Blankenship G., Papanicolaou G.* Stability and control of stochastic systems with wide band noise disturbances // SIAM J. Appl. Math. – 1978. – **34**. – P. 437 – 476.
7. *Chabanyuk Y. M.* Continuous procedure of stochastic approximation in a semi-Markov medium // Ukr. Math. J. – 2004. – **56**, № 5. – P. 862 – 872.
8. *Chabanyuk Y. M.* Continuous stochastic approximation with semi-Markov switchings in the diffusion approximation scheme // Cybernet. and Systems Anal. – 2007. – **43**. – P. 605 – 612.
9. *Chabanyuk Y. M.* Convergence of a jump procedure in a semi-Markov environment in diffusion-approximation scheme // Cybernet. and Systems Anal. – 2007. – **43**. – P. 866 – 875.
10. *Chabanyuk Y. M.* Stability of a dynamical system with semi-Markov switchings under conditions of diffusion approximation // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 11. – P. 1441 – 1452.
11. *Korolyuk V. S.* Stability of stochastic systems in the diffusion-approximation scheme // Ukr. Math. J. – 1998. – **50**, № 1. – P. 40 – 54.
12. *Korolyuk V. S.* Problem of large deviations for Markov random evolutions with independent increments in the scheme of asymptotically small // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, № 5. – P. 739 – 747.
13. *Korolyuk V. S., Chabanyuk Y. M.* Stability of a dynamical system with semi-Markov switchings under conditions of stability of the averaged system // Ukr. Math. J. – 2002. – **54**, № 2. – P. 239 – 252.
14. *Korolyuk V. S., Korolyuk V. V.* Stochastic models of systems. – Dordrecht: Kluwer, 1999.
15. *Korolyuk V. S., Korolyuk V. V., Limnios N.* Queueing systems with semi-Markov flow in average and diffusion approximation schemes // Methodol. and Comput. Appl. Probab. – 2009. – **11**. – P. 201 – 209.
16. *Korolyuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – Singapore: World Sci., 2005.

17. *Korolyuk V. S., Limnios N., Samoilenko I. V.* Poisson aproximation of recurent process with locally independent increments and semi-Markov switching — toward application in reliability // Adv. Degrad. Modeling. – 2010. – P. 105 – 116.
18. *Korolyuk V. S., Limnios N., Samoilenko I. V.* Poisson aproximation of recurent process with semi-Markov switching // Stochast. Anal. and Appl. – 2011. – **29**. – P. 769 – 778.
19. *Korolyuk V. S., Swishchuk A. V.* Random evolutions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.
20. *Kushner H. J.* Optimality conditions for the average cost per unit time problem with a diffusion model // SIAM Control J. and Optim. – 1978. – **16**, № 2. – P. 330 – 346.
21. *Nevelson M. B., Hasminskii R. Z.* Stochastic approximation and recursive estimation // Transl. Math. Monogr. – Amer. Math. Soc., 1976.
22. *Nikitin A. V., Khimka U. T.* Asymptotics of normalized control with Markov switchings // Ukr. Math. J. – 2017. – **68**, № 8. – P. 1252 – 1262.
23. *Skorokhod A. V.* Asymptotic methods in the theory of stochastic differential equations. – Amer. Math. Soc., 1989.
24. *Stroock D. W., Varadhan S. R. S.* Multidimensional diffusion processes. – Berlin: Springer-Verlag, 1979.
25. *Sviridenko M. N.* Martingale approach to limit theorems for semi-Markov processes // Theor. Probab. and Appl. – 1986. – P. 40 – 545.

Одержано 09.11.17