УДК 519.21

А. А. Дороговцев, О. Л. Изюмцева (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Н. Салхи (Ун-т Туниса Эль-Манар)

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КЛАРКА ДЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ ВРЕМЕН САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯ ГАУССОВСКИХ ИНТЕГРАТОРОВ

We prove the existence of a multiple local time of self-intersection for a class of Gaussian integrators generated by operators with finite-dimensional kernel, describe its Itô – Wiener expansion and establish the Clark representation.

Доведено існування кратного локального часу самоперетину для класу гауссових інтеграторів, породжених операторами зі скінченною розмірністю ядра. Знайдено його розклад Іто – Вінера та зображення Кларка.

1. Введение. Пусть $w(t),\ t \in [0;1]$, — одномерный винеровский процесс. Следующее представление Кларка описывает структуру функционалов от w в терминах интеграла Ито.

Теорема 1 [1]. *Интегрируемая с квадратом случайная величина* α, *измеримая относительно* w, *может быть представлена следующим образом*:

$$\alpha = M\alpha + \int_0^1 \eta(s)dw(s),$$

причем это представление единственно.

Здесь процесс η согласован с фильтрацией, порожденной w, и удовлетворяет соотношению

$$M\int_0^1 \eta(s)^2 ds = D\alpha.$$

Дальнейшее развитие этого утверждения происходит в двух направлениях. Первое заключается в том, чтобы найти точную форму процесса η для некоторых специальных функционалов α от w. Примером таких функционалов является локальное время для винеровского процесса в точке $u \in \mathbb{R}$ [2], которое формально определяется интегралом

$$\int_0^1 \delta_u(w(s))ds.$$

Как было упомянуто в работе [3], представление Кларка для локального времени винеровского процесса имеет вид

$$\int_0^1 \delta_u(w(s))ds = \int_0^1 p_r(u)dr+$$

$$+\int_0^1 \left(\int_r^1 p'_{s-r}(w(r)-u)ds\right) dw(r).$$

Здесь p_t — плотность нормального распределения со средним нуль и дисперсией t. Если α имеет стохастическую производную [4], то для процесса η имеет место представление Кларка – Оконе [5]. Интересен случай, когда случайная величина α не является стохастически дифференцируемой.

Второе направление заключается в получении представления Кларка для более широкого класса процессов.

Настоящая статья посвящена двум вышеупомянутым задачам. Вместо винеровского процесса рассматриваются гауссовские интеграторы [6]. Свойства гауссовского интегратора позволяют построить по нему интеграл Скорохода [4]. Поэтому вполне актуальным является вопрос о представлении Кларка с интегралом Скорохода. В статье [3] представление Кларка с интегралом Скорохода было получено для локального времени гауссовского интегратора. В настоящей статье мы найдем представление Кларка для локального времени самопересечения одномерного гауссовского интегратора.

Опишем кратко построение статьи.

В пункте 2 доказано существование локального времени самопересечения для одномерного гауссовского интегратора, порожденного непрерывным линейным оператором с конечной размерностью ядра.

В пункте 3 найдено разложение Ито – Винера для локального времени самопересечения гауссовского интегратора.

Пункт 4 посвящен представлению Кларка для локального времени самопересечения гауссовского интегратора.

2. Существование локального времени самопересечения для гауссовских интеграторов. В настоящем пункте мы обсуждаем существование локального времени самопересечения для одномерных гауссовских интеграторов. Используя представление гауссовского процесса с помощью белого шума в пространстве $L_2([0;1])$, каждому гауссовскому интегратору можно поставить в соответствие линейный непрерывный оператор в пространстве $L_2([0;1])$. Следовательно, все свойства функционалов от гауссовского интегратора могут быть описаны в терминах свойств соответствующего линейного непрерывного оператора. Для этого нам понадобится понятие белого шума в гильбертовом пространстве H.

Определение 1 [4]. *Линейное соответствие $\xi\colon H \to L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ такое, что*

$$H \ni h \longrightarrow (h, \xi) \sim N(0, \|h\|^2),$$

называется белым шумом в гильбертовом пространстве H.

В ключе исследования локального времени самопересечения для гауссовских интеграторов для нас важен следующий пример белого шума. Пусть $H = L_2([0;1])$ и $w(t),\ t \in [0;1]$, — одномерный винеровский процесс. Для каждой $h \in L_2([0;1])$ определим

$$(h, \xi) = \int\limits_0^1 h(t)dw(t).$$

Используя свойства стохастического интеграла, нетрудно убедиться, что ξ — белый шум в пространстве $L_2([0;1])$.

Определение 2 [6]. *Центрированный гауссовский процесс* $x(t),\ t \in [0;1],\ x(0) = 0,$ *для которого существует константа* $c > 0$ *такая, что для произвольного разбиения* $0 = t_0 < < t_1 < \ldots < t_n = 1$ *и действительных чисел* $a_0, \ldots, a_{n-1}$ *выполняется соотношение*

$$M\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x(t_{k+1}) - x(t_k))\right)^2 \leq c\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 \Delta t_k, \tag{1}$$

называется гауссовским интегратором.

Соотношение (1) позволяет для каждой интегрируемой с квадратом функции на отрезке $[0;1]$ определить стохастический интеграл по гауссовскому интегратору. Сумма

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x(t_{k+1}) - x(t_k))$$

может быть рассмотрена как интеграл

$$\int_0^1 f(t)dx(t)$$

от ступенчатой функции

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\ \mathbf{1}_{[t_k;t_{k+1})}$$

по процессу x. Из (1) следует, что

$$\left\|\int_0^1 f(t)dx(t)\right\|^2_{L_2(\Omega,\mathcal{F},P)} \leq c\|f\|^2_{L_2([0;1])}.$$

Поэтому отображение

$$f\ \mapsto\ \int_0^1 f(t)dx(t)$$

может быть продолжено до линейного непрерывного оператора на всем пространстве $L_2([0;1])$. Результат этого продолжения называется интегралом по процессу x.

Следующая лемма описывает структуру интеграторов.

Лемма 1 [6]. *Центрированный гауссовский процесс* $x(t),\ t \in [0;1],$ *является интегратором тогда и только тогда, когда существуют белый шум* ξ *в пространстве* $L_2([0;1])$ *и линейный непрерывный оператор* A *в* $L_2([0;1])$ *такие, что*

$$x(t) = (A\mathbf{1}_{[0;t]}, \xi), \quad t \in [0;1]. \tag{2}$$

Из (2) следует, что все свойства гауссовского интегратора могут быть описаны в терминах оператора A. Примерами интеграторов являются винеровский процесс, броуновский мост, фрактальное броуновское движение с параметром Херста $\alpha \geq \frac{1}{2}$ [16].

Основная цель данного пункта — найти условия на оператор A в представлении (2), гарантирующие существование локального времени самопересечения.

Напомним определение локального времени самопересечения для одномерного случайного процесса $x(t),\ t \in [0;1]$. Для $0 \le a < b$ обозначим

$$\Delta_k(a,b) = \{a \le t_1 \le \ldots \le t_k \le b\}.$$

Положим $\Delta_k(0,1) =: \Delta_k$. Рассмотрим семейство приближений

$$T^x_{\varepsilon,k} = \int\limits_{\Delta_k} \prod_{i=1}^{k-1} p_\varepsilon(x(t_{i+1}) - x(t_i))d\vec{t}.$$

Как и ранее,

$$p_\varepsilon(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{z^2}{2\varepsilon}}.$$

Определение 3. *Для $p \in \mathbb{N}$ случайная величина*

$$T^x_k = L_p - \lim_{\varepsilon \to 0} T^x_{\varepsilon,k}$$

называется локальным временем самопересечения кратности k для процесса x при условии, что такой предел существует.

Рассмотрим гауссовский интегратор

$$x(t) = (A\mathbf{1}_{[0;t]}, \xi),\ t \in [0;1], \tag{3}$$

где A — линейный непрерывный оператор в пространстве $L_2([0;1])$, а ξ — белый шум в этом же пространстве. Пусть $\tilde{A}$ — сужение оператора A на $(\ker A)^\perp$. Основным утверждением настоящего пункта является следующая теорема о существовании локального времени самопересечения для одномерного гауссовского интегратора.

Теорема 2. *Предположим, что непрерывный линейный оператор A в пространстве $L_2([0;1])$ удовлетворяет следующим условиям*:

1) $\dim \ker A < +\infty$;

2) *оператор $\tilde{A}$ является непрерывно обратимым.*

Тогда для гауссовского интегратора (3), *порожденного оператором A, произвольного $p \in \in \mathbb{N}$ и $k \ge 2$ существует локальное время самопересечений*

$$T^x_k = L_p - \lim_{\varepsilon \to 0} T^x_{\varepsilon,k}.$$

Доказательство. Убедимся, что $M\,(T^x_{\varepsilon_1,k} - T^x_{\varepsilon_2,k})^{2p} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Заметим, что

$$M\,(T^x_{\varepsilon_1,k} - T^x_{\varepsilon_2,k})^{2p} =$$

$$= \sum_{l=0}^{2p} (-1)^{2p-l} C^l_{2p}\, M\,(T^x_{\varepsilon_1,k})^l (T^x_{\varepsilon_2,k})^{2p-l}.$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить существование конечного предела $M\,(T^x_{\varepsilon_1,k})^l (T^x_{\varepsilon_2,k})^{2p-l}$ при $\varepsilon \to 0$. Вначале рассмотрим случай $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Покажем, что существует конечный предел $M\,(T^x_{\varepsilon,k})^{2p}$ при $\varepsilon \to 0$. Пусть $G(e_1,\ldots,e_n)$ — определитель Грама, построенный по элементам $e_1,\ldots,e_n$, а $B(e_1,\ldots,e_n)$ — соответствующая матрица Грама. Заметим, что $B(A1_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,A1_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]})$ — матрица коварации гауссовского вектора $\vec{x}(\vec{t})$. Положим $\Delta_k^{2p}=\Delta_k\ldots\Delta_k$, где произведение содержит $2p$ множителей. Заметим, что

$$M\,(T^x_{\varepsilon,k})^{2p} = M\left(\int\limits_{\Delta_k}\prod_{i=1}^{k-1}p_\varepsilon(x(t_{i+1})-x(t_i)d\vec{t}\right)^{2p} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_k^{2p}} M\prod_{i=1}^{k-1}p_\varepsilon(x(t^1_{i+1})-x(t^1_i))\ldots\prod_{i=1}^{k-1}p_\varepsilon(x(t^{2p}_{i+1})-x(t^{2p}_i))d\vec{t}. \tag{4}$$

Обозначим

$$\vec{x}(\vec{t}) = (x(t_2^1)-x(t_1^1),\ldots,x(t_k^{2p})-x(t_{k-1}^{2p})),$$

$$p_\varepsilon^{2p(k-1)}(y) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{p(k-1)}}e^{-\frac{\|y\|^2}{2\varepsilon}}, \quad y\in\mathbb{R}^{2p(k-1)}.$$

Тогда (4) примет вид

$$\int\limits_{\Delta_k^{2p}} Mp_\varepsilon^{2p(k-1)}(\vec{x}(\vec{t}))d\vec{t} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_k^{2p}}\int\limits_{\mathbb{R}^{2p(k-1)}} \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{p(k-1)}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon}Iy,y)}\frac{1}{(2\pi)^{p(k-1)}\sqrt{G(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]})}}\times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]})y,y)}dyd\vec{t} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_k^{2p}}\int\limits_{\mathbb{R}^{2p(k-1)}} \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{p(k-1)}}\frac{1}{(2\pi)^{p(k-1)}\sqrt{G(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]})}}\times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}((\frac{1}{\varepsilon}I+B^{-1}(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]}))y,y)}dyd\vec{t} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_k^{2p}}\int\limits_{\mathbb{R}^{2p(k-1)}} \frac{1}{(2\pi)^{p(k-1)}\varepsilon^{p(k-1)}\sqrt{G(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]})}}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\det\left(\dfrac{1}{\varepsilon}I+B^{-1}(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]})\right)}}\times$$

$$\times\frac{1}{(2\pi)^{p(k-1)}\sqrt{\det\left(\dfrac{1}{\varepsilon}I+B^{-1}(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]})\right)^{-1}}}\times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}((\frac{1}{\varepsilon}I+B^{-1}(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]}))y,y)}dyd\vec{t}=$$

$$=\int\limits_{\Delta_k^{2p}}\frac{1}{(2\pi)^{p(k-1)}\varepsilon^{p(k-1)}\sqrt{G(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]})}}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\det\left(\dfrac{1}{\varepsilon}I+B^{-1}(A1_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,A1_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]})\right)}}d\vec{t}.$$

Можно убедиться, что

$$\int\limits_{\Delta_k^{2p}}\frac{1}{(2\pi)^{p(k-1)}\varepsilon^{p(k-1)}\sqrt{G(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]})}}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\det\left(\dfrac{1}{\varepsilon}I+B^{-1}(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]})\right)}}d\vec{t}=\int\limits_{\Delta_k^{2p}}\frac{1}{(2\pi)^{p(k-1)}}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^{2p(k-1)}+\varepsilon^{2p(k-1)-1}\sum_{i=1}^{2p}\|A\mathbf{1}_{[t_{k-1}^i;t_k^i]}\|^2+\ldots+G(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]})}}d\vec{t}.$$

Для простоты вычислений докажем это для случая $p=1,\ k=2$. Заметим, что

$$\det\left(\frac{1}{\varepsilon}I+B^{-1}(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},A\mathbf{1}_{[t_1^2;t_2^2]})\right)=$$

$$=\frac{1}{G(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},A\mathbf{1}_{[t_1^2;t_2^2]})}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{2}\frac{\|A\mathbf{1}_{[t_1^i;t_2^i]}\|^2}{G(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},A\mathbf{1}_{[t_1^2;t_2^2]})}+\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon\sqrt{G(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},A\mathbf{1}_{[t_1^2;t_2^2]})}\sqrt{\det\left(\dfrac{1}{\varepsilon}I+B^{-1}(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},A\mathbf{1}_{[t_1^2;t_2^2]})\right)}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\|A\mathbf{1}_{[t_1^i;t_2^i]}\|^2+G(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},A\mathbf{1}_{[t_1^2;t_2^2]})}}.$$

Для того чтобы применить теорему Лебега о мажорируемой сходимости, убедимся, что интеграл

$$\int\limits_{\Delta_k^{2p}}\frac{1}{\sqrt{G\big(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]}\big)}}\,d\vec{t}\tag{5}$$

сходится. Обозначим через P проектор на $\ker A$. Тогда (5) примет вид

$$\int\limits_{\Delta_k^{2p}} \frac{1}{\sqrt{G(\tilde{A}(I-P)\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,\tilde{A}(I-P)\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]})}}\,d\vec{t}. \tag{6}$$

Чтобы убедиться, что интеграл (6) сходится, нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 3 [9]**.** *Пусть оператор A является непрерывно обратимым оператором в гильбертовом пространстве H. Тогда для любых элементов $e_1,\ldots,e_n$ пространства H выполняется следующее соотношение*:

$$G(Ae_1,\ldots,Ae_n) \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|^{2n}} G(e_1,\ldots,e_n).$$

Из теоремы 3 следует, что (6) меньше или равно

$$\frac{1}{\|\tilde{A}^{-1}\|^{2p}} \int\limits_{\Delta_k^{2p}} \frac{1}{\sqrt{G((I-P)\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,(I-P)\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]})}}d\vec{t}. \tag{7}$$

Чтобы оценить подынтегральное выражение в (7), приведем следующую лемму.

Лемма 2 [11]**.** *Пусть L — конечномерное подпространство пространства $L_2([0;1])$, P_L — проектор на L, $e_1,\ldots,e_m$ — ортонормированный базис в L. Тогда для произвольных $g_1,\ldots,g_k \in L_2([0;1])$ выполняется следующее соотношение*:

$$G((I-P_L)g_1,\ldots,(I-P_L)g_k) = G(g_1,\ldots,g_k,e_1,\ldots,e_m).$$

Утверждение леммы 2 — это обобщение принципа Кавальери.

Пусть $q_1,\ldots,q_m$ — ортонормированный базис в $\ker A$. Тогда из леммы 2 следует, что определитель Грама в (7) допускает представление

$$G((I-P)\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,(I-P)\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]}) = G(\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]},q_1,\ldots,q_m).$$

Опишем множество

$$\{\vec{t}\in\Delta_k^{2p}:\ G(\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]},q_1,\ldots,q_m)=0\}.$$

Заметим, что

$$G(\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]},q_1,\ldots,q_m)=0$$

тогда и только тогда, когда существуют такие $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}$, что $\alpha_1^2+\ldots+\alpha_{k-1}^2>0$, и $\beta_1,\ldots,\beta_m$, удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{j=1}^{2p}\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i^j\mathbf{1}_{[t_i^j;t_{i+1}^j]} = \sum_{j=1}^{m}\beta_j q_j. \tag{8}$$

Следовательно, если $G(\mathbf{1}_{[t_1^1;t_1^1]},\ldots,\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]},q_1,\ldots,q_m)=0$, то ступенчатые функции принадлежат $\ker A$. Пусть L — подпространство, порожденное ступенчатыми функциями в $\ker A$, $\{f_k,\ k=\overline{1,s}\}$ — ортонормированный базис в L. Пусть $e_1,\ldots,e_n$ — ортонормированный базис в ортогональном дополнении L в $\ker A$. Заметим, что $f_1, \ldots, f_s, e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в $\ker A$ и для $\beta_1, \ldots, \beta_n$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \perp L.$$

Покажем, что

$$\int\limits_{\Delta_k^{2p}} \frac{d\vec{t}}{\sqrt{G(\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]}, \ldots, \mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]}, f_1, \ldots, f_s, e_1, \ldots, e_n)}} < +\infty. \tag{9}$$

Для доказательства (9) необходимы следующие утверждения.

Лемма 3 [11]. *Существует положительная константа c, зависящая от $f_1, \ldots, f_s$ и $e_1, \ldots, e_n$, такая, что для любых $t_1, \ldots, t_k \in \Delta_k$*

$$G(\mathbf{1}_{[t_1;t_2]}, \ldots, \mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]}, f_1, \ldots, f_s, e_1, \ldots, e_n) \geq cG(\mathbf{1}_{[t_1;t_2]}, \ldots, \mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]}, f_1, \ldots, f_s).$$

Лемма 4 [11]. *Пусть $0 < s_1 < \ldots < s_N < 1$ — точки скачков функций $f_1, \ldots, f_s$. Тогда существует положительная константа $c_{\vec{s}}$, зависящая от вектора $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_N)$, такая, что*

$$G(\mathbf{1}_{[t_1;t_2]}, \ldots, \mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]}, f_1, \ldots, f_s) \geq$$
$$\geq c_{\vec{s}}\, G(\mathbf{1}_{[t_1;t_2]}, \ldots, \mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]}, \mathbf{1}_{[0;s_1]}, \mathbf{1}_{[s_1;s_2]}, \ldots, \mathbf{1}_{[s_{N-1};s_N]}, \mathbf{1}_{[s_N;1]}). \tag{10}$$

Из лемм 3 и 4 следует, что для завершения доказательства теоремы 2 необходимо убедиться, что

$$\int\limits_{\Delta_k^{2p}} \frac{d\vec{t}}{\sqrt{G(\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]}, \ldots, \mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]}, \mathbf{1}_{[0;s_1]}, \mathbf{1}_{[s_1;s_2]}, \ldots, \mathbf{1}_{[s_{N-1};s_N]}, \mathbf{1}_{[s_N;1]})}} < +\infty.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\Delta_k^{2p}} \frac{d\vec{t}}{\sqrt{G(\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]}, \ldots, \mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]}, \mathbf{1}_{[0;s_1]}, \mathbf{1}_{[s_1;s_2]}, \ldots, \mathbf{1}_{[s_{N-1};s_N]}, \mathbf{1}_{[s_N;1]})}} =$$

$$= \tilde{c}_{\vec{s}} \int\limits_{\Delta_k^{2p}} \frac{d\vec{t}}{\sqrt{G\left(\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]}, \ldots, \mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]}, \frac{\mathbf{1}_{[0;s_1]}}{\sqrt{s_1}}, \frac{\mathbf{1}_{[s_1;s_2]}}{\sqrt{s_2 - s_1}}, \ldots, \frac{\mathbf{1}_{[s_{N-1};s_N]}}{\sqrt{s_N - s_{N-1}}}, \frac{\mathbf{1}_{[s_N;1]}}{\sqrt{1 - s_N}}\right)}} =$$

$$= \tilde{c}_{\vec{s}} \int\limits_{\Delta_k^{2p}} \frac{d\vec{t}}{\sqrt{G((I - \tilde{P})\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]}, \ldots, (I - \tilde{P})\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]})}}, \tag{11}$$

где $\tilde{P}$ — проектор на линейную оболочку, порожденную элементами $\{\mathbf{1}_{[0;s_1]}, \ldots, \mathbf{1}_{[s_N;1]}\}$. Если интеграл (11) сходится, то ему можно придать следующий вид:

$$\int\limits_{\Delta_k^{2p}} \frac{d\vec{t}}{\sqrt{G((I - \tilde{P})\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]}, \ldots, (I - \tilde{P})\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]})}} =$$

$$= (2\pi)^{k-1} \lim_{\varepsilon\to 0} \ M \left(\int\limits_{\Delta_k} \prod_{i=1}^{k} p_\varepsilon(y(t_{i+1}) - y(t_i)) d\vec{t} \right)^{2p} =$$

$$= (2\pi)^{k-1} \ M \left(\int\limits_{\Delta_k} \prod_{i=1}^{k} \delta_0(y(t_{i+1}) - y(t_i)) d\vec{t} \right)^{2p},$$

где

$$y(t) = ((I - \tilde{P})\mathbf{1}_{[0;t]}, \xi) \stackrel{\text{df}}{=}$$

$$\stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} w_1(t) - \dfrac{t}{s_1} w_1(s_1), & t \in [0; s_1], \\ w_2(t - s_1) - \dfrac{t - s_1}{s_2 - s_1} w_2(s_2 - s_1), & t \in [s_1; s_2], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ w_{N+1}(t - s_N) - \dfrac{t - s_N}{1 - s_N} w_{N+1}(1 - s_N), & t \in [s_N; 1]. \end{cases} \tag{12}$$

Здесь $w_1, \ldots, w_N$ — независимые винеровские процессы. Используя представление (12) для (11), нетрудно заметить, что достаточно проверить существование

$$L_p - \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Delta_k} \prod_{i=1}^{k-1} p_\varepsilon(\eta(t_{i+1}) - \eta(t_i)) d\vec{t} =:$$

$$=: \int\limits_{\Delta_k} \prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(\eta(t_{i+1}) - \eta(t_i)) d\vec{t},$$

где $\eta(t) = w(t) - tw(1),\ t \in [0; 1]$, — броуновский мост. Интеграл (11) в случае броуновского моста имеет вид

$$\int\limits_{\Delta_k^{2p}} \frac{d\vec{t}}{\sqrt{G((I - P_{\mathbf{1}_{[0;1]}})\mathbf{1}_{[t_1^1; t_2^1]}, \ldots, (I - P_{\mathbf{1}_{[0;1]}})\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p}; t_k^{2p}]})}}, \tag{13}$$

где $P_{\mathbf{1}_{[0;1]}}$ — проектор на линейное подпространство, порожденное $\mathbf{1}_{[0;1]}$. Из леммы 2 следует, что (13) равно

$$\int\limits_{\Delta_k^{2p}} \frac{d\vec{t}}{\sqrt{G(\mathbf{1}_{[t_1^1; t_2^1]}, \ldots, \mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p}; t_k^{2p}]}, \mathbf{1}_{[0;1]})}}. \tag{14}$$

Убедимся, что интеграл (14) сходится. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5 [10]. *Пусть* $\Delta_0 = \varnothing$ *и* $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ — *подмножества отрезка* $[0; 1]$. *Тогда*

$$G(\mathbf{1}_{\Delta_1}, \ldots, \mathbf{1}_{\Delta_n}) \geq \prod_{k=1}^{n} \left| \Delta_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} \Delta_j \right|.$$

Следствием леммы 5 является оценка на определитель Грама

$$G(\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]},\mathbf{1}_{[0;1]}) \geq \prod_{j=1}^{N}|\widetilde{\Delta}_j|,$$

где $\widetilde{\Delta}_j,\ j=1,\ldots,N,$ — разбиение отрезка $[0;1]$ точками $t_1^1,t_2^1,\ldots,t_{k-1}^{2p},t_k^{2p}$. Следовательно,

$$\int\limits_{\Delta_k^{2p}} \frac{d\vec{t}}{\sqrt{G(\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]},\ldots,\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]},\mathbf{1}_{[0;1]})}} \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Delta_{2pk}} \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=0}^{2pk}(t_{i+1}-t_i)}}d\vec{t},$$

где $t_0=0,\ t_{2pk+1}=1$. Интегрируя по t_1 и t_{2pk}, получаем оценку

$$\int\limits_{\Delta_{2pk}} \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=0}^{2pk}(t_{i+1}-t_i))}}d\vec{t} \leq$$

$$\leq c\int\limits_{\Delta_{2pk-2}} \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2pk-3}(t_{i+1}-t_i)}}d\vec{t}, \quad c>0.$$

Чтобы вычислить $\int_{\Delta_{2pk-2}} \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2pk-3}(t_{i+1}-t_i)}}d\vec{t}$, нужна следующая лемма.

Лемма 6. *Для произвольного целого $k\geq 1$ и вещественных чисел $0\leq a<b$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Delta_k(a,b)} \frac{d\vec{t}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)}} = \frac{\pi^{\frac{k-1}{2}}(b-a)^{\frac{k+1}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{k+3}{2}\right)}. \tag{15}$$

Доказательство. Обозначим

$$H_k(t)=\int\limits_{\Delta_k(a,t)} \frac{dt_1\ldots dt_k}{\sqrt{(t-t_k)\prod_{i=1}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)}},$$

$$I_k(t)=\int\limits_{\Delta_k(a,t)} \frac{dt_1\ldots dt_k}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)}}, \quad t>a.$$

Нетрудно заметить, что

$$I_{k+1}(t)=\int\limits_a^t H_k(u)du \tag{16}$$

и

$$H_{k+1}(t) = \int\limits_a^t \frac{H_k(u)}{\sqrt{t-u}} du = \sqrt{t-a} \int\limits_0^1 \frac{H_k(a+(t-a)\theta)}{\sqrt{1-\theta}} d\theta. \tag{17}$$

Кроме того,

$$H_2(t) = 2(t-a) B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Из (17) следует, что

$$H_k(t) = (t-a)^{\frac{k}{2}} \prod_{r=2}^{k+1} B\left(\frac{r}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{(t-a)^{\frac{k}{2}} \pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}.$$

Используя (16) и интегрируя функцию H_{k-1} от a до b, получаем (15).

Из леммы 6 следует, что

$$\int\limits_{\Delta_{2pk-2}} \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2pk-3}(t_{i+1}-t_i)}} d\vec{t} = \frac{\pi^{\frac{2pk-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)}.$$

Заметим, что в случае $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ для произвольного $y \in \mathbb{R}$

$$p_{\varepsilon_1}(y) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} p_{\varepsilon_2}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} y\right).$$

Тогда

$$MT^x_{\varepsilon_1,2} T^x_{\varepsilon_2,2} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_2^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} M p_{\varepsilon_2}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}(x(t_2^1) - x(t_1^1))\right) p_{\varepsilon_2}(x(t_2^2) - x(t_1^2)) d\vec{t} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_2^2} \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\|A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]}\|^2 + \varepsilon_2\|A\mathbf{1}_{[t_1^2;t_2^2]}\|^2 + G(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]}, A\mathbf{1}_{[t_1^2;t_2^2]})}} d\vec{t}.$$

Аналогично, для $l = \overline{1, 2p-1}$

$$M(T^x_{\varepsilon_1,k})^l T^x_{\varepsilon_2,k})^{2p-l} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_k^{2p}} \frac{1}{(2\pi)^{p(k-1)}} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1^{l(k-1)} \varepsilon_2^{(2p-l)(k-1)} + \ldots + G(A\mathbf{1}_{[t_1^1;t_2^1]}, \ldots, A\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{2p};t_k^{2p}]})}} d\vec{t}.$$

Далее, используя аргументы, аналогичные случаю $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, можно убедиться в существовании конечного предела

$$M(T^x_{\varepsilon_1,k})^l T^x_{\varepsilon_2,k})^{2p-l}$$

при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$.

Заметим, что винеровский процесс $w(t),\ t \in [0;1]$, — это гауссовский интегратор, порожденный тождественным оператором. Тогда из теоремы 2 и леммы 6 следует, что

$$M \int\limits_{\Delta_k} \prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(w(t_{i+1}) - w(t_i)) d\vec{t} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}} \int\limits_{\Delta_k} \frac{1}{\sqrt{G(\mathbf{1}_{[t_1;t_2]}, \ldots, \mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]})}} d\vec{t} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}} \int\limits_{\Delta_k} \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k-1}(t_{i+1} - t_i)}} d\vec{t} =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(\dfrac{k+3}{2}\right)}.$$

Более того, из теоремы 2 следует, что для произвольного $p \in \mathbb{N}$ существует положительная константа $c(k)$, зависящая от k, такая, что

$$M(T^x_k)^{2p} \le c(k) M(T^y_k)^{2p},$$

где процесс y определен в (12).

3. Разложение Ито – Винера для локальных времен самопересечения гауссовских интеграторов. Пусть ξ — белый шум в пространстве $L_2([0;1])$, порожденный винеровским процессом $w(t),\ t \in [0;1]$. Рассмотрим одномерный гауссовский интегратор $x(t) = (A 1_{[0;t]}, \xi)$, $t \in [0;1]$, с оператором A, который удовлетворяет условиям 1, 2 теоремы 2. Тогда для процесса x существует локальное время самопересечения T^x_k. Цель настоящего пункта — найти разложение Ито – Винера случайной величины T^x_k. Основным инструментом для нахождения разложения Ито – Винера является преобразование Фурье – Винера. Начнем с определений разложения Ито – Винера и преобразования Фурье – Винера. Пусть α — интегрируемая с квадратом случайная величина, измеримая относительно белого шума ξ.

Теорема 4 (разложение Ито – Винера)[13]**.** *Случайная величина α единственным образом может быть представлена в виде сходящегося в среднем квадратическом ряда из ортогональных слагаемых*

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\Delta_k} a_k(t_1, \ldots, t_k) dw(t_1) \ldots dw(t_k),$$

где

$$a_0 = M\alpha,$$

$$\int\limits_{\Delta_k} a_k^2(t_1, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k < +\infty, \quad k \geq 1.$$

Более того,

$$M\alpha^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\Delta_k} a_k^2(t_1, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k.$$

Иногда для разложения Ито – Винера случайной величины α удобно использовать общее обозначение [13]

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\xi, \ldots, \xi),$$

где симметричные формы Гильберта – Шмидта A_k на $L_2([0;1])^{\otimes k}$ имеют вид

$$A_k(\xi, \ldots, \xi) = \int\limits_{\Delta_k} a_k(t_1, \ldots, t_k) dw(t_1) \ldots dw(t_k).$$

Определение 4 [13]. *Стохастической производной случайной величины α называется интегрируемый с квадратом случайный элемент $D\alpha$ в $L_2([0;1])$ такой, что для каждого $h \in \in L_2([0;1])$*

$$(D\alpha, h) = \sum_{k=0}^{\infty} k A_k(h, \xi, \ldots, \xi).$$

Лемма 7 [13]. *Случайная величина α имеет стохастическую производную тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot k! \|A_k\|_k^2 < +\infty.$$

Интеграл Скорохода I может быть определен как сопряженный оператор $I = D^*$, действующий из пространства интегрируемых с квадратом $L_2([0;1])$-значных случайных элементов в пространство интегрируемых с квадратом случайных величин. В терминах разложения Ито – Винера интеграл Скорохода может быть определен следующим образом. Пусть случайная величина α в H представлена в виде ряда

$$(\alpha, h) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(h, \xi, \ldots, \xi), \quad h \in L_2([0;1]).$$

Можно убедиться, что полилинейная форма A_k принадлежит $L_2([0;1])^{\otimes k+1}$, $k \geq 0$. Обозначим через ΛA_k ее симметризацию.

Определение 5 [13]. *Случайная величина*

$$I(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda A_k(\xi, \ldots, \xi)$$

называется интегралом Скорохода случайной величины α.

Для исследования интегрируемых с квадратом случайных величин, измеримых относительно белого шума ξ, будем использовать преобразование Фурье – Винера.

Определение 6 [12]. *Функционал*

$$\mathcal{T}(\alpha)(h) = M\alpha \exp\left\{(h,\xi) - \frac{1}{2}\|h\|^2\right\}$$

называется преобразованием Фурье – Винера случайной величины α.

Можно убедиться, что разложение Ито – Винера для $\exp\left\{(h,\xi) - \frac{1}{2}\|h\|^2\right\}$ имеет вид

$$\exp\left\{(h,\xi) - \frac{1}{2}\|h\|^2\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\Delta_n} h(t_1)\ldots h(t_n)dw(t_1)\ldots dw(t_n).$$

Тогда для случайной величины

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\Delta_n} a_n(t_1,\ldots,t_n)dw(t_1)\ldots dw(t_n)$$

разложение Тейлора ее преобразования Фурье – Винера имеет вид

$$\mathcal{T}(\alpha)(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\Delta_n} a_n(t_1,\ldots,t_n)h(t_1)\ldots h(t_n)dt_1\ldots dt_n. \tag{18}$$

Таким образом, разложение Тейлора (18) преобразования Фурье – Винера случайной величины α единственным образом определяет ядра $\{a_n,\ n \geq 0\}$ ее разложения Ито – Винера [7, 8]. В этом пункте будем использовать ранее введенные обозначения для определителя Грама $G(e_1,\ldots,e_n)$, построенного по элементам $e_1,\ldots,e_n$, и матрицы Грама $B(e_1,\ldots,e_n)$. Пусть $P_{t_1\ldots t_k}$ — проектор на линейное подпространство, порожденное элементами $A\mathbf{1}_{[t_1;t_2]},\ldots$ $\ldots, A\mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]}$. Можно проверить, что [7, 8] для каждого $h \in L_2([0;1])$ выполняется соотношение

$$\mathcal{T}(T_k^x)(h) = \int\limits_{\Delta_k} \frac{e^{-\frac{1}{2}\|P_{t_1\ldots t_k}h\|^2}}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{G(A\mathbf{1}_{[t_1;t_2]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]})}}d\vec{t} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}} \int\limits_{\Delta_k} \frac{\|P_{t_1\ldots t_k}h\|^{2n}}{\sqrt{G(A\mathbf{1}_{[t_1;t_2]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]})}}d\vec{t}. \tag{19}$$

В [8] было доказано, что для $h \in L_2([0;1])$

$$P_{t_1\ldots t_k}h = \frac{1}{G(A\mathbf{1}_{[t_1;t_2]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]})} \sum_{i,j=1}^{k-1} (-1)^{i+j} M_{ij}(A\mathbf{1}_{[t_i;t_{i+1}]},h)\mathbf{1}_{[t_j;t_{j+1}]},$$

где M_{ij} — минор матрицы

$$B(A\mathbf{1}_{[t_1;t_2]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]}),$$

соответствующий i-й строке и j-му столбцу. Тогда

$$\|P_{t_1\ldots t_k}h\|^{2n} =$$

$$= \frac{1}{G(A\mathbf{1}_{[t_1;t_2]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]})^{2n}}\times$$

$$\times\sum_{i_1^1,j_1^1,i_2^1,j_2^1,\ldots,i_1^n,j_1^n,i_2^n,j_2^n=1}^{k-1}\prod_{l=1}^{n}(-1)^{i_1^l+j_1^l+i_2^l+j_2^l}M_{i_1^lj_1^l}M_{i_2^lj_2^l}(\mathbf{1}_{[t_{j_1^l};t_{j_1^l+1}]},\mathbf{1}_{[t_{j_2^l};t_{j_2^l+1}]})\times$$

$$\times(A\mathbf{1}_{[t_{i_1^l};t_{i_1^l+1}]},h)(A\mathbf{1}_{[t_{i_2^l};t_{i_2^l+1}]},h)=$$

$$= \frac{1}{G(A\mathbf{1}_{[t_1;t_2]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]})^{2n}}\times$$

$$\times\sum_{i_1^1,j_1^1,i_2^1,j_2^1,\ldots,i_1^n,j_1^n,i_2^n,j_2^n=1}^{k-1}\prod_{l=1}^{n}(-1)^{i_1^l+j_1^l+i_2^l+j_2^l}M_{i_1^lj_1^l}M_{i_2^lj_2^l}(\mathbf{1}_{[t_{j_1^l};t_{j_1^l+1}]},\mathbf{1}_{[t_{j_2^l};t_{j_2^l+1}]})\times$$

$$\times\int_0^1\int_0^1 A\mathbf{1}_{[t_{i_1^l};t_{i_1^l+1}]}(s_1^l)A\mathbf{1}_{[t_{i_2^l};t_{i_2^l+1}]}(s_2^l)h^{\otimes 2}(\vec{s^l})d\vec{s^l}. \tag{20}$$

Здесь мы использовали обозначение $h^{\otimes n}(\vec{s})$ для $h(s_1)\ldots h(s_n)$. Из (20) следует, что (19) равно

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\Delta_{2n}}\frac{(-1)^n}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}}\int\limits_{\Delta_k}\frac{1}{G(A\mathbf{1}_{[t_1;t_2]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]})^{2n+\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\sum_{i_1^1,j_1^1,i_2^1,j_2^1,\ldots,i_1^n,j_1^n,i_2^n,j_2^n=1}^{k-1}\prod_{l=1}^{n}(-1)^{i_1^l+j_1^l+i_2^l+j_2^l}M_{i_1^lj_1^l}M_{i_2^lj_2^l}(\mathbf{1}_{[t_{j_1^l};t_{j_1^l+1}]},\mathbf{1}_{[t_{j_2^l};t_{j_2^l+1}]})\times$$

$$\times A\mathbf{1}_{[t_{i_1^l};t_{i_1^l+1}]}(s_1^l)A\mathbf{1}_{[t_{i_2^l};t_{i_2^l+1}]}(s_2^l)d\vec{t}\,h^{\otimes 2n}(\vec{s^l})d\vec{s^l}. \tag{21}$$

Из (21) следует, что ядра разложения Ито – Винера для $\mathcal{T}(T_k^x)(h)$ имеют вид

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}}\int\limits_{\Delta_k}\frac{1}{G(A\mathbf{1}_{[t_1;t_2]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]})^{2n+\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\sum_{i_1^1,j_1^1,i_2^1,j_2^1,\ldots,i_1^n,j_1^n,i_2^n,j_2^n=1}^{k-1}\prod_{l=1}^{n}(-1)^{i_1^l+j_1^l+i_2^l+j_2^l}M_{i_1^lj_1^l}M_{i_2^lj_2^l}(\mathbf{1}_{[t_{j_1^l};t_{j_1^l+1}]},\mathbf{1}_{[t_{j_2^l};t_{j_2^l+1}]})\times$$

$$\times A\mathbf{1}_{[t_{i_1^l};t_{i_1^l+1}]}(s_1^l)A\mathbf{1}_{[t_{i_2^l};t_{i_2^l+1}]}(s_2^l)d\vec{t}.$$

Рассмотрим некоторые примеры. Пусть A — оператор умножения на измеримую функцию ϕ. Предположим, что существуют константы $m,\ M>0$ такие, что для каждого $r\in[0;1]$

$$m\le\ |\phi(r)|\ \le\ M.$$

Это условие гарантирует непрерывную обратимость оператора A. Из теоремы 2 следует, что для гауссовского интегратора, порожденного оператором A, существует k-кратное локальное время самопересечения T_k^x. Найдем разложение Ито – Винера случайной величины T_k^x.

Лемма 8. *Разложение Ито – Винера для k-кратного локального времени самопересечения гауссовского интегратора x, соответствующего оператору умножения на функцию ϕ, имеет вид*

$$T_k^x = MT_k^x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}} \int\limits_{\Delta_{2n}} \phi^{\bigotimes 2n}(\vec{s})\, b_{2n}(\vec{s}) dw(s_1)\ldots dw(s_{2n}), \tag{22}$$

где MT_k^x и b_{2n} определяются следующим образом:

$$MT_k^x = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}} \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\vec{t}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi^2(r)dr}} \tag{23}$$

и

$$b_{2n}(\vec{s}) = \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\vec{t}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi^2(r)dr}} \sum_{1\le i_1,\ldots,i_n\le k-1} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} \int_{t_{i_j}}^{t_{i_j+1}} \phi^2(r)dr} \mathbf{1}_{[t_{i_1};t_{i_1+1}]^2\ldots[t_{i_n};t_{i_n+1}]^2}(\vec{s}). \tag{24}$$

Доказательство. Для доказательства леммы нам понадобится связь преобразования Фурье – Винера с разложением Ито – Винера. Как было упомянуто ранее, достаточно найти разложение Тейлора преобразования Фурье – Винера локального времени самопересечения. Можно убедиться, что

$$\|P_{t_1\ldots t_k} h\|^2 = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi(r)h(r)dr\right)^2}{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi^2(r)dr}$$

и

$$G\big(A\mathbf{1}_{[t_1;t_2]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]}\big) = \prod_{i=1}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \phi^2(r)dr.$$

Тогда (19) принимает вид

$$\frac{(-1)^n}{2^n n!(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}} \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\vec{t}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi^2(r)dr}} \sum_{1\le i_1,\ldots,i_n\le k-1} \prod_{j=1}^{n} \frac{\left(\int_{t_{i_j}}^{t_{i_j+1}} \phi(r)h(r)dr\right)^2}{\int_{t_{i_j}}^{t_{i_j+1}} \phi^2(r)dr} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}} \int\limits_{\Delta_k} \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi^2(r)dr}} \times$$

$$\times\left(\sum_{1\le i_1,\ldots,i_n\le k-1}\int\limits_{[0;1]^{2n}} h^{\otimes 2n}(\vec{s})\phi^{\otimes 2n}(\vec{s})\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}\int_{t_{i_j}}^{t_{i_j+1}}\phi^2(r)dr}\mathbf{1}_{[t_{i_1};t_{i_1+1}]^2\ldots[t_{i_n};t_{i_n+1}]^2}(\vec{s})d\vec{s}\right)d\vec{t}.$$

Рассмотрим случай броуновского движения, положив ϕ равной тождественной единице в предыдущем примере. С учетом (22) – (24) можно убедиться, что

$$T_k^w = MT_k^w + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}}\int_{\Delta_{2n}} b_{2n}(\vec{s})dw(s_1)\ldots dw(s_{2n}),$$

где ядра b_{2n} определяются так:

$$b_{2n}(\vec{s}) = \int\limits_{\Delta_k}\frac{d\vec{t}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)}}\sum_{1\le i_1,\ldots,i_n\le k-1}\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(t_{i_j+1}-t_{i_j})}\mathbf{1}_{[t_{i_1};t_{i_1+1}]^2\ldots[t_{i_n};t_{i_n+1}]^2}(\vec{s}),$$

$$MT_k^w = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}}\int\limits_{\Delta_k}\frac{d\vec{t}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)}}. \tag{25}$$

Квадрат нормы локального времени самопересечения винеровского процесса имеет вид

$$M(T_k^w)^2 = \left(MT_k^w\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n!)^2}{(n!)^2 2^{2n}(2\pi)^{k-1}}\int\limits_{\Delta_{2n}} b_{2n}^2(\vec{s})d\vec{s}. \tag{26}$$

Применяя лемму 6, можно заключить следующее.

Утверждение 1. *Квадрат нормы локального времени самопересечения винеровского процесса имеет вид*

$$M(T_k^w)^2 = \frac{1}{2^{k-1}\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)^2}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!^2 2^{2n}(2\pi)^{k-1}}\int\limits_{\Delta_k^2}\frac{d\vec{t}\,d\vec{t'}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)(t'_{i+1}-t'_i)}}\left[\sum_{1\le i,j\le k-1}\frac{\lambda\left([t_i;t_{i+1}]\cap[t'_j;t'_{j+1}]\right)^2}{(t_{i+1}-t_i)\left(t'_{j+1}-t'_j\right)}\right]^n. \tag{27}$$

Здесь λ — мера Лебега.

Доказательство. Заметим, что

$$\int\limits_{\Delta_{2n}} b_{2n}^2(\vec{s})d\vec{s} = \frac{1}{2n\,!}\int\limits_{\Delta_k^2}\frac{d\vec{t}\,d\vec{t'}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)(t'_{i+1}-t'_i)}}\times$$

$$\times \sum_{\substack{1\le i_1,\ldots,i_n\le k-1\\ 1\le j_1,\ldots,j_n\le k-1}} \int\limits_{[0;1]^{2n}} \frac{1}{(t_{i_1+1}-t_{i_1})\ldots(t'_{j_n+1}-t'_{j_n})}\times$$

$$\times \mathbf{1}_{[t_{i_1};t_{i_1+1}]^2}(s_1,s_2)\mathbf{1}_{[t'_{j_1};t'_{j_1+1}]^2}(s_1,s_2)\ldots\mathbf{1}_{[t_{i_n};t_{i_n+1}]^2}(s_{2n-1},s_{2n})\mathbf{1}_{[t'_{j_n};t'_{j_n+1}]^2}(s_{2n-1},s_{2n})d\vec{s}=$$

$$=\frac{1}{2n\,!}\int\limits_{\Delta_k\times\Delta_k}\frac{d\vec{t}\,d\vec{t'}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)(t'_{i+1}-t'_i)}}\times$$

$$\times \sum_{\substack{1\le i_1,\ldots,i_n\le k-1\\ 1\le j_1,\ldots,j_n\le k-1}} \prod_{r=1}^{n} \frac{\lambda\left([t_{i_r};t_{i_r+1}]\cap[t'_{i_r};t'_{i_r+1}]\right)^2}{(t_{i_r+1}-t_{i_r})\,(t'_{j_r+1}-t'_{j_r})}=$$

$$=\frac{1}{2n\,!}\int\limits_{\Delta_k\times\Delta_k}\frac{d\vec{t}\,d\vec{t'}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)(t'_{i+1}-t'_i)}}\left[\sum_{1\le i,j\le k-1}\frac{\lambda\left([t_i;t_{i+1}]\cap[t'_j;t'_{j+1}]\right)^2}{(t_{i+1}-t_i)\,(t'_{j+1}-t'_j)}\right]^n,$$

что завершает доказательство утверждения.

Оценим скорость сходимости ряда (26) в случае двукратного локального времени самопересечения. Для этого нам понадобится утверждение, доказанное в [14].

Лемма 9 [14]. *Существует константа $c>0$ такая, что для все натуральных $n\ge 2$*

$$\int\limits_{\Delta_2^2}\frac{1}{\sqrt{(t_2-t_1)(t'_2-t'_1)}}\left[\frac{\lambda\left([t_1;t_2]\cap[t'_1;t'_2]\right)^2}{(t_2-t_1)\,(t'_2-t'_1)}\right]^n d\vec{t}\,d\vec{t'}\le\frac{c}{n^2}. \tag{28}$$

Из формулы Стирлинга следует, что

$$\frac{(2n)!}{(n!2^n)^2}\le\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{29}$$

Лемма 9 влечет равенство

$$\frac{(2n)!}{n!^2 2^{2n}2\pi}\int\limits_{\Delta_2^2}\frac{1}{\sqrt{(t_2-t_1)(t'_2-t'_1)}}\left[\frac{\lambda\left([t_1;t_2]\cap[t'_1;t'_2]\right)^2}{(t_2-t_1)\,(t'_2-t'_1)}\right]^n d\vec{t}\,d\vec{t'}\le\frac{c}{n^{\frac{5}{2}}},\quad c>0. \tag{30}$$

Из (30) следует, что ряд

$$\sum_{n\ge1}n\frac{(2n)!}{n!^2 2^{2n}2\pi}\int\limits_{\Delta_2^2}\frac{1}{\sqrt{(t_2-t_1)(t'_2-t'_1)}}\left[\frac{\lambda\left([t_1;t_2]\cap[t'_1;t'_2]\right)^2}{(t_2-t_1)\,(t'_2-t'_1)}\right]^n d\vec{t}\,d\vec{t'}$$

сходится. Это означает, что локальное время самопересечения T_2^w стохастически дифференцируемо [15].

4. Представление Кларка для локальных времен самопересечения гауссовских интеграторов. Рассмотрим одномерный гауссовский интегратор $x(t)=(A1_{[0;t]},\xi),\ t\in[0;1]$. Пусть оператор A удовлетворяет условиям теоремы 2. Цель настоящего пункта — получить представление Кларка для

$$T_k^x = \int\limits_{\Delta_k} \prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(x(t_{i+1}) - x(t_i)) d\vec{t}.$$

Для этого рассмотрим

$$\prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(x(t_{i+1}) - x(t_i))$$

как обобщенный функционал белого шума ξ. Начнем с определения обобщенного гауссовского функционала [8, 18, 19]. Как и ранее, считаем, что ξ — белый шум в пространстве $L_2([0;1])$. Пусть σ-алгебра случайных событий $\mathcal{F}$ порождена белым шумом ξ. Для $F \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ обозначим через $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ ее разложение Ито – Винера. Определим пространство Соболева порядка $\alpha \in \mathbb{R}$ гауссовских функционалов. Рассмотрим пространство

$$\mathcal{P} = \left\{ F \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) \colon\ F = \sum_{n=0}^{N} I_n(f_n), \quad N \geq 1 \right\}$$

случайных величин с конечным разложением Ито – Винера и нормой

$$\|F\|_{2,\alpha}^2 = \sum_{n=0}^{N} (1+n)^{\alpha} \|I_n(f_n)\|_2. \tag{31}$$

Определение 7 [17]. *Пополнение $\mathcal{P}$ по норме $\|\cdot\|_{2,\alpha}$ называется пространством Соболева $D_{2,\alpha}$ порядка α.*

Из определения следует, что $D_{2,\alpha_1} \supset D_{2,\alpha_2}$ для $\alpha_1 < \alpha_2$. Положим

$$D^{\infty} := \bigcap_{\alpha > 0} D_{2,\alpha},$$

$$D^{-\infty} := \bigcup_{\alpha > 0} D_{2,-\alpha}.$$

Обозначим через $D^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ пространство случайных векторов с координатами из D^{∞}. Поскольку $D_{2,0} = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, то для $\alpha \geq 0$ элементы пространства $D_{2,\alpha}$ — „классические" гауссовские функционалы. В случае $\alpha < 0$ элементы $D_{2,\alpha}$, вообще говоря, не могут рассматриваться как случайные величины.

Определение 8 [17]. *Элементы пространства $D_{2,-\alpha}$, $\alpha > 0$, называются обобщенными функционалами белого шума* (*обобщенными гауссовскими функционалами*) [17].

Примеры обобщенных гауссовских функционалов могут быть получены как результат действия распределений Шварца на элементы $D_{2,\alpha}$, $\alpha > 0$. Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца быстро убывающих C^{∞}-функций на $\mathbb{R}^d$. Для $k \in \mathbb{Z}$ положим

$$\|\varphi\|_{2k} = \|(1 + |x|^2 - \Delta)^k \varphi\|_{\infty}\,, \tag{32}$$

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$, где $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)^2$. Предположим, что $\mathcal{G}_{2k}$ — пополнение пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ по норме (32). Известно, что

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \ldots \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}^0 = \widehat{C}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{G}_{-2} \subset \ldots \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),$$

где $\widehat{C}(\mathbb{R}^d)$ — банахово пространство всех непрерывных на $\mathbb{R}^d$ функций, убывающих к нулю на бесконечности, снабженное супремум-нормой, а $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца распределений на $\mathbb{R}^d$ [17]. Для $F \in D^\infty(\mathbb{R}^d)$ обозначим через $\sigma := ((DF_i, DF_j))_{ij=i}^d$ матрицу Грама, построенную по элементам $DF_1, \ldots, DF_d$. Здесь D — стохастическая производная [15]. Предположим, что: 1) $\det\sigma > 0$, 2) $[\det\sigma]^{-1} \in \bigcap_{1<p<\infty} L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 5 [17]. *Для каждого $p \in (1, +\infty)$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$ существует положительная константа $c = c_{p,k}$ такая, что для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ выполняется соотношение*

$$\|\varphi(F)\|_{p,-2k} \leq c\|\varphi\|_{-2k}.$$

Заметим, что для $k_0 \geq 1$ и $\varphi \in \mathcal{G}_{-2k_0}$ существует $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ такая, что $\varphi_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{G}_{-2k_0}} \varphi$ при $\varepsilon \to 0$. Из теоремы 5 следует, что

$$\|\varphi_{\varepsilon_1}(F) - \varphi_{\varepsilon_2}(F)\|_{p,-2k_0} \leq c_{p,k}\|\varphi_{\varepsilon_1} - \varphi_{\varepsilon_2}\|_{-2k_0} \to 0$$

при $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \to 0$. Следовательно, $\{\varphi_\varepsilon(F)\}_{\varepsilon>0}$ является фундаментальной в $D_{2,-2k_0}$, т. е. существует предел $\varphi_\varepsilon(F)$ при $\varepsilon \to 0$ в $D_{2,-2k_0}$.

Определение 9. *Значение обобщенной функции φ на F определяется следующим образом*:

$$\varphi(F) := \lim_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon(F).$$

При условии теоремы 5 обобщенный функционал $\varphi(F)$ имеет формальное разложение Ито – Винера. Элементы этого разложения получаются как пределы соответствующих слагаемых в разложении Ито – Винера для $\varphi_\varepsilon(F)$. В частности, естественно определить математическое ожидание $M\varphi(F)$ как предел $M\varphi_\varepsilon(F)$. Следовательно,

$$M\delta_0(w(t) - w(s)) = \lim_{\varepsilon\to 0} Mf_\varepsilon(w(t) - w(s)) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t-s}} e^{-\frac{y^2}{2(t-s)}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t-s}}.$$

Найдем разложение Ито – Винера для

$$\prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(x(t_{i+1}) - x(t_i)).$$

Пусть $G(A\mathbf{1}_{[t_1;t_2]}, \ldots, A\mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]}) \neq 0$, тогда из теоремы 5 следует, что

$$\prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(x(t_{i+1}) - x(t_i))$$

— обобщенный функционал от ξ. Его преобразование Фурье – Винера получается так:

$$\mathcal{T}\left(\prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(x(t_{i+1}) - x(t_i))\right)(h) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{T}\left(\prod_{i=1}^{k-1} f_\varepsilon(x(t_{i+1}) - x(t_i))\right)(h) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} E \int_{\Delta_k} \prod_{i=1}^{k-1} f_\varepsilon(x(t_{i+1}) - x(t_i)) d\vec{t}\, \mathcal{E}(h) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} E \int_{\Delta_k} \prod_{i=1}^{k-1} f_\varepsilon((A\mathbf{1}_{[t_i;t_{i+1}]}, \xi) + (A\mathbf{1}_{[t_i;t_{i+1}]}, h)) d\vec{t}, \tag{33}$$

где

$$\mathcal{E}(h) = e^{(h,\xi) - \frac{1}{2}\|h\|^2}.$$

Можно убедиться [8], что (33) равно

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}\|P_{t_1\ldots t_k} h\|^2}}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{G(A\mathbf{1}_{[t_1;t_2]}, \ldots, A\mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]})}},$$

где $P_{t_1\ldots t_k}$ — проектор на линейное подпространство, порожденное $A\mathbf{1}_{[t_1;t_2]}, \ldots, A\mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]}$. Для винеровского процесса $A = I$. Следовательно,

$$\mathcal{T}\left(\prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(w(t_{i+1}) - w(t_i))\right)(h) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{T}\left(\prod_{i=1}^{k-1} f_\varepsilon(w(t_{i+1}) - w(t_i))\right)(h) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\|P_{t_1\ldots t_k} h\|^2}}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{G(\mathbf{1}_{[t_1;t_2]}, \ldots, \mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]})}},$$

где $P_{t_1\ldots t_k}$ — проектор на линейное подпространство, порожденное $\mathbf{1}_{[t_1;t_2]}, \ldots, \mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]}$. Поскольку индикаторы непересекающихся множеств являются ортогональными, то

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}\|P_{t_1\ldots t_k} h\|^2}}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{G(\mathbf{1}_{[t_1;t_2]}, \ldots, \mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]})}} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1} \|P_{t_i t_{i+1}} h\|^2}}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}} \prod_{i=1}^{k-1} \sqrt{t_{i+1} - t_i}} =$$

$$= \prod_{i=1}^{k-1} \frac{e^{-\frac{1}{2}\|P_{t_i t_{i+1}} h\|^2}}{\sqrt{(2\pi)}\sqrt{t_{i+1} - t_i}} =$$

$$= \prod_{i=1}^{k-1} \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{T}\Big(f_\varepsilon(w(t_{i+1}) - w(t_i))\Big)(h) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k-1} \mathcal{T}\Big(\delta_0(w(t_{i+1}) - w(t_i))\Big)(h).$$

Заметим, что

$$\mathcal{T}\left(\int\limits_{\Delta_k}\prod_{i=1}^{k-1}\delta_0(x(t_{i+1})-x(t_i))d\vec{t}\right)(h)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{T}\left(\int\limits_{\Delta_k}\prod_{i=1}^{k-1}f_\varepsilon(x(t_{i+1})-x(t_i))d\vec{t}\right)(h)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Delta_k}\mathcal{T}\left(\prod_{i=1}^{k-1}f_\varepsilon(x(t_{i+1})-x(t_i))\right)(h)d\vec{t}.$$

Поскольку

$$\mathcal{T}\left(\prod_{i=1}^{k-1}f_\varepsilon(x(t_{i+1})-x(t_i))\right)(h)=$$

$$=M\prod_{i=1}^{k-1}f_\varepsilon(x(t_{i+1})-x(t_i)+(A^*h,\mathbf{1}_{[t_i;t_{i+1}]}))\le$$

$$\le M\prod_{i=1}^{k-1}f_\varepsilon(x(t_{i+1})-x(t_i))\le$$

$$\le M\prod_{i=1}^{k-1}\delta_0(x(t_{i+1})-x(t_i))=$$

$$=\frac{1}{G(A\mathbf{1}_{[t_1;t_2]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]})}$$

и

$$\int\limits_{\Delta_k}\frac{1}{G(A\mathbf{1}_{[t_1;t_2]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1};t_k]})}d\vec{t}<+\infty,$$

то из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости следует, что

$$\mathcal{T}\left(\int\limits_{\Delta_k}\prod_{i=1}^{k-1}\delta_0(x(t_{i+1})-x(t_i))d\vec{t}\right)(h)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{T}\left(\int\limits_{\Delta_k}\prod_{i=1}^{k-1}f_\varepsilon(x(t_{i+1})-x(t_i))d\vec{t}\right)(h)=$$

$$=\int\limits_{\Delta_k}\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{T}\left(\prod_{i=1}^{k-1}f_\varepsilon(x(t_{i+1})-x(t_i))\right)(h)d\vec{t}=$$

$$= \int\limits_{\Delta_k} \mathcal{T}\left(\prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(x(t_{i+1}) - x(t_i))\right)(h)d\vec{t}.$$

Следующее утверждение описывает представлении Кларка для обобщенных функционалов. Пусть $0 < s < t < 1$.

Лемма 10. *Представление Кларка для* $\delta_0\big(w(t) - w(s)\big)$ *имеет вид*

$$\delta_0\big(w(t) - w(s)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} + \int\limits_s^t p'_{t-u}\big(w(u) - w(s)\big)dw(u). \tag{34}$$

Равенство в лемме означает, что преобразования Фурье – Винера левой и правой частей совпадают.

Доказательство. Пусть

$$\delta_0\big(w(t) - w(s)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} + \int\limits_s^t \eta(u)dw(u).$$

Преобразование Фурье – Винера $\delta_0\big(w(t) - w(s)\big)$ имеет вид [8]

$$\mathcal{T}\Big(\delta_0\big(w(t) - w(s)\big)\Big)(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{\left(\int_s^t h(r)dr\right)^2}{2(t-s)}\right\} =$$

$$= p_{t-s}\left(\int\limits_s^t h(r)dr\right), \quad h \in L_2([0;1]).$$

Из формулы Ньютона – Лейбница

$$p_t(u) - p_t(0) = \int\limits_0^u p'_t(v)dv$$

следует, что

$$\mathcal{T}\Big(\delta_0\big(w(t) - w(s)\big)\Big)(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} + \int\limits_s^t p'_{t-s}\left(\int\limits_s^\tau h(r)dr\right)h(\tau)d\tau. \tag{35}$$

Можно убедиться, что

$$\mathcal{T}\Big(\delta_0\big(w(t) - w(s)\big)\Big)(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} + \mathcal{T}\left\{\int\limits_s^t \eta(u)dw(u)\right\}(h) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} + \int\limits_s^t \mathcal{T}\left\{\eta(u)\right\}(h)h(u)du. \tag{36}$$

Из (35) и (36) следует, что

$$\mathcal{T}\left\{\eta(u)\right\}(h) = p'_{t-s}\left(\int\limits_s^u h(r)dr\right).$$

Покажем, что

$$\mathcal{T}\left\{p'_{t-u}\big(w(u)-w(s)\big)\right\}(h) = p'_{t-s}\left(\int\limits_s^u h(r)dr\right).$$

Действительно,

$$\mathcal{T}\left(p'_{t-u}\big(w(u)-w(s)\big)\right)(h) = Mp'_{t-u}\left(w(u)-w(s)+\int\limits_s^u h(r)dr\right) =$$

$$= p'_{t-u} * p_{u-s}\left(\int\limits_s^u h(r)dr\right) = p'_{t-s}\left(\int\limits_s^u h(r)dr\right),$$

что завершает доказательство леммы.

Следствием леммы 10 является следующее утверждение.

Теорема 6. *Локальное время самопересечения для винеровского процесса имеет представление*

$$T_k^w = \frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)} + \int\limits_0^1 \beta(\tau)dw(\tau),$$

где

$$\beta(\tau) = \sum_{r=1}^{k-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le k-1}\int\limits_{\Delta_k}\frac{1}{\prod_{j\ne i_1,\ldots,i_r}\sqrt{2\pi(t_{j+1}-t_j)}}\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1 p'_{t_{i_r+1}-\tau}\big(w(\tau)-w(t_{i_r})\big)\times$$

$$\times\mathbf{1}_{[t_{i_r};t_{i_r+1}]}(\tau)\prod_{l=1}^{r-1}\left(p'_{t_{i_l+1}-\tau_l}\big(w(\tau_l)-w(t_{i_l})\big)\,\mathbf{1}_{[t_{i_l};t_{i_l+1}]}(\tau_l)\right)dw(\tau_1), dw(\tau_{r-1})d\vec{t},$$

$$\prod_{l=1}^{r-1}\left(p'_{t_{i_l+1}-\tau_l}\big(w(\tau_l)-w(t_{i_l})\big)\,\mathbf{1}_{[t_{i_l};t_{i_l+1}]}(\tau_l)\right) = 1$$

для $r=1$.

Доказательство. Из леммы 10 следует, что

$$T_k^w = \int\limits_{\Delta_k}\prod_{i=1}^{k-1}\delta_0(w(t_{i+1})-w(t_i))d\vec{t} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_k}\prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i+1}-t_i)}} + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} p'_{t_{i+1}-\tau}\big(w(\tau)-w(t_i)\big)dw(\tau)\right)d\vec{t} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}} \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\vec{t}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)}} +$$

$$+\sum_{r=1}^{k-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le k-1} \int\limits_{\Delta_k} \frac{1}{\prod_{j\ne i_1,\ldots,i_r}\sqrt{2\pi(t_{j+1}-t_j)}} \prod_{l=1}^{r} \int\limits_{t_{i_l}}^{t_{i_l+1}} p'_{t_{i+1}-\tau}\big(w(\tau)-w(t_i)\big)dw(\tau)d\vec{t} =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(\dfrac{k+3}{2}\right)} +$$

$$+\sum_{r=1}^{k-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le k-1} \int\limits_{\Delta_k} \frac{1}{\prod_{j\ne i_1,\ldots,i_r}\sqrt{2\pi(t_{j+1}-t_j)}} \prod_{l=1}^{r} \int\limits_{t_{i_l}}^{t_{i_l+1}} p'_{t_{i+1}-\tau}\big(w(\tau)-w(t_i)\big)dw(\tau)d\vec{t}.$$

Поскольку приращения винеровского процесса независимы, то

$$\prod_{l=1}^{r} \int\limits_{t_{i_l}}^{t_{i_l+1}} p'_{t_{i+1}-\tau}\big(w(\tau)-w(t_i)\big)dw(\tau) =$$

$$= \int\limits_{t_{i_r}}^{t_{i_r+1}} \ldots \int\limits_{t_{i_1}}^{t_{i_1+1}} \prod_{l=1}^{r} p'_{t_{i_l+1}-\tau_l}\big(w(\tau_l)-w(t_{i_l})\big)dw(\tau_1)\ldots dw(\tau_r) =$$

$$= \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \prod_{l=1}^{r} p'_{t_{i_l+1}-\tau_l}\big(w(\tau_l)-w(t_{i_l})\big)\, \mathbf{1}_{[t_{i_l};t_{i_l+1}]}(\tau_l)dw(\tau_1)\ldots dw(\tau_r).$$

Следовательно,

$$T_k^w = \frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(\dfrac{k+3}{2}\right)} + \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le k-1} \int\limits_{\Delta_k} \frac{1}{\prod_{j\ne i_1,\ldots,i_r}\sqrt{2\pi(t_{j+1}-t_j)}} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \prod_{l=1}^{r} p'_{t_{i_l+1}-\tau_l}\big(w(\tau_l)-w(t_{i_l})\big)\, \mathbf{1}_{[t_{i_l};t_{i_l+1}]}(u_l)dw(\tau_1)\ldots dw(\tau_r)d\vec{t} =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(\dfrac{k+3}{2}\right)} + \int\limits_0^1 \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le k-1} \int\limits_{\Delta_k} \frac{1}{\prod_{j\ne i_1,\ldots,i_r}\sqrt{2\pi(t_{j+1}-t_j)}} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 p'_{t_{i_r+1}-\tau}\big(w(\tau)-w(t_{i_r})\big)\, \mathbf{1}_{[t_{i_r};t_{i_r+1}]}(\tau) \prod_{l=1}^{r-1} p'_{t_{i_l+1}-\tau_l}\big(w(\tau_l)-w(t_{i_l})\big) \times$$

$$\times \mathbf{1}_{[t_{i_l};t_{i_l+1}]}(\tau_l)dw(\tau_1)\ldots dw(\tau_{r-1})d\vec{t}\,dw(\tau).$$

Найдем представление Кларка для локального времени самопересечения гауссовского интегратора. Для $\vec{t} = (t_1,\ldots,t_k) \in \Delta_k$, $t \in [0;1]$, обозначим через $p_{\vec{t}}$, $p_{\vec{t},t}$ плотности распределения векторов

$$X = \big(x(t_2) - x(t_1),\ldots,x(t_k) - x(t_{k-1})\big)$$

и

$$X(\vec{t},t) = \big(x(t_1 + t(t_2 - t_1)) - x(t_1),\ldots,x(t_{k-1} + t(t_k - t_{k-1})) - x(t_{k-1})\big).$$

Положим

$$B_{\vec{t},t} = B\Big(A\mathbf{1}_{[t_1;t_1+t(t_2-t_1)]},\ldots,A\mathbf{1}_{[t_{k-1};t_{k-1}+t(t_k-t_{k-1})]}\Big),$$

$$R_{\vec{t},t} = B_{\vec{t},1} - B_{\vec{t},t},$$

где, как и ранее, $B(e_1,\ldots,e_n)$ — матрица Грама, построенная по элементам $e_1,\ldots,e_n$. Обозначим $\Delta_k^0 = \{0 < t_1 < \ldots < t_k < 1\}$.

Теорема 7. *Пусть для $0 < t < 1$, $\vec{t} \in \Delta_k^0$ матрица $R_{\vec{t},t}$ является положительно определенной. Обозначим через $p_{R_{\vec{t},t}}$ плотность распределения $\mathcal{N}\big(0,R_{\vec{t},t}\big)$. Тогда*

$$T_k^x = M\,T_k^x + \int_0^1 \beta(\tau)dx(\tau),$$

где

$$\beta(\tau) = \int_{\Delta_k} \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{1}_{[t_j;t_{j+1}]}(\tau)\partial_j p_{R_{\vec{t},\tau}}\big(X(\vec{t},\tau)\big)d\vec{t},$$

а ∂_j — j-я частная производная.

Доказательство. Заметим, что

$$\mathcal{T}\big(T_k^x\big)(h) = \int_{\Delta_k} \mathcal{T}\left(\prod_{i=1}^{k-1}\delta_0(x(t_{i+1}) - x(t_i))\right)(h)\,d\vec{t} =$$

$$= \int_{\Delta_k} M\left\{\delta_0^{k-1}\Big(X + V\Big)\right\}\,d\vec{t},$$

где $\delta_0^{k-1}(y) = \delta_0(y_1)\ldots\delta_0(y_{k-1}),\ y \in \mathbb{R}^{k-1}$,

$$V = \left(\int_{t_1}^{t_2} A^*h(r)dr,\ldots,\int_{t_{k-1}}^{t_k} A^*h(r)dr\right).$$

Следовательно,

$$\mathcal{T}\big(T_k^x\big)(h) = \int_{\Delta_k} p_{\vec{t}}(V)\,d\vec{t}.$$

Выполняя замену переменных $r = t_j + \theta(t_{j+1} - t_j),\ j = 1, \ldots, k-1$, для V можно получить представление

$$V = \left((t_2 - t_1) \int\limits_0^1 (A^*h)\big(t_1 + \theta\big(t_2 - t_1\big)\big) d\theta, \ldots, \big(t_k - t_{k-1}\big) \int\limits_0^1 (A^*h)\big(t_{k-1} + \theta\big(t_k - t_{k-1}\big)\big) d\theta \right).$$

Положим

$$V(t) =$$

$$= \left(\big(t_2 - t_1\big) \int\limits_0^t (A^*h)\big(t_1 + \theta\big(t_2 - t_1\big)\big) d\theta, \ldots, \big(t_k - t_{k-1}\big) \int\limits_0^t (A^*h)\big(t_{k-1} + \theta\big(t_k - t_{k-1}\big)\big) d\theta \right).$$

Из формулы Ньютона – Лейбница следует, что

$$p_{\vec{t}}(V) = p_{\vec{t}}(V(0)) + \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^{k-1} \partial_j p_{\vec{t}}(V(t))\big(t_{j+1} - t_j\big)(A^*h)\Big(t_j + t\big(t_{j+1} - t_j\big)\Big)\, dt =$$

$$= p_{\vec{t}}(0) + \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^{k-1} \partial_j p_{\vec{t}}(V(t))\big(t_{j+1} - t_j\big)(A^*h)\Big(t_j + t\big(t_{j+1} - t_j\big)\Big)\, dt.$$

Следовательно,

$$\mathcal{T}\big(T_k^x\big)(h) = M\, T_k^x +$$

$$+ \int\limits_{\Delta_k} \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^{k-1} \partial_j p_{\vec{t}}(V(t))\big(t_{j+1} - t_j\big)(A^*h)\Big(t_j + t\big(t_{j+1} - t_j\big)\Big)\, dt\, d\vec{t}. \tag{37}$$

Заметим, что

$$\partial_j p_{\vec{t}}(V(t)) = \partial_j \big(p_{R_{\vec{t},t}} * p_{\vec{t},t}\big)(V(t)) =$$

$$= \big(\partial_j p_{R_{\vec{t},t}}\big) * p_{\vec{t},t}(V(t)) =$$

$$= M\big(\partial_j p_{R_{\vec{t},t}}\big)\Big(X_{\vec{t},t} + V(t)\Big) =$$

$$= \mathcal{T}\Big(\partial_j p_{R_{\vec{t},t}}\big(X_{\vec{t},t}\big)\Big)(h).$$

Выполняя замену переменных $s_j = t_j + t\big(t_{j+1} - t_j\big),\ j = 1, \ldots, k-1$, нетрудно заметить, что (37) равно

$$M\, T_k^x + \int\limits_{\Delta_k} \sum_{j=1}^{k-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \mathcal{T}\Big(\partial_j p_{R_{\vec{t},s_j}}\big(X(\vec{t}, s_j)\big)\Big)(h)(A^*h)(s_j)\, ds_j\, d\vec{t}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{T}\big(T_k^x\big)(h) = M\,T_k^x + \mathcal{T}\left(\sum_{j=1}^{k-1} \int\limits_{\Delta_k} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \partial_j p_{R_{\vec{t},s_j}}\big(X(\vec{t}, s_j)\big)\, dx(s_j)\, d\vec{t}\right)(h),$$

где интеграл по $dx(s_j)$ — это расширенный стохастический интеграл по гауссовскому интегратору x. Следовательно, представление Кларка для T_k^x имеет вид

$$T_k^x = M\,T_k^x + \int\limits_{\Delta_k} \sum_{j=1}^{k-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \partial_j p_{R_{\vec{t},s_j}}\big(X(\vec{t}, s_j)\big)\, dx(s_j)\, d\vec{t} =$$

$$= M\,T_k^x + \int\limits_0^1 \int\limits_{\Delta_k} \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{1}_{[t_j;t_{j+1}]}(\tau)\partial_j p_{R_{\vec{t},\tau}}\big(X(\vec{t}, \tau)\big)\, d\vec{t}\, dx(\tau).$$

Литература

1. *Clark J. M. C.* The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals // Ann. Math. Statist. – 1970. – **41**, № 4. – P. 1282 – 1295.
2. *Бородин А. Н.* Броуновское локальное время // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, № 2. – С. 7 – 48.
3. *Dorogovtsev A. A., Izyumtseva O. L., Riabov G. V., Salhi N.* Clark formula for local time for one class of Gaussian processes // Communs Stoch. Anal. – 2016. – **10**, № 2. – P. 239 – 255.
4. *Skorokhod A. V.* Selected works. – Springer, 2016.
5. *Ocone D.* Malliavin calculus and stochastic integral representation of diffusion processes // Stochastics. – 1984. – **12**. – P. 161 – 185.
6. *Dorogovtsev A. A.* Stochastic integration and one class of Gaussian random processes // Ukr. Math. J. – 1998. – **50**, № 4. – P. 495 – 505.
7. *Дороговцев А. А., Изюмцева О. Л.* Локальные времена самопересечения для гауссовских процессов. – Lap Lambert Acad. Publ., 2011.
8. *Дороговцев А. А., Изюмцева О. Л.* Локальные времена самопересечения // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 3. – С. 290 – 340.
9. *Izyumtseva O. L.* Moments estimates for local times of a class of Gaussian processes // Communs Stoch. Anal. – 2016. – **10**, № 1. – P. 97 – 116.
10. *Dorogovtsev A. A., Izyumtseva O. L.* Properties of Gaussian local time // Lith. Math. J. – 2015. – **55**, № 4. – P. 489 – 505.
11. *Dorogovtsev A. A., Izyumtseva O. L.* On self-intersection local times for generalized Brownian bridges and the distance between step functions // Theory Stoch. Process. – 2015. – **20(36)**, № 1. – P. 1 – 13.
12. *Саймон Б.* Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля. – М.: Мир, 1976.
13. *Dorogovtsev A. A.* Stochastic analysis and random maps in Hilbert space. – Utrecht: VSP, 1994.
14. *Imkeller P., Perez Abreu V., Vives J.* Chaos expansions of double intersection local time of Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ and renormalization // Stoch. Process and Appl. – 1995. – **56**. – P. 1 – 34.
15. *Watanabe S.* Stochastic differential equation and Malliavin calculus. – Springer-Verlag, 1984. – 112 p.
16. *Izyumtseva O. L.* On the local times for Gaussian integrators // Theory Stoch. Process. – 2014. – **19(35)**, № 1. – P. 11 – 25.
17. *Watanabe S.* Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and its applications to heat kernels // Ann. Probab. – 1987. – **15**, № 1. – P. 1 – 39.
18. *Dorogovtsev A. A.* Stochastic integration and one class of Gaussian processes // Ukr. Math. J. – 1998. – **50**, № 4. – P. 495 – 505.
19. *Dorogovtsev A. A.* Smoothing problem in anticipating scenario // Ukr. Math. J. – 2005. – **57**, № 9. – P. 1218 – 1234.

Получено 19.01.18