УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
Я. А. Прикарпатський (Ін-т математики НАН України, Київ; Ун-т сіл. госп-ва у Кракові, Польща),
Д. Блекмор (Технол. ін-т Нью-Джерсі, США),
А. К. Прикарпатський (Технол. ун-т ім. Т. Костюшка, Краків, Польща)

ТЕОРІЯ БАГАТОВИМІРНИХ ОПЕРАТОРІВ ТРАНСМУТАЦІЇ ДЕЛЬСАРТА – ЛІОНСА. I

We present a brief review of the original results obtained by the authors in the theory of Delsarte–Lions transmutations of multidimensional spectral differential operators based on the classical works by Yu. M. Berezansky, V. A. Marchenko, B. M. Levitan, and R. G. Newton, on the well-known L. D. Faddeev's survey, the book by L. P. Nyzhnyk, and the generalized De-Rham – Hodge theory suggested by I. V. Skrypnik and developed by the authors for the differential-operator complexes. The operator structure of Delsarte – Lions transformations and the properties of their Volterra factorizations are analyzed in detail. In particular, we study the differential-geometric and topological structures of the spectral properties of the Delsarte – Lions transmutations within the framework of the generalized De-Rham – Hodge theory.

У даній статті наведено короткий огляд оригінальних результатів авторів у теорії трансмутацій Дельсарта – Ліонса багатовимірних спектральних диференціальних операторів, що базується на класичних працях Ю. М. Березанського, В. А. Марченка, Б. М. Левітана та Р. Ньютона, на відомих у літературі огляді Л. Д. Фаддєєва, книзі Л. П. Нижника й узагальненій теорії де Рама – Ходжа, започаткованій І. В. Скрипником і розвиненій авторами для диференціально-операторних комплексів. Детально проаналізовано операторну структуру перетворень Дельсарта – Ліонса та властивості їхніх вольтеррових факторизацій. Зокрема, вивчено диференціально-геометричну і топологічну структуру спектральних властивостей операторів трансмутації Дельсарта – Ліонса в рамках узагальненої теорії де Рама – Ходжа.

1. Вступ. У цій статті викладено результати, отримані авторами [4, 60, 65, 66, 68] в теорії багатовимірних диференціальних операторів трансмутації та їх застосувань. Витоки цієї теорії беруть початок у класичних працях Ю. М. Березанського, В. А. Марченка, Б. М. Левітана та Р. Ньютона [2, 35, 44, 49], у відомому огляді Л. Д. Фаддєєва [23] та книзі Л. П. Нижника [52], в яких розвинено важливі спектральні аспекти автотрансмутованих диференціальних операторів, а також у відомих працях І. В. Скрипника [72 – 74], де запропоновано ефективні конструкції для обчислення груп когомології, пов'язаних з узагальненою теорією де Рама – Ходжа для диференціальних операторів. Сучасні аспекти теорії трансмутацій одновимірних диференціальних операторів та їх застосувань викладено в оглядових статтях [31, 69, 70] і працях [7, 9 – 13, 25, 36, 52, 57, 78].

Початки теорії трансмутації диференціальних операторів можна знайти у працях Дельсарта і Ліонса [16 – 18, 39, 40]; пізніше вона була розвинена в [6, 34 – 36, 44, 52, 57, 60, 65, 66, 68, 81]. Щодо сучасних застосувань до теорії солітонів див. [7, 9, 24, 49, 52, 57].

Найпростішою мотивацією до вивчення трансмутацій диференціальних операторів можуть бути лінійні унітарно-еквівалентні оператори $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ з областями визначення $D(A)$ і $D(B)$ відповідно і такі, що

$$UD(A) = D(B), \qquad UA = BU, \tag{1.1}$$

де $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — унітарний оператор в $\mathcal{H}$. Якщо A і B — обмежені лінійні оператори, то першою з умов (1.1), зазвичай, нехтують. Якщо ж додатково унітарний оператор $U = U(t)$ належить $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $t \in \mathbb{R}$, тобто залежить від еволюційного параметра $t \in \mathbb{R}$, і ця залежність є гладкою, а оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ є стаціонарним, то співвідношення (1.1) еквівалентне еволюційному операторному співвідношенню інфінітезимальної трансмутації

$$dB(t)/dt = S(t)B(t) - B(t)S(t) := \big[S(t), B(t)\big], \tag{1.2}$$

де, за визначенням, $B(t) := U(t)AU(t)^{-1}$, а так званий генератор еволюції

$$S(t) := dU(t)/dtU(t)^{-1}$$

є для всіх $t \in \mathbb{R}$ кососпряженим оператором в $\mathcal{H}$. Рівняння вигляду (1.2) є відомим у науковій літературі і має такі назви, як рівняння фон Ноймана [56], рівняння Гайзенберга [21], а також рівняння Лакса [1, 7, 24, 34, 45, 48, 51, 52, 57, 61]. У більш конкретному випадку Дельсарта – Ліонса [16 – 18] вважається, що оператор $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ є вольтерровим, а саме, якщо існує така пара різної полярності вольтеррових операторів $\Omega_{\pm} := (1 + K_{\pm}) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, що виконано умову факторизації $1 + \Phi = \Omega_+\Omega_-^{-1}$ для деякого обмеженого оператора Фредгольма $(1 + \Phi) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, який комутує з оператором $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, тобто $[A, \Phi] = 0$, то теж існує задана трансмутація операторів A і $B := \Omega_{\pm}A\Omega_{\pm}^{-1}$ у вигляді $A\Omega_{\pm} = \Omega_{\pm}B$. У цьому випадку, наприклад, для диференціального оператора Штурма – Ліувілля $B(t) := -d^2/dx^2 + u(x,t)$ з коефіцієнтом $u(.,t) \in W_2^{(3)}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ для всіх $x, t \in \mathbb{R}$ у гільбертовому просторі $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ відповідне інфінітезимальне співвідношення трансмутації задається рівнянням (1.2) з кососпряженим генератором еволюції

$$S(t) = -4d^3/dx^3 + 3u(x,t)d/dx + 3d/dxu(x,t), \tag{1.3}$$

причому сама функція $u(.,t) \in W_2^{(3)}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ задовольняє для всіх $t \in \mathbb{R}$ відоме у класичній математичній фізиці нелінійне рівняння Кортевега – де Вріза:

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} = 0. \tag{1.4}$$

Наявність співвідношення інфінітезимальної трансмутації (1.2) для нелінійних еволюційних рівнянь є підставою для використання відомого методу оберненої задачі розсіювання [1, 4, 7, 13, 45, 48, 52, 57, 61] для їхнього інтегрування. Існує також багато аналогічних прикладів для інфінітезимальних співвідношень трансмутації в просторово багатовимірних гільбертових просторах $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$, $n \geq 2$, $m \geq 1$. Так, у працях [4, 7, 13, 23, 30, 32, 43, 51 – 55, 57 – 59, 63, 64, 79] вивчались такі багатовимірні диференціальні оператори, як збурений тривимірний оператор Лапласа, двовимірний оператор Дірака, двовимірний оператор дифузії, n-вимірний оператор зв'язності для рівнянь Янга – Міллса тощо, для яких були побудовані явно як інфінітезимальні співвідношення трансмутації Дельсарта – Ліонса, так і їхні глобальні версії у формі спеціальних операторних перетворень Дарбу – Беклунда.

Як зауважено в [70], теорія операторів трансмутації має власну „останню теорему Ферма”: задачу побудови багатовимірних (переплітаючих) трансформацій для стаціонарних операторів Шредінгера і Лапласа. Є математики-оптимісти, які вважають, що цю задачу „частково” розв'язано, посилаючись на відомі праці Л. Д. Фаддєєва і Л. П. Нижника [23, 52]. Однак, як зазначено у [70], читаючи роботу [23], краще починати з кінця, де правдиво написано, що „ . . . *дослідження слід проводити з метою строгого забезпечення формальних аргументів роботи. Доступні ж на сьогодні підходи є надто громіздкими для розміщення в цьому огляді. Ми* *сподіваємось, що наведена нами формальна схема для розв'язання багатовимірної оберненої задачі розсіювання може служити стимулом для деяких читачів, котрі запропонують більш адекватний аналіз для її аргументованого утвердження*".

Доступні версії цих результатів занадто громіздкі для розміщення в цьому огляді. Ми сподіваємось, що викладене вище є формальною схемою для розв'язання багатовимірної оберненої задачі розсіювання, яке може бути стимулом для деяких читачів, котрі розроблятимуть більш адекватний аналіз для його обґрунтування. Більше того, можна погодитися з твердженням в [70], що „ ... *цей обдарований читач, на жаль, ще не з'явився*".

Як автори огляду [70] пишуть далі, „ ... *в принципі, перспектива побудови таких трансмутаційних операторів у найближчому майбутньому в цій формі здається незрозумілою. Зрештою, вони повинні задовольнити відповідні вже ультрагіперболічні рівняння, для яких пов'язані методи вивчення досі практично не розроблено ... . Але найбільш образливим є те, що існування таких операторів трансмутації, названих хвильовими операторами, вже доведено для всіх прийнятних потенціалів, але ніхто не в змозі побудувати їх так явно, як багатовимірні оператори Вольтерра*".

Щоб завершити цей короткий історичний вступ, варто, дотримуючись [70], навести термінологічне зауваження. У західній літературі замість терміну „оператори трансформації" використовується термін „оператори трансмутації", що приписується Дельсарту [16]. Як зазначив Р. Керолл [10], термін „трансформація" призначений класичним інтегральним перетворенням Фур'є, Лапласа, Мелліна та інших, до яких він краще підходить. Термін „ трансмутація" походить з романських мов для „ магічних перетворень", який сенсовно відображає справжню сутність дії операторів трансмутації. Особливо влучною тут є цитата з [10]: „*Такі оператори часто називають операторами трансформацій російською школою* (*Левітан, Наймарк, Марченко та ін.*), *але трансформація здається надто широким терміном, і, оскільки деяка техніка часом виглядає „магічною", ми наслідували Ліонса та Дельсарта при використанні слова трансмутація*".

2. Спектральні оператори та узагальнені розклади за власними функціями. Розглянемо сепарабельний простір Гільберта $\mathcal{H}$, у якому задано лінійний замкнений оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ зі щільною областю визначення $D(L) \subset \mathcal{H}$. Розглянемо також звичайний квазіядерний впорядкований ланцюжок Гельфанда [2, 3] для гільбертового простору $\mathcal{H}$ з додатним $\mathcal{H}_+$ та від'ємним $\mathcal{H}_-$ гільбертовими просторами:

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_- \subset \mathcal{D}', \tag{2.1}$$

необхідний нам для аналізу спектральних властивостей оператора L в $\mathcal{H}$, причому лінійний топологічний простір $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_+$ і включеним в $D(L^*)$ таким чином, що відображення $L^* : \mathcal{D} \to \mathcal{H}_+$ є неперервним. У цьому випадку говоримо, що оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ допускає продовження оснащенням за Гельфандом. Далі будемо використовувати такі поняття [2, 22, 68].

Означення 2.1. *Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ назвемо спектральним, якщо для всіх борелівських підмножин $\Delta \subset \sigma(L)$ спектра $\sigma(L) \subset \mathbb{C}$ та всіх пар $(u, v) \in \mathcal{H}_+ \times \mathcal{H}_+$ мають місце вирази*

$$L = \int\limits_{\sigma(L)} \lambda\, d\mathrm{E}(\lambda), \qquad \big(u, \mathrm{E}(\Delta)v\big) = \int\limits_{\Delta} \big(u, \mathrm{P}(\lambda)v\big) d\rho_\sigma(\lambda), \tag{2.2}$$

де ρ_σ — деяка скінченна міра Бореля на спектрі $\sigma(L)$, E — деяка самоспряжена проекторно-операторна міра на спектрі $\sigma(L)$, така, що $\mathrm{E}(\Delta)\mathrm{E}(\Delta') = \mathrm{E}(\Delta \cap \Delta')$ для будь-яких борелівських підмножин $\Delta, \Delta' \subset \sigma(L)$, та $\mathrm{P}(\lambda)\colon \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$, $\lambda \in \sigma(L)$, є відповідною сім'єю інтегральних операторів з ядрами з $\mathcal{H}_+$ в $\mathcal{H}_-$.

Слід зазначити, що спектральними є всі самоспряжені, нормальні та унітарні оператори, причому не існує конструктивних способів встановлення спектральності навіть загальних диференціальних операторів. Детально досліджено лише їх певні класи, насамперед еліптичні диференціальні оператори, що визначаються на функціях із відповідного простору Соболєва, що задовольняють однорідні системи граничних умов, введених Я. Б. Лопатинським. Наприклад, у гільбертовому просторі $L_2(E^n;\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, спектральними є всі максимальні диференціальні оператори зі сталими коефіцієнтами. Прикладом неспектрального оператора може бути нільпотентний оператор навіть у скінченновимірному просторі. Як наслідок виразу (2.2), у слабкій топології простору $\mathcal{H}$ можна записати

$$\mathrm{E}(\Delta) = \int_\Delta \mathrm{P}(\lambda)\, d\rho_\sigma(\lambda) \tag{2.3}$$

для будь-якої борелівської підмножини $\Delta \subset \sigma(L)$.

Подібно до (2.2) і (2.3) можна записати відповідні вирази для спряженого спектрального оператора $L^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, якщо вважати його область визначення $D(L^*) \subset \mathcal{H}$ щільною в $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}^*(\Delta)u, v) &= \int_\Delta (P^*(\lambda)u, v)\, d\rho^*_\sigma(\lambda),\\ \mathrm{E}^*(\Delta) &= \int_\Delta P^*(\lambda)\, d\rho^*_\sigma(\lambda),\end{aligned} \tag{2.4}$$

де E^* — відповідна проекторна міра на борелівських підмножинах $\Delta \in \sigma(L^*)$, $\mathrm{P}^*(\lambda)\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\lambda \in \sigma(L^*)$, — відповідна сім'я інтегральних операторів з ядрами в $\mathcal{H}$ та ρ^*_σ — деяка скінченна міра Бореля на спектрі $\sigma(L^*)$. Будемо вважати, що виконуються такі умови:

$$\mathrm{P}(\mu)(L - \mu\mathrm{I})v = 0, \qquad \mathrm{P}^*(\lambda)(L^* - \bar{\lambda}\mathrm{I})u = 0 \tag{2.5}$$

для $u \in D(L^*)$, $v \in D(L)$, де $\bar{\lambda} \in \sigma(L^*)$, $\mu \in \sigma(L)$, а також $\sigma(L^*) = \bar{\sigma}(L)$.

Опишемо узагальнені власні функції операторів L та L^* за допомогою підходу з роботи [2]. Будемо вважати, що оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ із щільною областю визначення $D(L)$ допускає продовження оснащенням за Гельфандом, причому в $\mathcal{H}_+$ можна знайти такий топологічний підпростір $\mathcal{D}(L) := \mathcal{D}_+(L^*) \subset D(L^*)$, що спряжений оператор $L^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ відображає передгільбертів з нормою графіка простір $\mathcal{D}_+(L^*)$ неперервно в $\mathcal{H}_+$.

Означення 2.2. *Вектор $\psi_\lambda \in \mathcal{H}_-$ назвемо узагальненою власною функцією оператора $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, яка відповідає власному значенню $\lambda \in \sigma(L)$, якщо*

$$\big((L^* - \bar{\lambda}\mathrm{I})u, \psi_\lambda\big) = 0 \tag{2.6}$$

для всіх $u \in \mathcal{D}_+(L^*)$.

Очевидно, що у випадку $\psi_\lambda \in D(L)$, $\lambda \in \sigma(L)$, маємо $L\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$. Визначення (2.6) пов'язане з деяким розширенням оснащенням [2] оператора $L : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$. Оскільки оператор $L^* : \mathcal{D}_+(L^*) \to \mathcal{H}_+$ неперервний, можна визначити спряжений оператор $L_{\text{ext}} := L^{*,+} : \mathcal{H}_- \to \to \mathrm{D}(L^*)$ відносно звичайного скалярного добутку в $\mathcal{H}$ такого, що

$$(L^* v, u) = (v, L^{*,+} u) \tag{2.7}$$

для будь-яких $v \in \mathcal{D}_+(L^*)$ і $u \in \mathcal{H}_-$, що збігається з оператором $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ на $D(L)$. Визначення (2.6) узагальненої власної функції $\psi_\lambda \in \mathcal{H}_-$ для $\lambda \in \sigma(L)$ еквівалентне стандартному виразу

$$L_{\text{ext}}\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda. \tag{2.8}$$

Якщо означити скалярний добуток

$$(u, v) := (u, v)_+ + (L^* u, L^* v)_+ \tag{2.9}$$

на щільному підпросторі $\mathcal{D}_+(L^*) \subset \mathcal{H}_+$, то цей підпростір перетвориться природним чином у гільбертів простір $\mathcal{D}_+(L^*)$, для якого спряжений „негативний" простір $\mathcal{D}'_+(L^*) := \mathcal{D}_-(L^*) \supset \supset \mathcal{H}_-$. Розглянемо будь-яку узагальнену власну функцію $\psi_\lambda \in \operatorname{Im} \mathrm{P}(\lambda) \subset \mathcal{H}_-$, $\lambda \in \sigma(L)$, оператора $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. З (2.5) отримуємо, що $L^*_{\text{ext}}\varphi_\lambda = \bar{\lambda}\varphi_\lambda$ для будь-якої функції $\varphi_\lambda \in \in \operatorname{Im} \mathrm{P}^*(\lambda) \subset \mathcal{H}_-$, $\bar{\lambda} \in \sigma(L^*)$, і $L^*_{\text{ext}} : \mathcal{H}_- \to \mathcal{D}_-(L)$ є розширенням спряженого оператора $L^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, що редукує область визначення $D(L)$ до іншої щільної в $\mathcal{H}_+$ області визначення $\mathcal{D}_+(L) \subset D(L)$, на якій оператор $L : \mathcal{D}_+(L) \to \mathcal{H}_+$ є неперервним.

3. Півторалінійні форми, узагальнені ядра і конгруентність операторів. ***3.1. Півторалінійні форми та узагальнені ядра операторів.*** Розглянемо півторалінійну форму $\mathrm{K} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, а саме, неперервну комплекснозначну функцію, лінійну по першому аргументу і комплексно-спряжено лінійну по другому в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Відомо [14], що така неперервна півторалінійна форма має стандартне і однозначне зображення у формі скалярного добутку $\mathrm{K}[u, v] = (\mathcal{K}u, v)$ для деякого неперервного лінійного оператора $\mathcal{K} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Якщо цей оператор є оператором Гільберта – Шмідта, а у просторі $\mathcal{H}$ є визначена інволюція $\mathcal{H} \ni u \to \bar{u} \in \mathcal{H}$ як аналог комплексного спряження, то для форми $\mathrm{K} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ існує єдиний елемент $\hat{\mathrm{K}} \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, так зване ядро цієї форми, для якого $\mathrm{K}[u, v] = (\hat{\mathrm{K}}, v \otimes \bar{u})$ для всіх $u, v \in \mathcal{H}$. Оскільки ми вивчаємо узагальнені ядра операторів, що діють в оснащеному за Гельфандом гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, нам потрібне узагальнення зазначеного результату на цей випадок. А саме, має місце така класична теорема Л. Шварца.

Теорема 3.1 [2]. *Розглянемо стандартний ланцюжок Гельфанда гільбертових просторів* (2.1), *інваріантний відносно комплексної інволюції $\mathbb{C} \ni u \to \bar{u} \in \mathbb{C}$. Тоді будь-яку неперервну півторалінійну форму $\mathrm{K} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ можна записати за допомогою узагальненого ядра $\hat{\mathrm{K}} \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$ як*

$$\mathrm{K}[u, v] = (\hat{\mathrm{K}}, v \otimes \bar{u})_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} \tag{3.1}$$

для будь-яких $u, v \in \mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}$. Ядро $\hat{\mathrm{K}} \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$ можна подати у вигляді

$$\hat{\mathrm{K}} = (\mathrm{D} \otimes \mathrm{D})\bar{\mathrm{K}},$$

де $\bar{\mathrm{K}} \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ — звичайне ядро, $\mathrm{D} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_-$ — квадратний корінь $\sqrt{\mathrm{J}^*}$ з додатного оператора $\mathrm{J}^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_-$, який є оператором вкладення Гільберта – Шмідта $\mathcal{H}_+$ в $\mathcal{H}$ відносно послідовності (2.1). *Крім того, ядра $(\mathrm{D} \otimes \mathrm{I})\bar{\mathrm{K}}$, $(\mathrm{I} \otimes \mathrm{D})\bar{\mathrm{K}} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ є звичайними.*

Далі будемо розглядати оператор $L\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ із щільною областю визначення $D(L) \subset \mathcal{H}$, який допускає продовження оснащенням за Гельфандом (2.1). Позначимо через $D_+(L^*) \subset \subset D(L^*)$ відповідний щільний в $\mathcal{H}_+$ підпростір.

Означення 3.1. *Множину узагальнених ядер $\hat{\mathrm{Z}}_\lambda \subset \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$ для $\lambda \in \sigma(L) \cap \bar{\sigma}(L^*)$ назвемо елементарно пов'язаною з оператором $L\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, якщо для будь-якого $\lambda \in \sigma(L) \cap \bar{\sigma}(L^*)$ норма $\|\hat{\mathrm{Z}}_\lambda\|_{\mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-} < \infty$ та*

$$\big(\hat{\mathrm{Z}}_\lambda, ((L - \lambda \mathrm{I})v) \otimes u\big) = 0, \qquad \big(\hat{\mathrm{Z}}_\lambda, v \otimes (L^* - \lambda \mathrm{I})u\big) = 0, \tag{3.2}$$

де $(u, v) \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$ є довільними.

Далі будемо вважати, що всі функціональні простори інваріантні відносно інволюції $\mathbb{C} \ni \ni u \to \bar{u} \in \mathbb{C}$, і покладемо $\mathcal{D}_+ := \mathcal{D}_+(L^*) = \mathcal{D}_+(L) \subset \mathcal{H}_+$. Тоді можна побудувати розширення $L_{\mathrm{ext}} \supset L$ і $L^*_{\mathrm{ext}} \supset L^*$, які є лінійними операторами, що неперервно діють з $\mathcal{H}_-$ в $\mathcal{D}_- := \mathcal{D}'_+$. Послідовність (2.1) у цьому випадку розширюється до ланцюжка

$$\mathcal{D}_+ \subset \mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_- \subset \mathcal{D}_-. \tag{3.3}$$

Тотожний оператор $\mathrm{I}\colon \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_- \subset \mathcal{D}_-$ можна розширити природним чином як вкладення оператора з $\mathcal{H}_-$ в $\mathcal{D}_-$. Рівності (3.2) можна записати в еквівалентному вигляді [2]

$$(L_{\mathrm{ext}} \otimes \mathrm{I})\hat{\mathrm{Z}}_\lambda = \lambda \hat{\mathrm{Z}}_\lambda, \qquad (\mathrm{I} \otimes L^*_{\mathrm{ext}})\hat{\mathrm{Z}}_\lambda = \lambda \hat{\mathrm{Z}}_\lambda \tag{3.4}$$

для будь-якого $\lambda \in \sigma(L) \cap \bar{\sigma}(L^*)$. Нехай ядро $\hat{\mathrm{K}}_\lambda \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$ задовольняє рівність

$$(L_{\mathrm{ext}} \otimes \mathrm{I})\, \hat{\mathrm{K}} = (\mathrm{I} \otimes L^*_{\mathrm{ext}})\hat{\mathrm{K}}. \tag{3.5}$$

Оскільки рівності (3.4) можна записати у вигляді

$$(L_{\mathrm{ext}} \otimes \mathrm{I})\, \hat{\mathrm{Z}}_\lambda = (\mathrm{I} \otimes L^*_{\mathrm{ext}})\hat{\mathrm{Z}}_\lambda \tag{3.6}$$

для будь-якого $\lambda \in \sigma(L) \cap \bar{\sigma}(L^*)$, то справедливою є така характеристична теорема [2].

Теорема 3.2 [2, c. 621]. *Нехай ядро $\hat{\mathrm{K}} \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$ задовольняє умову* (3.5). *Тоді*, *згідно з* (3.6), *існує скінченна міра Бореля*, *визначена на борелівських підмножинах $\Delta \subset \sigma(L) \cap \bar{\sigma}(L^*)$*, *така*, *що має місце слабке спектральне зображення*

$$\hat{\mathrm{K}} = \int\limits_{\sigma(L) \cap \bar{\sigma}(L^*)} \hat{\mathrm{Z}}_\lambda \, d\rho_\sigma(\lambda). \tag{3.7}$$

Крім того, *згідно з* (3.4), *можна записати*

$$\hat{\mathrm{Z}}_\lambda = \psi_\lambda \otimes \varphi_\lambda,$$

де $L_{\mathrm{ext}}\psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda$, $L^*_{\mathrm{ext}}\varphi_\lambda = \bar{\lambda}\varphi_\lambda$, $(\psi_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$ та $\lambda \in \sigma(L) \cap \bar{\sigma}(L^*)$.

Доведення. Згідно з (3.6), ядро (3.7) задовольняє рівняння (3.5). З іншого боку, згідно з теоремою 3.1, другу з формул (2.2) для оператора $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ можна записати у вигляді (3.1):

$$\big(u, \mathrm{P}(\lambda)v\big) = (\hat{\mathrm{Z}}_\lambda, v \otimes u)_+ \tag{3.8}$$

для будь-яких $u, v \in \mathcal{H}_+$. Крім того, згідно з умовою (3.5), за допомогою ядра $\widehat{\mathrm{K}} \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$ можна визначити, як це зроблено у [2], новий гільбертів простір $\mathcal{H}_K \supset \mathcal{H}_+$ із скалярним добутком

$$(u, v)_{\mathrm{K}} := \big(|\hat{\mathrm{K}}|, v \otimes u\big)_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \tag{3.9}$$

для будь-яких $u, v \in \mathcal{H}_+$, де, за означенням, $|\hat{\mathrm{K}}| := \sqrt{\hat{\mathrm{K}}^*\hat{\mathrm{K}}}$. Оскільки

$$\|u\|_{\mathrm{K}}^2 = \big(|\hat{\mathrm{K}}|, u \otimes u\big)_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \le \|\hat{\mathrm{K}}\|_- \|u \otimes u\|_+ = \|\hat{\mathrm{K}}\|_- \|u\|_+^2 \tag{3.10}$$

для будь-якого $u \in \mathcal{H}_+$ є нормою, то з (3.10) можна отримати, що $\mathcal{H}_K \supset \mathcal{H}_+$. Таким чином, побудовано нову впорядковану послідовність із базовим гільбертовим простором $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$:

$$\mathcal{H}_{++} \subset (\mathcal{H}_+) \subset \mathcal{H}_{\mathrm{K}} \subset \mathcal{H}_{-\,-}, \tag{3.11}$$

де вкладення $\mathcal{H}_{++} \to \mathcal{H}_{\mathrm{K}}$ є також квазіядерним [2] як добуток квазіядерного $\mathcal{H}_{++} \to \mathcal{H}_+$ та неперервного $\mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_{\mathrm{K}}$ вкладень, згідно з (3.10). Оскільки $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ можна розглядати як оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathrm{K}})$, то існує зображення, подібне до (3.8), але тільки для $u, v \in \mathcal{H}_{++}$. Тобто для виразу (3.9) з (3.4) отримуємо шукане для всіх $(u, v) \in \mathcal{H}_+ \times \mathcal{H}_+$ зображення

$$(\hat{\mathrm{K}}, v \otimes u)_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = (u, v)_{\mathrm{K}} = \int\limits_{\sigma(L)\cap\bar{\sigma}(L^*)} (\hat{\mathrm{Z}}_\lambda, v \otimes u)_{\mathrm{K}}\, d\rho_\sigma(\lambda), \tag{3.12}$$

еквівалентне (3.7). Інтеграл (3.7) є визначеним, оскільки норма $\|\widehat{\mathrm{Z}}_\lambda\|_- < \infty$, а міра ρ_σ є скінченною за побудовою.

Теорему 3.2 доведено.

Ця конструкція для самоподібних ядер $\hat{\mathrm{K}} \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$ у вигляді (3.7), застосована до оператора $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, виявляється дуже корисною, якщо умову самоподібності замінити звичайною подібністю, що буде розглянуто нижче.

3.2. Конгруентні оператори з ядрами, асоційованими з трансмутаціями Дельсарта, та їхня структура. Розглянемо у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ пару щільно визначених та продовжених оснащенням за Гельфандом лінійних диференціальних операторів L та $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, а також пару узагальнених ядер $\hat{\mathrm{K}}_s \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-,\ s = \pm$.

Означення 3.2. *Ядра* $\hat{\mathrm{K}}_s \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-,\ s = \pm$, *називаються конгруентними до пари операторів* $(L, \tilde{L})$ *в* $\mathcal{H}$, *якщо виконано таку умову операторної конгруентності*:

$$(\tilde{L}_{\mathrm{ext}} \otimes 1)\hat{\mathrm{K}}_s = (1 \otimes L^*_{\mathrm{ext}})\hat{\mathrm{K}}_s. \tag{3.13}$$

Оскільки не будь-яка пара операторів L та $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ є конгруентною до заданої пари ядер, виникає проблема опису таких пар операторів та відповідних їм ядер $\hat{\mathrm{K}}_s \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$, $s = \pm$. Першим важливим запитанням є питання про існування ядер $\hat{\mathrm{K}}_s \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-,\ s = \pm$, конгруентних парам операторів L та $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Відповідь очевидна для випадку, коли $\tilde{L} = L$, а конгруентність є самоподібністю. Важливий випадок, коли $\tilde{L} \neq L$, є нетривіальним і може бути вивчений, якщо існують відповідно визначені обмежені та оборотні оператори $\mathbf{\Omega}_s,\ s = \pm$, такі, що

$$\tilde{L}\mathbf{\Omega}_s = \mathbf{\Omega}_s L. \tag{3.14}$$

Означення 3.3 [16, 17]. *Нехай пара щільно визначених замкнених диференціальних операторів* $L, \tilde{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *у гільбертовому просторі* $\mathcal{H}$ *має пару замкнених підпросторів* $\mathcal{H}_0$ *і* $\tilde{\mathcal{H}}_0 \subset \mathcal{H}_-$, *асоційованих із оснащенням Гельфанда* (2.1) *гільбертового простору* $\mathcal{H}$. *Оператори* $\Omega_s,\ s = \pm$, *називаються трансмутаціями Дельсарта*, *якщо виконуються такі умови*:

i) *оператор* $\mathbf{\Omega}_s$ *та його обернений* $\mathbf{\Omega}_s^{-1},\ s = \pm$, *є неперервними*, *тобто* $\Omega_s^{-1} \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}}_0; \mathcal{H}_0)$ *і* $\Omega_s \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0; \tilde{\mathcal{H}}_0),\ s = \pm$;

ii) *образи* $\operatorname{Im}\Omega_s|_{\mathcal{H}_0} = \tilde{\mathcal{H}}_0,\ s = \pm$;

iii) *справджується співвідношення* (3.14).

Припустимо, що пара операторів $(L, \tilde{L}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ є диференціальною однакового порядку $n(L) \in \mathbb{Z}_+$, тобто

$$L := \sum_{|\alpha|=0}^{n(L)} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}, \qquad \tilde{L} := \sum_{|\alpha|=0}^{n(L)} \tilde{a}_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}, \tag{3.15}$$

де $x \in \mathrm{Q},\ \mathrm{Q} \subset \mathbb{R}^m$ — деяка зв'язна область в $\mathbb{R}^m$, коефіцієнти a_α є гладкими, $\tilde{a}_\alpha \in \mathcal{S}(\mathrm{Q}; \operatorname{End}\mathbb{C}^{\mathrm{N}})$ для всіх $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m,\ |\alpha| = \overline{0, n(L)}$ та $\mathrm{N} \in \mathbb{Z}_+$. Диференціальні вирази (3.15) замкнені і, відповідно, задані на щільних у гільбертовому просторі $\mathcal{H} := L_2(\mathrm{Q}; \mathbb{C}^{\mathrm{N}})$ областях визначення $D(L)$ та $D(\tilde{L}) \subset \mathrm{W}_2^{m(L)}(\mathrm{Q}; \mathbb{C}^{\mathrm{N}}) \subset \mathcal{H}$ для деякого порядку $m(L) < n(L)$. Це означає, що існує відповідна до (3.15) пара спряжених операторів L^* та $\tilde{L}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, заданих, відповідно, також на щільних областях визначення $D(L^*)$ та $D(\tilde{L}^*) \subset \mathrm{W}_2^{m(L)}(\mathrm{Q}; \mathbb{C}^{\mathrm{N}}) \subset \mathcal{H}$.

Розглянемо пару оборотних і обмежених операторів $\mathbf{\Omega}_s,\ s = \pm$, та трансмутовані за Дельсартом оператори

$$\tilde{L}_s := \mathbf{\Omega}_s L \mathbf{\Omega}_{\mathrm{s}}^{-1}, \quad s = \pm, \tag{3.16}$$

які, за визначенням, повинні бути диференціальними. Додатковим обмеженням, накладеним на оператори $\Omega_s,\ s = \pm$, є незалежність [23, 24] диференціальних виразів для операторів (3.16) від індексів $s = \pm$. Проблема побудови таких операторів трансмутації Дельсарта $\Omega_s,\ s = \pm$, є складною, і на даний час існують лише окремі більш-менш завершені результати [23, 52] для двовимірного оператора Дірака та тривимірного оператора Лапласа.

Щоб застосувати наш підхід до вивчення цієї проблеми, розглянемо деякі формальні узагальнення результатів, описаних у пункті 2. Нехай елементарне ядро $\hat{\hat{Z}}_\lambda \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$ задовольняє умови, що узагальнюють (3.4):

$$(\tilde{L}_{\text{ext}} \otimes \mathrm{I})\hat{\hat{\mathrm{Z}}}_\lambda = \lambda \hat{\hat{\mathrm{Z}}}_\lambda, \qquad (\mathrm{I} \otimes L_{\text{ext}}^*)\hat{\hat{\mathrm{Z}}}_\lambda = \lambda \hat{\hat{\mathrm{Z}}}_\lambda \tag{3.17}$$

для $\lambda \in \sigma(\tilde{L}) \cap \bar{\sigma}(L^*)$, і розв'язує рівняння (3.13) для будь-якого $\lambda \in \sigma(\widetilde{L}) \cap \sigma(\widetilde{L}^*)$, тобто

$$(\widetilde{L}_{\text{ext}} \otimes 1)\hat{\hat{\mathrm{Z}}}_\lambda = (1 \otimes L_{\text{ext}}^*)\hat{\hat{\mathrm{Z}}}_\lambda. \tag{3.18}$$

Можна сподіватись, що для ядер $\hat{\mathrm{K}}_s \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-,\ s = \pm$, існують подібні до (3.9) спектральні зображення

$$\hat{\mathrm{K}}_s = \int\limits_{\sigma(\widetilde{L}) \cap \bar{\sigma}(L^*)} \hat{\hat{\mathrm{Z}}}_\lambda \, d\rho_{\sigma,\mathrm{s}}(\lambda) \tag{3.19}$$

із скінченними спектральними мірами $\rho_{\sigma,s},\ s = \pm$, локалізованими на борелівських підмножинах спільного спектра $\sigma(\tilde{L}) \cap \bar{\sigma}(L^*)$. На основі подібного до (3.8) спектрального зображення, застосованого до кожного з операторів $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ і $L^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, можна сформулювати таку теорему.

Теорема 3.3. *Рівності* (3.17) *узгоджені для будь-якого* $\lambda \in \sigma(\widetilde{L}) \cap \bar{\sigma}(L^*)$, *а для ядер* $\hat{\mathrm{K}}_s \in \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$, $s = \pm$, *які задовольняють умову конгруентності* (3.13), *існує ядро* $\hat{\widetilde{\mathrm{Z}}}_\lambda \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$ *для відповідного оснащення Гельфанда* (3.11) *такого, що мають місце спектральні зображення* (3.19).

Нас буде цікавити обернена задача побудови ядер $\hat{\mathrm{K}}_s \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$, $s = \pm$, у формі (3.19), які *a priori* задовольняють умови конгруентності (3.13), накладені на пару $(L, \tilde{L})$ диференціальних операторів у $\mathcal{H}$, що зв'язані умовою трансмутації Дельсарта (3.14). У певному розумінні можна стверджувати, що тільки для пари операторів $(L, \tilde{L})$, асоційованих за Дельсартом, існує дуальна пара $\{\hat{\mathrm{K}}_s \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_- : s = \pm\}$ відповідних конгруентних ядер, що задовольняють умови (3.13), тобто

$$(\tilde{L}_{\mathrm{ext}} \otimes 1)\hat{\mathrm{K}}_s = \hat{\mathrm{K}}_s(1 \otimes L^*_{\mathrm{ext}}). \tag{3.20}$$

Припустимо, що існують інші дві пари операторів трансмутації Дельсарта Ω_s та $\Omega_s^{\circledast} \in \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $s = \pm$, які задовольняють умову ii) означення 3.3, накладену на відповідні дві пари диференціальних операторів $(L, \tilde{L})$ та $(L^*, \tilde{L}^*) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Це означає, що існує така додаткова пара замкнених підпросторів $\mathcal{H}_0^{\circledast}$ і $\tilde{\mathcal{H}}_0^{\circledast} \subset \mathcal{H}_-$, що

$$\mathrm{Im}\, \boldsymbol{\Omega}_s^{\circledast}|_{\mathcal{H}_0^{\circledast}} = \tilde{\mathcal{H}}_0^{\circledast}, \quad s = \pm, \tag{3.21}$$

для операторів трансмутації Дельсарта $\boldsymbol{\Omega}_s^{\circledast}$, $s = \pm$, які, очевидно, задовольняють умови

$$\tilde{L}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}_s^{\circledast} = \boldsymbol{\Omega}_s^{\circledast} \cdot L^*, \quad s = \pm, \tag{3.22}$$

накладені на спряжені оператори $\tilde{L}^*$, $L^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, визначені раніше і задані співвідношеннями

$$L^* = \sum_{|\alpha|=0}^{n(L)} (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \bar{a}_\alpha^{\intercal}(x), \qquad \tilde{L}^* = \sum_{|\alpha|=0}^{n(L)} (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \bar{\tilde{a}}_\alpha^{\intercal}(x) \tag{3.23}$$

для всіх $x \in \mathrm{Q} \subset \mathbb{R}^m$.

Побудуємо оператори трансмутації Дельсарта типу Вольтерра [27, 46]

$$\boldsymbol{\Omega}_\pm := 1 \ + \mathrm{K}_\pm(\boldsymbol{\Omega}), \tag{3.24}$$

які відповідають двом різним ядрам $\hat{\mathrm{K}}_+$ та $\hat{\mathrm{K}}_- \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$ інтегральних операторів Вольтерра $\mathrm{K}_+(\boldsymbol{\Omega})$ і $\mathrm{K}_-(\boldsymbol{\Omega})$, пов'язаних з ними таким чином:

$$\big(u, \mathrm{K}_\pm(\boldsymbol{\Omega})v\big) := \left(u\, \chi\left(S_{x,\pm}^{(m)}\right), \hat{\mathrm{K}}_\pm v\right) \tag{3.25}$$

для всіх $(u, v) \in \mathcal{H}_+ \times \mathcal{H}_+$, де $\chi\Big(S_{x,\pm}^{(m)}\Big)$ — деякі характеристичні функції гладких m-вимірних гіперповерхонь $S_{x,+}^{(m)}$ і $S_{x,-}^{(m)} \in \mathcal{K}(\mathrm{Q})$ сингулярного симпліціального комплексу $\mathcal{K}(\mathrm{Q})$ відкритої множини $\mathrm{Q} \subset \mathbb{R}^m$, вибраних таким чином, що межа $\partial\Big(S_{x,+}^{(m)} \cup S_{x,-}^{(m)}\Big) = \partial\mathrm{Q}$. У випадку, коли $\mathrm{Q} := \mathbb{R}^m$, природно вважати, що $\partial\mathbb{R}^m = \varnothing$. Використовуючи оператори Дельсарта (3.24) та співвідношення (3.14), можна побудувати такі вирази:

$$\tilde{L}_\pm - L = \mathrm{K}_\pm(\boldsymbol{\Omega})L - \tilde{L}_\pm \mathrm{K}_\pm(\boldsymbol{\Omega}). \tag{3.26}$$

Оскільки ліві частини рівності (3.26) є суто диференціальними виразами, то мають місце очевидні співвідношення (3.21) для локальних ядер:

$$(\tilde{L}_{\mathrm{ext},\pm} \otimes 1)\hat{\mathrm{K}}_{\pm} = (1 \otimes L^{*}_{\mathrm{ext}})\hat{\mathrm{K}}_{\pm}. \tag{3.27}$$

Формула (3.26) задає, взагалі кажучи, два різні диференціальні вирази $\tilde{L}_{\pm} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, що залежать від ядер $\hat{\mathrm{K}}_{\pm} \in \mathcal{H}_{-} \otimes \mathcal{H}_{-}$ та деяких гіперповерхонь $S^{(m)}_{x,\pm} \in \mathcal{K}(\mathrm{Q})$. Має місце така теорема.

Теорема 3.4. *Нехай гладкі гіперповерхні* $S^{(m)}_{x,\pm} \in \mathcal{K}(\mathrm{Q})$ *вибрано таким чином, що* $\partial\Big(S^{(m)}_{x,+} \cup \cup S^{(m)}_{x,-}\Big) = \partial\mathrm{Q}$ *і* $\partial S^{(m)}_{x,\pm} = \mp\sigma^{(m-1)}_{x} + \sigma^{(m-1)}_{x_{\pm}}$, *де* $\sigma^{(m-1)}_{x}$ *і* $\sigma^{(m-1)}_{x_{\pm}}$ *— деякі гомологічні симпліціальні ланцюги щодо групи гомологій* $\mathrm{H}_{m-1}(\mathrm{Q};\mathbb{C})$, *параметризовані відповідно біжучою точкою* $x \in \in \mathrm{Q}$ *і фіксованими точками* $x_{\pm} \in \partial\mathrm{Q}$, *що задовольнять гомотопічну умову* $\lim_{x\to x_{\pm}} \sigma^{(m-1)}_{x} = = \mp\sigma_{x_{\pm}}$. *Тоді виконуються операторні рівності*

$$\tilde{L}_{+} := \boldsymbol{\Omega}_{+} L \boldsymbol{\Omega}^{-1}_{+} = \tilde{L} = \boldsymbol{\Omega}_{-} L \boldsymbol{\Omega}^{-1}_{-} := \tilde{L}_{-}, \tag{3.28}$$

якщо має місце властивість комутативності

$$\big[\boldsymbol{\Omega}^{-1}_{+}\boldsymbol{\Omega}_{-}, L\big] = 0, \tag{3.29}$$

або еквівалентне співвідношення для відповідної композиції ядер

$$(L_{\mathrm{ext}} \otimes 1)\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}_{+}\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{-} = (1 \otimes L^{*}_{\mathrm{ext}})\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}_{+}\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{-}. \tag{3.30}$$

***Зауваження* 3.1.** Часткові випадки теореми 3.4 було доведено у роботах [23, 52] для двовимірного оператора Дірака та тривимірного оператора Лапласа. Запропоновані там конструкції та міркування виявились, зокрема, корисними для доведення загального випадку.

Розглянемо таку пару операторів трансмутації Дельсарта $(\boldsymbol{\Omega}_{+}, \boldsymbol{\Omega}_{-})$ у вигляді (3.24), що виконуються всі умови теореми 3.4. Тоді має місце така лема.

Лема 3.1. *Нехай оборотний оператор Фредгольма* $\boldsymbol{\Omega} = 1 + \Phi(\boldsymbol{\Omega}) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *з* $\Phi \in \mathcal{B}_{\infty}(\mathcal{H})$ *допускає факторизацію*

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}_{+}\boldsymbol{\Omega}_{-} \tag{3.31}$$

за допомогою двох операторів Дельсарта $\boldsymbol{\Omega}_{+}$ *та* $\boldsymbol{\Omega}_{-}$ *у вигляді* (3.24). *Тоді існує єдине ядро* $\hat{\Phi} \in \in \mathcal{H}_{-} \otimes \mathcal{H}_{-}$, *яке відповідає компактному оператору* $\Phi(\boldsymbol{\Omega}) \in \mathcal{B}_{\infty}(\mathcal{H})$ *і задовольняє комутативну умову самоподібної конгруентності*

$$(L_{\mathrm{ext}} \otimes 1)\hat{\Phi} = (1 \otimes L^{*}_{\mathrm{ext}})\hat{\Phi}, \tag{3.32}$$

асоційовану з властивостями (3.29) *та* (3.30).

З рівності (3.32) і теореми 3.4 легко отримати такий наслідок.

***Наслідок* 3.1.** *Існує скінченна міра Бореля* ρ_{σ}, *визначена на борелівських підмножинах спектра* $\sigma(\mathrm{L}) \cap \overline{\sigma}(\mathrm{L}^{*})$ *і така, що має місце слабка рівність*

$$\widehat{\Phi} = \int\limits_{\sigma(L)\cap\overline{\sigma}(L^{*})} \widehat{\mathrm{Z}}_{\lambda}\, d\rho_{\sigma}(\lambda). \tag{3.33}$$

Згідно з диференціальним виразом $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, для відповідних операторів трансмутації Дельсарта типу Вольтерра $\mathbf{\Omega}_\pm$ умови (3.29) та (3.32) еквівалентні операторному рівнянню

$$[\Phi(\mathbf{\Omega}), L] = 0. \tag{3.34}$$

Справді, за допомогою рівностей (3.28) легко отримати, що

$$L(1+\Phi(\mathbf{\Omega})) = L(\mathbf{\Omega}_+^{-1}\mathbf{\Omega}_-) = \mathbf{\Omega}_+^{-1}(\mathbf{\Omega}_+ L \mathbf{\Omega}_+^{-1})\mathbf{\Omega}_- =$$
$$= \mathbf{\Omega}_+^{-1}(\mathbf{\Omega}_- L \mathbf{\Omega}_-^{-1})\mathbf{\Omega}_- = \mathbf{\Omega}_+^{-1}\mathbf{\Omega}_- L = (1+\Phi(\mathbf{\Omega}))L, \tag{3.35}$$

тобто справджується (3.34).

Припустимо також, що, по-перше, для іншого оператора Фредгольма $\mathbf{\Omega}^{\circledast} = 1 + \Phi^{\circledast}(\mathbf{\Omega}) \in \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ з $\Phi^{\circledast}(\mathbf{\Omega}) \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ існують два факторизуючі його оператори трансмутації Дельсарта типу Вольтерра $\mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast}$ у вигляді

$$\mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast} = 1 + \mathrm{K}_\pm^{\circledast}(\mathbf{\Omega}) \tag{3.36}$$

з інтегральними операторами Вольтерра [27] $\mathrm{K}_\pm^{\circledast}(\mathbf{\Omega})$, асоційованими з ядрами $\hat{\mathrm{K}}_\pm \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$, а по-друге, виконується умова факторизації

$$1 + \Phi^{\circledast}(\mathbf{\Omega}) = \mathbf{\Omega}_+^{\circledast,-1}\mathbf{\Omega}_-^{\circledast}. \tag{3.37}$$

Тоді справедливою є така теорема.

Теорема 3.5. *Нехай пара гіперповерхонь* $S_{x,\pm}^{(m)} \subset \mathcal{K}(\mathrm{Q})$ *задовольняє всі умови теореми* 3.4. *Тоді трансмутовані за Дельсартом оператори* $\tilde{L}_\pm^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *є диференціальними і рівними, тобто*

$$\tilde{L}_+^* = \mathbf{\Omega}_+^{\circledast} L^* \mathbf{\Omega}_+^{\circledast,-1} = \tilde{L}^* = \mathbf{\Omega}_-^{\circledast} L^* \mathbf{\Omega}_-^{\circledast,-1} = \tilde{L}_-^{\circledast} \tag{3.38}$$

тоді і тільки тоді, коли виконується умова комутативності

$$[\Phi^{\circledast}(\mathbf{\Omega}), L^*] = 0. \tag{3.39}$$

Доведення. Суть доведення полягає в аналогічному аналізі умови конгруентності для заданої пари $(L, \tilde{L}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ диференціальних операторів та їх спряжень в $\mathcal{H}$.

За допомогою операторів трансмутації Дельсарта диференціальних операторів L і $L^* \in \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ми отримали два диференціальних оператори:

$$\tilde{L} = \mathbf{\Omega}_\pm L \mathbf{\Omega}_\pm^{-1}, \qquad \tilde{L}^* = \mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast} L^* \mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast,-1}, \tag{3.40}$$

які повинні бути узгодженими і такими, що

$$(\tilde{L})^* = \widetilde{(L^*)}. \tag{3.41}$$

Умова (3.41), згідно з (3.40), приводить до додаткових комутаторних виразів для ядер $\mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast}$ і $\mathbf{\Omega}_\pm^*$:

$$\left[L^*, \mathbf{\Omega}_\pm^* \mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast}\right] = 0, \tag{3.42}$$

еквівалентних комутаторному співвідношенню

$$\left[L, \mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast,*} \mathbf{\Omega}_\pm\right] = 0. \tag{3.43}$$

Як результат зображень (3.43), можна сформулювати такий наслідок.

Наслідок 3.2. *Існують скінченні міри Бореля $\rho_{\sigma,\pm}$, локалізовані на спільному спектрі $\sigma(L)\cap$ $\cap\,\bar{\sigma}(L^*)$, такі, що мають місце слабкі зображення композиції ядер*

$$\hat{\mathbf{\Omega}}_{\pm}^{\circledast,*}\circ\hat{\mathbf{\Omega}}_{\pm}=\int\limits_{\sigma(L)\cap\bar{\sigma}(L^*)}\hat{\mathrm{Z}}_{\lambda}d\rho_{\sigma,\pm}(\lambda), \tag{3.44}$$

де $\hat{\mathbf{\Omega}}_{\pm}^{\circledast,*}$ і $\hat{\mathbf{\Omega}}_{\pm}\in\mathcal{H}_{-}\otimes\mathcal{H}_{-}$ — ядра інтегральних операторів Вольтерра $\mathbf{\Omega}_{\pm}^{\circledast,*}$ і $\mathbf{\Omega}_{\pm}$.

3.3. Оператори Вольтерра та факторизація операторів Фредгольма. Інтегральні оператори типу Вольтерра (3.24), побудовані за допомогою ядер у вигляді (3.19), як відомо [6, 23, 36, 38, 44], є важливими для розв'язування багатьох задач спектрального аналізу та інтегровних нелінійних динамічних систем [4, 5, 24, 44, 52, 57, 61] на функціональних многовидах. Зокрема, вони відіграють роль факторизуючих операторів для класу операторів Фредгольма, які записуються фундаментальними операторними рівняннями Гельфанда – Левітана – Марченка [24, 36, 44], розв'язки яких є ядрами операторів трансмутації Дельсарта типу Вольтерра з відповідними конгруентними ядрами для заданої пари замкнених диференціальних операторів у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Тому варто вивчати їх структурні властивості за допомогою зображень (3.19) та (3.24) і у дуальному вигляді на основі загальної теорії Гохберга – Крейна [24, 27, 46] для операторів типу Вольтерра.

Для подальшого аналізу введемо деякі додаткові позначення та означення [6, 27]. Розглянемо лінійний компактний оператор $\mathrm{K}\in\mathcal{H}$ в сепарабельному гільбертовому просторі та асоційовану з ним множину $\mathcal{P}$ проекторів $\mathrm{P}=\mathrm{P}^2:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, яка називається ***ланцюгом проекторів***, якщо для будь-якої пари $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2\in\mathcal{P}$, $\mathrm{P}_1\neq\mathrm{P}_2$, маємо $\mathrm{P}_1<\mathrm{P}_2$ або $\mathrm{P}_2<\mathrm{P}_1$ та $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\min(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)$. Порядок $\mathrm{P}_1<\mathrm{P}_2$ означає, що $\mathrm{P}_1\mathcal{H}\subset\mathrm{P}_2\mathcal{H}$, $\mathrm{P}_1\mathcal{H}\neq\mathrm{P}_2\mathcal{H}$. Якщо $\mathrm{P}_1\mathcal{H}\subset\mathrm{P}_2\mathcal{H}$, то можна записати, що $\mathrm{P}_1\leq\mathrm{P}_2$. Замиканням $\overline{\mathcal{P}}$ ланцюга $\mathcal{P}$ є множина всіх операторів, що є слабкими границями послідовностей з $\mathcal{P}$. Включення $\mathcal{P}_1\subset\mathcal{P}_2$ для будь-яких двох множин ланцюгів проекторів має властивість транзитивності, що дозволяє розглядати множину всіх ланцюгів проекторів як частково впорядковану. Ланцюг $\mathcal{P}$ називається ***максимальним***, якщо його не можна розширити. Очевидно, що максимальний ланцюг є замкненим і містить нульовий $0\in\mathcal{P}$ та одиничний $1\in\mathcal{P}$ оператори. Пара проекторів $(\mathrm{P}^-,\mathrm{P}^+)\subset\mathcal{P}$ називається ***розривом*** ланцюга $\mathcal{P}$, якщо $\mathrm{P}_-<\mathrm{P}_+$ і для всіх $\mathrm{P}\in\mathcal{P}$ або $\mathrm{P}<\mathrm{P}^-$, або $\mathrm{P}^+<\mathrm{P}$. Замкнений ланцюг називається ***неперервним***, якщо для будь-якої пари $\mathrm{P}_1\neq\mathrm{P}_2\subset\mathcal{P}$ існує проектор $\mathrm{P}\in\mathcal{P}$ такий, що $\mathrm{P}_1<\mathrm{P}<\mathrm{P}_2$. Максимальний ланцюг $\mathcal{P}$ назвемо ***цілим***, якщо він неперервний. Строго зростаючу відносно включення проекторнозначну функцію $\mathrm{P}:$ $\mathrm{Q}\ni\Delta\to\mathcal{P}$ назвемо параметризацією ланцюга $\mathcal{P}$, якщо $\mathcal{P}=\mathrm{Im}(\mathrm{P})$, а таку параметризацію самоспряженого ланцюга $\mathcal{P}$ назвемо ***гладкою***, якщо для будь-якого $u\in\mathcal{H}$ додатнозначна міра $\Delta\to(u,\mathrm{P}(\Delta)u)$ є абсолютно неперервною. Відомо [24, 27, 46], що цілком повний ланцюг допускає гладку параметризацію. Звідси випливає, що якщо ланцюг проекторів $\mathcal{P}$ буде самоспряженим, повним та мати фіксовану гладку параметризацію відносно операторнозначної функції $\mathrm{F}:\mathcal{P}\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$, то вирази $\int_{\mathcal{P}}\mathrm{F}(\mathrm{P})\,d\mathrm{P}$ та $\int_{\mathcal{P}}d\mathrm{P}\mathrm{F}(\mathrm{P})$ можна використати для відповідних [27] інтегралів Рімана – Стільтьєса ланцюга проекторів. Розглянемо лінійний компактний оператор $\mathrm{K}\in\mathcal{B}_{\infty}(\mathcal{H})$, що діє на сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і має ланцюг проекторів $\mathcal{P}$. Ланцюг $\mathcal{P}$ назвемо власним для оператора $\mathrm{K}\in\mathcal{B}_{\infty}(\mathcal{H})$, якщо $\mathrm{PKP}=\mathrm{KP}$ для будь-якого проектора $\mathrm{P}\in\mathcal{P}$, а це означає, що підпростір $\mathrm{P}\mathcal{H}$ інваріантний відносно оператора $\mathrm{K}\in\mathcal{B}_{\infty}(\mathcal{H})$ для будь-якого $\mathrm{P}\in\mathcal{P}$. Позначимо через $\sigma(\mathrm{K}(\mathbf{\Omega}))$ спектр оператора $\mathrm{K}(\mathbf{\Omega})\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Означення 3.4. *Оператор* $\mathrm{K} \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ *назвемо вольтеррівським, якщо* $\sigma(\mathrm{K}) = \{0\}$ *і він має максимальний власний ланцюг проекторів* $\mathcal{P}$ *такий, що для будь-якого його розриву* $(\mathrm{P}^-, \mathrm{P}^+)$ *справджується співвідношення*

$$(\mathrm{P}^+ - \mathrm{P}^-)\mathrm{K}(\mathrm{P}^+ - \mathrm{P}^-) = 0. \tag{3.45}$$

Оскільки інтегральні оператори (3.24) є типу Вольтерра і конгруентні до пари $(L, \widetilde{L})$ замкнених диференціальних операторів в $\mathcal{H}$, цікаво вивчити їхні властивості відносно цього означення і відповідного максимального власного ланцюга проекторів $\mathcal{P}(\mathbf{\Omega})$.

Припустимо, що задано оператор Фредгольма $\mathbf{\Omega} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, який є самоконгруентним до замкненого диференціального оператора $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Якщо він заданий разом з елементарним ядром (3.6) у спектральному вигляді (3.7), то виникає завдання опису елементарних ядер $\hat{\mathrm{Z}}_\lambda$, $\lambda \in \sigma(L) \cap \bar{\sigma}(L^*)$, за допомогою відповідної гладкої та повної параметризації. Для вивчення цієї задачі використаємо результати, отримані в [46, 47], які стосуються факторизації операторів Фредгольма. Як частковий випадок ця робота містить деякі аспекти факторизації операторів трансмутації Дельсарта $\mathbf{\Omega} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ у вигляді (3.24).

Сформулюємо деякі необхідні результати [27, 46]. Як і вище, нехай $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — банахова алгебра всіх лінійних та неперервних на області визначення операторів у $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ — банахова алгебра всіх компактних операторів з $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, а $\mathcal{B}_0(\mathcal{H})$ — лінійний підпростір усіх скінченновимірних операторів із $\mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$. Покладемо також

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^-(\mathcal{H}) &= \big\{\mathrm{K} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\colon (1 - \mathrm{P})\mathrm{K}\mathrm{P} = 0, \mathrm{P} \in \mathcal{P}\big\}, \\ \mathcal{B}^+(\mathcal{H}) &= \big\{\mathrm{K} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\colon \mathrm{P}\mathrm{K}(1 - \mathrm{P}) = 0, \mathrm{P} \in \mathcal{P}\big\} \end{aligned} \tag{3.46}$$

і назвемо оператор $\mathrm{K} \in \mathcal{B}^+$ $(\mathrm{K} \in \mathcal{B}^-)$ верхнім трикутним (нижнім трикутним) відносно ланцюга проекторів $\mathcal{P}$. Позначимо через $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, $p \in [1, \infty]$, ідеали Неймана – Шаттена і покладемо

$$\mathcal{B}^+_\infty(\mathcal{H}) := \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H}) \cap \mathcal{B}^+(\mathcal{H}), \qquad \mathcal{B}^-_\infty(\mathcal{H}) := \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H}) \cap \mathcal{B}^-(\mathcal{H}). \tag{3.47}$$

Банахові підпростори (3.47) в означенні 3.4 є вольтеррівськими, замкненими в $\mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ і задовольняють умову

$$\mathcal{B}^+_\infty(\mathcal{H}) \cap \mathcal{B}^-_\infty(\mathcal{H}) = \varnothing. \tag{3.48}$$

Позначимо через $\mathcal{P}^+$ $(\mathcal{P}^-)$ відповідні проектори лінійного простору

$$\widetilde{\mathcal{B}}_\infty(\mathcal{H}) := \mathcal{B}^+_\infty(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{B}^-_\infty(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$$

на $\mathcal{B}^+_\infty(\mathcal{H})(\ \mathcal{B}^-_\infty(\mathcal{H}))$ і назвемо їх, як це зроблено у [27], трансформаторами трикутного зсуву. Трансформатори $\mathcal{P}^+$ та $\mathcal{P}^-$, як відомо [27], є неперервними операторами в ідеалах $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, $p \in [1, \infty]$. З попередніх означень отримуємо

$$\mathcal{P}^+(\Phi) + \mathcal{P}^-(\Phi) = \Phi, \qquad \mathcal{P}^\pm(\Phi) = \tau\mathcal{P}^\mp\tau(\Phi) \tag{3.49}$$

для будь-якого $\Phi \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, де $\tau\colon \mathcal{B}_p(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ — звичайна інволюція в $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ така, що $\tau(\Phi) := \Phi^*$.

***Зауваження* 3.2.** Трансформатори $\mathcal{P}^+$ і $\mathcal{P}^-$ суттєво залежать від фіксованого ланцюга проекторів $\mathcal{P}$.

Покладемо

$$\mathcal{V}_f^{\pm} := \{1 + \mathrm{K}_\pm : \mathrm{K}_\pm \in \mathcal{B}_\infty^{\pm}(\mathcal{H})\} \tag{3.50}$$

та

$$\mathcal{V}_f := \{\mathbf{\Omega}_+^{-1} \cdot \mathbf{\Omega}_- : \mathbf{\Omega}_\pm \in \mathcal{V}_f^{\pm}\}. \tag{3.51}$$

Неважко встановити, що $\mathcal{V}_f^+$ і $\mathcal{V}_f^-$ — підгрупи оборотних операторів з $\mathrm{Aut}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{B}(\mathcal{H})$ і $\mathcal{V}_f^+ \cap$ $\cap\, \mathcal{V}_f^- = \{1\}$. Розглянемо дві множини операторів:

$$\begin{gathered}\mathcal{W} := \{\Phi \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H}) : \ \mathrm{Ker}(1 + \mathrm{P}\Phi\mathrm{P}) = \{0\},\ \mathrm{P} \in \mathcal{P}\},\\ \mathcal{W}_f := \{\Phi \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H}) : \mathbf{\Omega} := 1 + \Phi \in \mathcal{V}_f\},\end{gathered} \tag{3.52}$$

для яких можна сформулювати таку теорему [27, 46].

Теорема 3.6 (Гохберг, Крейн)**.** *Мають місце такі властивості*:

i) $\mathcal{W}_f \subset \mathcal{W}$;

ii) $\mathcal{B}_\omega(\mathcal{H}) \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{W}_f$, *де* $\mathcal{B}_\omega(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — *ідеал Мацаєва*;

iii) *для того щоб* Φ *належав* $\mathcal{W}_f$, *необхідно і достатньо*, *щоб принаймні один з інтегралів*

$$\begin{gathered}\mathrm{K}_+(\mathbf{\Omega}) = -\int\limits_{\mathcal{P}} d\mathrm{P}\Phi\mathrm{P}(1 + \mathrm{P}\Phi\mathrm{P})^{-1},\\ (1 + \mathrm{K}_-(\mathbf{\Omega}))^{-1} - 1 = -\int\limits_{\mathcal{P}} (1 + \mathrm{P}\Phi\mathrm{P})^{-1}\mathrm{P}\Phi d\mathrm{P}\end{gathered} \tag{3.53}$$

був збіжним у рівномірній операторній топології, *і якщо один з інтегралів* (3.53) *збіжний*, *то інший також збіжний*;

iv) *для* $\Phi \in \mathcal{W}_f$ *допускається факторизація*

$$\mathbf{\Omega} = 1 + \Phi = (1 + \mathrm{K}_+(\mathbf{\Omega}))^{-1}(1 + \mathrm{K}_-(\mathbf{\Omega})). \tag{3.54}$$

Теорема залишиться абстрактною, якщо не врахувати важливого співвідношення (3.34), яке пов'язує операторні зображення (3.54) із заданим диференціальним оператором $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, тобто необхідно задовольнити умову (3.34). Якщо, згідно з (3.13) та (3.28), цю умову задовольнити, то будуть виконуватися такі рівності

$$(1 + \mathrm{K}_+(\mathbf{\Omega}))L(1 + \mathrm{K}_+(\mathbf{\Omega}))^{-1} = \tilde{L} = (1 + \mathrm{K}_-(\mathbf{\Omega}))L(1 + \mathrm{K}_-(\mathbf{\Omega}))^{-1} \tag{3.55}$$

в $\mathcal{H}$ та конгруентні співвідношення

$$(\tilde{L}_{\mathrm{ext}} \otimes 1)\widehat{\mathrm{K}}_\pm = (1 \otimes L^*_{\mathrm{ext}})\widehat{\mathrm{K}}_\pm \tag{3.56}$$

в $\mathcal{H}_+ \otimes \mathcal{H}_+$. Тут через $\hat{\mathrm{K}}_\pm \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$ позначено ядра операторів Вольтерра $\mathrm{K}_\pm(\mathbf{\Omega}) \in \mathcal{B}_\infty^{\pm}(\mathcal{H})$. Оскільки факторизація (3.54) єдина, то відповідні ядра повинні *a priori* задовольняти умови (3.55) і (3.56). Тому умова самоподібної конгруентності повинна бути розв'язною відносно ядра $\hat{\Phi} \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$, що відповідає інтегральному оператору $\Phi \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ і знайденій вище єдиній факторизації (3.54), яка задовольняє умови (3.55) і (3.56).

Для реалізації цієї схеми встановимо спочатку єдину додатну скінченну міру Бореля на борелівських підмножинах $\Delta \subset Q$ відкритої множини $Q \subset \mathbb{R}^m$, яка задовольняє для будь-якого проектора $\mathrm{P}_x \in \mathcal{P}_x$ з ланцюга $\mathcal{P}_x$, поміченого біжучою точкою $x \in Q$, умову

$$\big(u, \mathrm{P}_x(\Delta)v\big)_{\mathcal{H}} = \int\limits_{\Delta\subset Q} \big(u, \mathcal{X}_x(y)v\big) d\mu_{\mathcal{P}_x}(y) \tag{3.57}$$

для всіх $u, v \in \mathcal{H}_+$, де $\mathcal{X}_x : Q \to \mathcal{B}_2(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$ для будь-якого $x \in Q$ є вимірним відносно деякої міри Бореля $\mu_{\mathcal{P}_x}$ на борелівських підмножинах Q операторнозначним відображенням Гільберта – Шмідта. Зображення (3.57) випливає з суттєвої подібності до конструкції, що міститься у [2] і ґрунтується на теоремі Радона – Никодима [2, 14]. Це означає, що у слабкому сенсі

$$\mathrm{P}_x(\Delta) = \int\limits_{\Delta} \mathcal{X}_x(y)\, d\mu_{\mathcal{P}_x}(y) \tag{3.58}$$

для будь-якої борелівської множини $\Delta \subset Q$ і біжучої точки $x \in Q$. Використовуючи слабке зображення (3.58), інтегральний вираз $\mathrm{I}_{f,g}(x) = \int_{\mathcal{P}_x} f(\mathrm{P}_x)\, d\mathrm{P}_x g(\mathrm{P}_x)$, $x \in Q$, для будь-яких неперервних відображень $f, g \colon \mathcal{P}_x \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ можна записати у вигляді

$$\mathrm{I}_{f,g}(x) = \int\limits_{Q} f(\mathrm{P}(y))\mathcal{X}_x(y)g(\mathrm{P}(y))\, d\mu_{\mathcal{P}_x}(y). \tag{3.59}$$

Тому для вольтеррівських операторів (3.53) отримуємо такі вирази:

$$\begin{gathered}\mathrm{K}_{+,x}(\mathbf{\Omega}) = -\int\limits_{Q} (1 + \mathrm{P}_x(y)\Phi\mathrm{P}_x(y))^{-1}\mathrm{P}_x(y)\Phi\, d\mu_{\mathcal{P}_{x,+}}(y), \\ (1 + \mathrm{K}_{+,x}(\mathbf{\Omega}))^{-1} = 1 - \int\limits_{Q} d\mu_{\mathcal{P}_{x,+}}(y)\Phi\mathrm{P}_x(y)(1 + \mathrm{P}_x(y)\Phi\mathrm{P}_x(y))^{-1}\end{gathered} \tag{3.60}$$

для деякої міри Бореля $\mu_{\mathcal{P}_{x,+}}$ на Q і заданого оператора $\Phi \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$. Першу формулу з (3.60) можна записати для відповідних ядер $\hat{\mathrm{K}}_{+,x}(y) \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$ у вигляді

$$\hat{\mathrm{K}}_{+,x}(y) = -\int\limits_{\sigma(L)\cap\bar{\sigma}(L^*)} d\rho_{\sigma,+}(\lambda)\tilde{\psi}_\lambda(x) \otimes \varphi_\lambda(y), \tag{3.61}$$

де, згідно із зображенням (3.33) і теоремою 3.4, для будь-яких біжучих точок x, y та $x' \in Q$ введено таку згортку двох ядер:

$$\big((1 + \mathrm{P}_x(x')\Phi\mathrm{P}_x(x'))^{-1}\big) \circ (\psi_\lambda(x') \otimes \varphi_\lambda(y)) := \tilde{\psi}_\lambda(x) \otimes \varphi_\lambda(y) \tag{3.62}$$

для $\lambda \in \sigma(\tilde{L}) \cap \bar{\sigma}(L^*)$ і деякого вектора $\tilde{\psi}_\lambda \in \mathcal{H}_-$. Врахувавши зображення (3.19) при $s = +$, з (3.61) легко отримати, що елементарне конгруентне ядро

$$\widehat{\widehat{\mathrm{Z}}}_\lambda = \tilde{\psi}_\lambda \otimes \varphi_\lambda \tag{3.63}$$

задовольняє важливі умови $(\tilde{L}_{\mathrm{ext}} \otimes 1)\widehat{\widehat{\mathrm{Z}}}_\lambda = \lambda\widehat{\widehat{\mathrm{Z}}}_\lambda$ та $(1 \otimes L^*)\widehat{\widehat{\mathrm{Z}}}_\lambda = \lambda\widehat{\widehat{\mathrm{Z}}}_\lambda$ для будь-якого $\lambda \in \sigma(\tilde{L}) \cap \bar{\sigma}(L^*)$. Для оператора $\mathrm{K}_+(\mathbf{\Omega}) \in \mathcal{B}_\infty^+(\mathcal{H})$ знаходимо відповідне інтегральне зображення

$$\mathrm{K}_+(\mathbf{\Omega}) = -\int\limits_{S^{(m)}_{+,x}} dy \int\limits_{\sigma(\widetilde{L})\cap\bar{\sigma}(L^*)} d\rho_{\sigma,+}(\lambda)\tilde{\psi}_\lambda(x)\bar{\varphi}^{\intercal}_\lambda(y)(\cdot), \tag{3.64}$$

яке, очевидно, задовольняє умову конгруентності (3.13), якщо покласти

$$d\mu_{\mathcal{P}_{x,+}}(y) = \chi_{S^{(m)}_{+,x}} dy, \tag{3.65}$$

з характеристичною функцією $\chi_{S^{(m)}_{+,x}}$ носія міри $d\mu_{\mathcal{P}_x}$, тобто $\operatorname{supp}\ \mu_{\mathcal{P}_{x,+}} := S^{(m)}_{+,x} \in \mathcal{K}(Q)$.

Подібні міркування можна застосувати для опису структури другого факторизуючого оператора $\mathrm{K}_-(\mathbf{\Omega}) \in \mathcal{B}^-_\infty(\mathcal{H})$:

$$\mathrm{K}_-(\mathbf{\Omega}) = -\int\limits_{S^{(m)}_{-,x}} dy \int\limits_{\sigma(\widetilde{L})\cap\bar{\sigma}(L^*)} d\rho_{\sigma,-}(\lambda)\tilde{\psi}_\lambda(x)\bar{\varphi}^{\intercal}_\lambda(y)(\cdot), \tag{3.66}$$

де, за означенням, $S^{(m)}_{-,x} \subset Q$, $x \in Q$, $\operatorname{supp}\mu_{\mathcal{P}_{x,-}} := S^{(m)}_{-,x} \in \mathcal{K}(Q)$ — носій скінченної міри Бореля $\mu_{\mathcal{P}_{x,-}}$, заданої на борелівських підмножинах $Q \subset \mathbb{R}^m$ і такої, що відповідає оператору (3.66).

Природно взяти $x \in \partial S^{(m)}_{+,x} \cap \partial S^{(m)}_{-,x}$, що є внутрішньою точкою межі

$$\partial S^{(m)}_{+,x} \backslash \partial Q = -\partial S^{(m)}_{-,x} \backslash \partial Q := \sigma^{(m-1)}_x \in \mathcal{K}(Q),$$

де $\mathcal{K}(Q)$ — деякий сингулярний комплекс, породжений відкритою множиною $Q \subset \mathbb{R}^m$. Таким чином, для оператора Фредгольма $\mathbf{\Omega} := 1 + \Phi \in \mathrm{V}_f$ відповідна факторизація запишеться як

$$\mathbf{\Omega} = (1 + \mathrm{K}_+(\mathbf{\Omega}))^{-1}(1 + \mathrm{K}_-(\mathbf{\Omega})) := \mathbf{\Omega}_+^{-1}\mathbf{\Omega}_-, \tag{3.67}$$

де інтегральні оператори $\mathrm{K}_\pm(\mathbf{\Omega}) \in \mathcal{B}^\pm_\infty(\mathcal{H})$ задані виразами (3.64) і (3.66), параметризованими біжучою внутрішньою точкою $x \in Q$.

4. Диференціально-геометрична структура узагальненої тотожності Лагранжа і асоційовані оператори трансмутації Дельсарта. У пункті 3 ми вивчали спектральну структуру вольтеррівських операторів трансмутації Дельсарта $\mathbf{\Omega}_\pm$, які факторизують деякий оператор Фредгольма $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_+^{-1}\mathbf{\Omega}_-$, і розглядали їх зв'язок із підходом робіт [27, 46]. Зокрема, ми показали, що існують деякі міри Бореля $\mu_{\mathcal{P}_{x,\pm}}$, локалізовані на гіперповерхнях $S^{(m)}_{\pm,x} \in \mathcal{K}(Q)$ і природно пов'язані з відповідними інтегральними операторами $\mathrm{K}_\pm(\mathbf{\Omega})$, ядра $\hat{\mathrm{K}}_\pm(\mathbf{\Omega}) \in \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$ яких є конгруентними до заданої пари диференціальних операторів $(L, \tilde{L}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$, що задовольняють співвідношення (3.24). Вивчимо тепер деякі диференціально-геометричні властивості тотожності Лагранжа, асоційованої з двома диференціальними операторами L та $\tilde{L}$ в $\mathcal{H}$, і опишемо за допомогою сконструйованих ядер інтегральних операторів відповідні оператори трансмутації Дельсарта у спектральному вигляді, як це зроблено у пункті 3.

Розглянемо багатовимірний лінійний диференціальний оператор $\mathrm{L}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ степеня $n(\mathrm{L}) \in \mathbb{Z}_+$ вигляду

$$\mathrm{L}(x|\partial) := \sum_{|\alpha|=0}^{n(\mathrm{L})} a_\alpha(x)\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}, \tag{4.1}$$

який задано на щільній області визначення $D(\mathrm{L}) \subset \mathcal{H}$, де $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ — мультиіндекс, $x \in \mathbb{R}^m$ та $a_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m; \mathrm{End}\,\mathbb{C}^N)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$. Розглянемо узагальнену тотожність Лагранжа для диференціального виразу (4.1):

$$\langle \mathrm{L}^* \varphi, \psi \rangle - \langle \varphi, \mathrm{L}\psi \rangle = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \frac{\partial}{\partial x_i} Z_i[\varphi, \psi], \tag{4.2}$$

де $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H}^* \times \mathcal{H}$, відображення $Z_i : \mathcal{H}^* \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, $i = \overline{1, m}$, півторалінійні та $\mathrm{L}^* : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}^*$ — відповідний формально спряжений за Лагранжем до (4.1) диференціальний вираз, тобто

$$\mathrm{L}^*(x|\partial) := \sum_{|\alpha|=0}^{n(\mathcal{L})} (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \bar{a}_\alpha^\intercal(x).$$

Оскільки подальший аналіз буде ґрунтуватись на диференціально-геометричних конструкціях, асоційованих з диференціальними операторами на підмноговидах в $\mathbb{R}^m$ для довільних $m \in \mathbb{N}$, ми переформулюємо [75] тотожність Лагранжа (4.2) у термінах диференціальних форм. А саме, домножаючи тотожність (4.2) на звичайну орієнтовану міру Лебега $dx = \bigwedge_{j=\overrightarrow{1,m}} dx_j$, отримуємо

$$\big\langle \mathrm{L}^* \varphi, \psi \big\rangle dx - \langle \varphi, \mathrm{L}\psi \rangle dx = dZ^{(m-1)}[\varphi, \psi] \tag{4.3}$$

для $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H}^* \times \mathcal{H}$, де

$$Z^{(m-1)}[\varphi, \psi] := \sum_{i=1}^{m} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge Z_i[\varphi, \psi] dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_m \tag{4.4}$$

$-(m-1)$-диференціальна форма на $\mathbb{R}^m$.

Розглянемо всі такі пари $(\varphi(\lambda), \psi(\mu)) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_- \times \mathcal{H}_-$, $\lambda, \mu \in \Sigma$, для яких

$$\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_- \tag{4.5}$$

— звичайна трійка Гельфанда гільбертових просторів [2, 3]; замкнені підпростори $\mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_- \times \mathcal{H}_-$ певним чином асоційовані з операторами $\mathrm{L}, \mathrm{L}^* \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$; $\Sigma \in \mathbb{C}^p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, — деякий фіксований метризований простір параметрів, який має скінченну міру Бореля ρ, причому диференціальна форма (4.4) є точною, тобто існує множина $(m-2)$-диференціальних форм $\Omega^{(m-2)}\big[\varphi(\lambda), \psi(\mu)\big] \in \Lambda^{m-2}(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$, $\lambda, \mu \in \Sigma$, на $\mathbb{R}^m$, які задовольняють умову

$$Z^{(m-1)}\big[\varphi(\lambda), \psi(\mu)\big] = d\Omega^{(m-2)}\big[\varphi(\lambda), \psi(\mu)\big]. \tag{4.6}$$

Щоб виконувалась умова (4.6), потрібно розглянути замкнені підпростори $\mathcal{H}_0^*$ і $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_-$, які є розв'язками відповідних диференціальних рівнянь з деякими граничними умовами:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &:= \big\{\psi(\lambda) \in \mathcal{H}_- : \mathrm{L}\psi(\lambda) = 0,\ \psi(\lambda)|_{x\in\Gamma} = 0,\ \lambda \in \Sigma\big\}, \\ \mathcal{H}_0^* &:= \big\{\varphi(\lambda) \in \mathcal{H}_-^* : \mathrm{L}^*\varphi(\lambda) = 0,\ \varphi(\lambda)|_{x\in\Gamma} = 0,\ \lambda \in \Sigma\big\}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Трійка (4.5) дозволяє правильно знайти множину узагальнених власних функцій (4.7) для розширених операторів $\mathrm{L}, \mathrm{L}^* : \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_-$, якщо $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ вибрати як деяку $(n-1)$-вимірну кусково-гладку гіперповерхню, вкладену в конфігураційний простір $\mathbb{R}^m$. Може, зокрема, виявитись [23, 26, 36, 38, 77], що граничні умови не є необхідними.

Позначимо через $S_\pm(\sigma_x^{(m-2)}, \sigma_{x_0}^{(m-2)}) \subset M$ деякі дві $(m-1)$-вимірні кусково-гладкі гіперповерхні в M, що не перетинаються, де $M := \bar{\mathbb{R}}^m$ — деяка топологічна компактифікація $\mathbb{R}^m$, такі, що мають спільну межу, тобто $\partial S_\pm\left(\sigma_x^{(m-2)}, \sigma_{x_0}^{(m-2)}\right) = \sigma_x^{(m-2)} - \sigma_{x_0}^{(m-2)}$ та $\partial\left(S_+\left(\sigma_x^{(m-2)}, \sigma_{x_0}^{(m-2)}\right) \cup S_-\left(\sigma_x^{(m-2)}, \sigma_{x_0}^{(m-2)}\right)\right) = \varnothing$, де $\sigma_x^{(m-2)}$ і $\sigma_{x_0}^{(m-2)} \subset M$ — деякі $(m-2)$-вимірні гомологічні цикли з ланцюгового комплексу $\mathcal{K}(M)$, і формально параметризовані двома точками $x, x_0 \in M$, асоційованими певним чином з вибраною вище крайовою гіперповерхнею $\Gamma \subset M$. З (4.6), ґрунтуючись на загальній теоремі Стокса [19, 26, 77, 80], отримуємо

$$\begin{gathered}
\int\limits_{S_\pm\left(\sigma_x^{(m-2)}, \sigma_{x_0}^{(m-2)}\right)} Z^{(m-1)}\big[\varphi(\lambda), \psi(\mu)\big] = \int\limits_{\partial S_\pm\left(\sigma_x^{(m-2)}, \sigma_{x_0}^{(m-2)}\right)} \Omega^{(m-2)}\big[\varphi(\lambda), \psi(\mu)\big] = \\
= \int\limits_{\sigma_x^{(m-2)}} \Omega^{(m-2)}\big[\varphi(\lambda), \psi(\mu)\big] - \int\limits_{\sigma_{x_0}^{(m-2)}} \Omega^{(m-2)}\big[\varphi(\lambda), \psi(\mu)\big] := \\
:= \Omega_x(\lambda, \mu) - \Omega_{x_0}(\lambda, \mu), \\
\int\limits_{S_\pm\left(\sigma_x^{(m-2)}, \sigma_{x_0}^{(m-2)}\right)} \bar{Z}^{(m-1),\intercal}\big[\varphi(\lambda), \psi(\mu)\big] = \int\limits_{\partial S_\pm\left(\sigma_x^{(m-2)}, \sigma_{x_0}^{(m-2)}\right)} \bar{\Omega}^{(m-2),\intercal}\big[\varphi(\lambda), \psi(\mu)\big] = \\
= \int\limits_{\sigma_x^{(m-2)}} \bar{\Omega}^{(m-2),\intercal}\big[\varphi(\lambda), \psi(\mu)\big] - \int\limits_{\sigma_{x_0}^{(m-2)}} \bar{\Omega}^{(m-2),\intercal}\big[\varphi(\lambda), \psi(\mu)\big] := \\
:= \Omega_x^{\circledast}(\lambda, \mu) - \Omega_{x_0}^{\circledast}(\lambda, \mu)
\end{gathered} \tag{4.8}$$

для множини функцій $(\varphi(\lambda), \psi(\mu)) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_0$, $\lambda, \mu \in \Sigma$, з операторними ядрами $\Omega_x(\lambda, \mu)$, $\Omega_x^{\circledast}(\lambda, \mu)$ та $\Omega_{x_0}(\lambda, \mu)$, $\Omega_x^{\circledast}(\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \Sigma$, що діють у гільбертовому просторі $L_2^{(\rho)}(\Sigma; \mathbb{C})$. Будемо вважати, що ці ядра невироджені в $L_2^{(\rho)}(\Sigma; \mathbb{C})$ і задовольняють умови гомотопії

$$\lim_{x \to x_0} \Omega_x(\lambda, \mu) = \Omega_{x_0}(\lambda, \mu), \qquad \lim_{x \to x_0} \Omega_x^{\circledast}(\lambda, \mu) = \Omega_{x_0}^{\circledast}(\lambda, \mu).$$

Задамо дії двох пар лінійних операторів трансмутації Дельсарта $\mathbf{\Omega}_\pm : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ та $\mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast} : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}^*$ на фіксованій множині функцій $(\varphi(\lambda), \psi(\mu)) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_0$, $\lambda, \mu \in \Sigma$:

$$\begin{gathered}
\tilde{\psi}(\lambda) = \mathbf{\Omega}_\pm(\psi(\lambda)) := \int\limits_\Sigma d\rho(\eta) \int\limits_\Sigma d\rho(\mu) \psi(\eta) \Omega_x^{-1}(\eta, \mu) \Omega_{x_0}(\mu, \lambda), \\
\tilde{\varphi}(\lambda) = \mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast}(\varphi(\lambda)) := \int\limits_\Sigma d\rho(\eta) \int\limits_\Sigma d\rho(\mu) \varphi(\eta) \Omega_x^{\circledast,-1}(\mu, \eta) \Omega_{x_0}^{\circledast}(\lambda, \mu).
\end{gathered} \tag{4.9}$$

Використовуючи вирази (4.9), на основі методу варіації сталих та довільності вибраної множини функцій $(\varphi(\lambda), \psi(\mu)) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_0$, $\lambda, \mu \in \Sigma$, можна легко відновити відповідні вирази для операторів $\mathbf{\Omega}_{\pm}$ та $\mathbf{\Omega}_{\pm}^{\circledast}\colon \mathcal{H}_{-}\to\mathcal{H}_{-}$:

$$
\begin{gathered}
\tilde{\psi}(\lambda)=\int\limits_{\Sigma}d\rho(\eta)\int\limits_{\Sigma}d\rho(\mu)\psi(\eta)\Omega_x(\eta,\mu)\Omega_x^{-1}(\mu,\lambda)-\\
-\int\limits_{\Sigma}d\rho(\eta)\int\limits_{\Sigma}d\rho(\mu)\psi(\eta)\Omega_x^{-1}(\eta,\mu)\int\limits_{S_{\pm}\left(\sigma_x^{(m-2)},\sigma_{x_0}^{(m-2)}\right)}Z^{(m-1)}\big[\varphi(\mu),\psi(\lambda)\big]=\\
=\psi(\lambda)-\int\limits_{\Sigma}d\rho(\eta)\int\limits_{\Sigma}d\rho(\mu)\int\limits_{\Sigma}d\rho(\nu)\int\limits_{\Sigma}d\rho(\xi)\psi(\eta)\Omega_x^{-1}(\eta,\nu)\times\\
\times\Omega_{x_0}(\nu,\xi)\Omega_{x_0}^{-1}(\xi,\mu)\int\limits_{S_{\pm}\left(\sigma_x^{(m-2)},\sigma_{x_0}^{(m-2)}\right)}Z^{(m-1)}\big[\varphi(\mu),\psi(\lambda)\big]=\\
=\psi(\lambda)-\int\limits_{\Sigma}d\rho(\eta)\int\limits_{\Sigma}d\rho(\mu)\tilde{\psi}(\eta)\Omega_{x_0}^{-1}(\eta,\mu)\int\limits_{S_{\pm}\left(\sigma_x^{(m-2)},\sigma_{x_0}^{(m-2)}\right)}Z^{(m-1)}\big[\varphi(\mu),\psi(\lambda)\big]=\\
=\left(\mathbf{1}-\int\limits_{\Sigma}d\rho(\eta)\int\limits_{\Sigma}d\rho(\mu)\tilde{\psi}(\eta)\Omega_{x_0}^{-1}(\eta,\mu)\int\limits_{S_{\pm}\left(\sigma_x^{(m-2)},\sigma_{x_0}^{(m-2)}\right)}Z^{(m-1)}\big[\varphi(\mu),(\cdot)\big]\right)\psi(\lambda):=\\
:=\mathbf{\Omega}_{\pm}\cdot\psi(\lambda),\\
\tilde{\varphi}(\lambda)=\int\limits_{\Sigma}d\rho(\eta)\int\limits_{\Sigma}d\rho(\mu)\varphi(\eta)\Omega_x^{\circledast,-1}(\mu,\eta)\Omega_x^{\circledast}(\lambda,\mu)-\\
-\int\limits_{\Sigma}d\rho(\eta)\int\limits_{\Sigma}d\rho(\mu)\varphi(\eta)\Omega_x^{\circledast,-1}(\mu,\eta)\int\limits_{S_{\pm}\left(\sigma_x^{(m-2)},\sigma_{x_0}^{(m-2)}\right)}\bar{Z}^{(m-1),\intercal}\big[\varphi(\lambda),\psi(\mu)\big]=\\
=\varphi(\lambda)-\int\limits_{\Sigma}d\rho(\eta)\int\limits_{\Sigma}d\rho(\nu)\int\limits_{\Sigma}d\rho(\xi)\int\limits_{\Sigma}d\rho(\mu)\varphi(\eta)\Omega_x^{\circledast,-1}(\xi,\eta)\times\\
\times\Omega_{x_0}^{\circledast}(\nu,\xi)\Omega_{x_0}^{\circledast,-1}(\mu,\nu)\int\limits_{S_{\pm}\left(\sigma_x^{(m-2)},\sigma_{x_0}^{(m-2)}\right)}\bar{Z}^{(m-1),\intercal}\big[\varphi(\lambda),\psi(\mu)\big]=\\
=\left(\mathbf{1}-\int\limits_{\Sigma}d\rho(\eta)\int\limits_{\Sigma}d\rho(\mu)\tilde{\varphi}(\eta)\Omega_{x_0}^{\circledast,-1}(\mu,\eta)\int\limits_{S_{\pm}\left(\sigma_x^{(m-2)},\sigma_{x_0}^{(m-2)}\right)}\bar{Z}^{(m-1),\intercal}\big[(\cdot),\psi(\mu)\big]\right)\varphi(\lambda):=\\
:=\mathbf{\Omega}_{\pm}^{\circledast}\cdot\varphi(\lambda),
\end{gathered}
\tag{4.10}
$$

де, за визначенням, вирази

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}_{\pm} &:= \mathbf{1} - \int\limits_{\Sigma} d\rho(\eta) \int\limits_{\Sigma} d\rho(\mu)\tilde{\psi}(\eta)\Omega_{x_0}^{-1}(\eta,\mu) \int\limits_{S_{\pm}\left(\sigma_x^{(m-2)},\sigma_{x_0}^{(m-2)}\right)} Z^{(m-1)}\big[\varphi(\mu),(\cdot)\big],\\ \mathbf{\Omega}_{\pm}^{\circledast} &:= \mathbf{1} - \int\limits_{\Sigma} d\rho(\eta) \int\limits_{\Sigma} d\rho(\mu)\tilde{\varphi}(\eta)\Omega_{x_0}^{\circledast,-1}(\mu,\eta) \int\limits_{S_{\pm}\left(\sigma_x^{(m-2)},\sigma_{x_0}^{(m-2)}\right)} \bar{Z}^{(m-1),\intercal}\big[(\cdot),\psi(\mu)\big]\end{aligned} \tag{4.11}$$

є багатовимірними інтегральними операторами типу Вольтерра. Слід зауважити, що елементи $(\varphi(\lambda),\psi(\mu)) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_0$ і $(\tilde{\varphi}(\lambda),\tilde{\psi}(\mu)) \in \tilde{\mathcal{H}}_0^* \times \tilde{\mathcal{H}}_0,\ \lambda,\mu \in \Sigma$, в операторних виразах (4.11) є довільними, але фіксованими. Тому оператори (4.11) розширюють свою дію (4.9) з фіксованої пари функцій $(\varphi(\lambda),\psi(\mu)) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_0,\ \lambda,\mu \in \Sigma$, на увесь функціональний простір $\mathcal{H}^* \times \mathcal{H}$.

Внаслідок симетричності виразів (4.9) та (4.11) відносно двох множин функцій $(\varphi(\lambda),\psi(\mu)) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_0$ та $(\tilde{\varphi}(\lambda),\tilde{\psi}(\mu)) \in \tilde{\mathcal{H}}_0^* \times \tilde{\mathcal{H}}_0,\ \lambda,\mu \in \Sigma$, має місце така лема.

Лема 4.1. *Оператори* (4.11) *є обмеженими та оборотними виразами типу Вольтерра, обернені до яких задаються таким чином*:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}_{\pm}^{-1} &:= \mathbf{1} - \int\limits_{\Sigma} d\rho(\eta) \int\limits_{\Sigma} d\rho(\mu)\psi(\eta)\tilde{\Omega}_{x_0}^{-1}(\eta,\mu) \int\limits_{S_{\pm}\left(\sigma_x^{(m-2)},\sigma_{x_0}^{(m-2)}\right)} Z^{(m-1)}\big[\tilde{\varphi}(\mu),(\cdot)\big],\\ \mathbf{\Omega}_{\pm}^{\circledast,-1} &:= \mathbf{1} - \int\limits_{\Sigma} d\rho(\eta) \int\limits_{\Sigma} d\rho(\mu)\varphi(\eta)\Omega_{x_0}^{\circledast,-1}(\mu,\eta) \int\limits_{S_{\pm}\left(\sigma_x^{(m-2)},\sigma_{x_0}^{(m-2)}\right)} \bar{Z}^{(m-1),\intercal}\big[(\cdot),\tilde{\psi}(\mu)\big],\end{aligned} \tag{4.12}$$

де дві множини функцій $(\varphi(\lambda),\psi(\mu)) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_0$ *і* $(\tilde{\varphi}(\lambda),\tilde{\psi}(\mu)) \in \tilde{\mathcal{H}}_0^* \times \tilde{\mathcal{H}}_0,\ \lambda,\mu \in \Sigma$, *задані довільно, але є фіксованими.*

Щоб вирази (4.12) були узгоджені з відображеннями (4.9), їх дія повинна, очевидно, задовольняти умови

$$\begin{aligned}\psi(\lambda) = \mathbf{\Omega}_{\pm}^{-1}\tilde{\psi}(\lambda) &= \int\limits_{\Sigma} d\rho(\eta) \int\limits_{\Sigma} d\rho(\mu)\tilde{\psi}(\eta)\tilde{\Omega}_x^{-1}(\eta,\mu)\tilde{\Omega}_{x_0}(\mu,\lambda),\\ \varphi(\lambda) = \mathbf{\Omega}_{\pm}^{\circledast,-1}\tilde{\varphi}(\lambda) &= \int\limits_{\Sigma} d\rho(\eta) \int\limits_{\Sigma} d\rho(\mu)\tilde{\varphi}(\eta)\tilde{\Omega}_x^{\circledast,-1}(\mu,\eta)\tilde{\Omega}_{x_0}^{\circledast}(\lambda,\mu),\end{aligned} \tag{4.13}$$

де для будь-якої множини функцій $(\varphi(\lambda),\psi(\mu)) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_0$ і $(\tilde{\varphi}(\lambda),\tilde{\psi}(\mu)) \in \tilde{\mathcal{H}}_0^* \times \tilde{\mathcal{H}}_0,\ \lambda,\mu \in \Sigma$, виконується співвідношення

$$\begin{gathered}\big(\langle \tilde{\mathrm{L}}^*\tilde{\varphi}(\lambda),\tilde{\psi}(\mu)\rangle - \langle \tilde{\varphi}(\lambda),\tilde{\mathrm{L}}\tilde{\psi}(\mu)\rangle\big)dx = d\big(\tilde{Z}^{(m-1)}\big[\tilde{\varphi}(\lambda),\tilde{\psi}(\mu)\big]\big),\\ \tilde{Z}^{(m-1)}\big[\tilde{\varphi}(\lambda),\tilde{\psi}(\mu)\big] = d\tilde{\Omega}^{(m-2)}\big[\tilde{\varphi}(\lambda),\tilde{\psi}(\mu)\big],\end{gathered} \tag{4.14}$$

якщо

$$\tilde{\mathrm{L}} := \mathbf{\Omega}_{\pm}\mathrm{L}\mathbf{\Omega}_{\pm}^{-1}, \qquad \tilde{\mathrm{L}}^* := \mathbf{\Omega}_{\pm}^{\circledast}\mathrm{L}^*\mathbf{\Omega}_{\pm}^{\circledast,-1}. \tag{4.15}$$

Крім того, вирази для операторів $\tilde{\mathrm{L}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ і $\tilde{\mathrm{L}}^* : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}^*$ не залежать від вибору індексів операторів $\mathbf{\Omega}_{+}$ або $\mathbf{\Omega}_{-}$ і є диференціальними. Оскільки остання умова задає, власне, оператори трансмутації Дельсарта (4.12), справедливою є така теорема.

Теорема 4.1. *Пара* $(\tilde{\mathrm{L}}, \tilde{\mathrm{L}}^*)$ *операторних виразів* $\tilde{\mathrm{L}} := \mathbf{\Omega}_\pm \mathrm{L} \mathbf{\Omega}_\pm^{-1}$ *та* $\tilde{\mathrm{L}}^* := \mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast} \mathrm{L}^* \mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast,-1}$, *що діють у просторі* $\mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$, *є суто диференціальною для будь-яких вибраних належним чином гіперповерхонь* $S_\pm\left(\sigma_x^{(m-2)}, \sigma_{x_0}^{(m-2)}\right) \in \mathcal{K}(M)$ *з симпліціального комплексу* $\mathcal{K}(M)$.

Доведення. Необхідно показати, що формальні псевдодиференціальні вирази, які відповідають операторам $\tilde{\mathrm{L}}$ і $\tilde{\mathrm{L}}^*$, не містять інтегральних елементів. Використовуючи ідею робіт [52, 64], можна сформулювати таку лему.

Лема 4.2. *Псевдодиференціальний оператор* $\mathrm{L}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *є суто диференціальним тоді і тільки тоді, коли має місце рівність*

$$\left(h, \left(\mathrm{L}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\right)_+ f\right) = \left(h, \mathrm{L}_+ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f\right) \tag{4.16}$$

для будь-якого $|\alpha| \in \mathbb{Z}_+$ *та всіх* $(h, f) \in \mathcal{H}^* \times \mathcal{H}$, *тобто умова* (4.16) *еквівалентна рівності* $\mathrm{L}_+ = \mathrm{L}$, *де знак* $(\ldots)_+$ *позначає суто диференціальну частину виразу в дужках.*

На основі цієї леми і виразів для операторів (4.11), як і у роботі [64], можна показати, що оператори $\tilde{\mathrm{L}}$ і $\tilde{\mathrm{L}}^*$, залежні, відповідно, тільки від двох гомологічних циклів $\sigma_x^{(m-2)}$, $\sigma_{x_0}^{(m-2)} \in \mathcal{K}(M)$ з симпліціального ланцюгового комплексу $\mathcal{K}(M)$, параметризованих точками $x, x_0 \in \mathbb{R}^m$, та від двох множин функцій $(\varphi(\lambda), \psi(\mu)) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_0$ і $(\tilde{\varphi}(\lambda), \tilde{\psi}(\mu)) \in \tilde{\mathcal{H}}_0^* \times \tilde{\mathcal{H}}_0$, $\lambda, \mu \in \Sigma$, є суто диференціальними, що завершує доведення теореми.

Диференціально-геометричну конструкцію, запропоновану вище, можна, зокрема, нетривіально узагальнити на випадок $m \in \mathbb{Z}_+$ комутуючих між собою диференціальних операторів у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Ця конструкція веде до нового підходу до теорії операторів трансмутації Дельсарта на основі узагальнених диференціально-геометричних і топологічних методів теорії де Рама – Ходжа. Ці аспекти будуть розглядатись у наступному пункті.

5. Диференціально-геометрична і топологічна структура операторів трансмутації типу Дельсарта: узагальнена теорія де Рама – Ходжа. В цьому пункті ми пояснимо диференціально-геометричну і топологічну природу спектральних результатів, отриманих вище, які узагальнюються для множини $\mathcal{L}$ комутуючих лінійних диференціальних операторів, асоційованої за Дельсартом з іншою множиною $\tilde{\mathcal{L}}$ комутуючих диференціальних операторів в $\mathcal{H}$. Ці результати ґрунтуються на теорії спеціальних узагальнених диференціальних комплексів де Рама – Ходжа [19, 20, 77] і ведуть до ефективних аналітичних виразів для відповідних операторів трансмутації Дельсарта, заданих у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. В результаті ми отримуємо також інтегрально-операторну структуру операторів трансмутації Дельсарта для поліноміальних в'язок диференціальних операторів в $\mathcal{H}$, які мають багато застосувань як в спектральній теорії багатовимірних операторних в'язок, так і в теорії солітонів [24, 44, 50, 52 – 54, 57, 61] багатовимірних інтегровних динамічних систем на функціональних многовидах, що мають широке застосування у сучасній математичній фізиці.

Позначимо, як і раніше, через $M := \bar{\mathbb{R}}^m$ компактифікований метричний простір розмірності $m = \dim M \in \mathbb{Z}_+$ (без межі) і задамо деяку скінченну множину $\mathcal{L}$ гладких комутуючих один із одним лінійних диференціальних операторів за змінною $x \in M$:

$$\mathrm{L}_j(x|\partial) := \sum_{|\alpha|=0}^{n(L_j)} a_\alpha^{(j)}(x) \partial^{|\alpha|} / \partial x^\alpha \tag{5.1}$$

із коефіцієнтами класу Шварца $a_\alpha^{(j)} \in \mathcal{S}(M; \operatorname{End}\mathbb{C}^N),\ |\alpha| = \overline{0, n(\mathrm{L}_j)},\ n(\mathrm{L}_j) \in \mathbb{Z}_+,\ j = \overline{1,m}$, які діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H} := L_2(M; \mathbb{C}^N)$. Будемо вважати, що області визначення $D(\mathrm{L}_j) := D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{H},\ j = \overline{1,m}$, щільні в $\mathcal{H}$.

Розглянемо узагальнений оператор зовнішнього антидиференціювання $d_{\mathcal{L}} \colon \Lambda(M; \mathcal{H}) \to \Lambda(M; \mathcal{H})$, що діє в лінійному просторі векторних диференціальних форм Грасмана $\Lambda(M; \mathcal{H})$ таким чином: для будь-якого $\beta^{(k)} \in \Lambda^k(M; \mathcal{H}),\ k = \overline{0,m}$,

$$d_{\mathcal{L}}\beta^{(k)} := \sum_{j=1}^{m} dx_j \wedge \mathrm{L}_j(x; \partial)\beta^{(k)} \in \Lambda^{k+1}(M; \mathcal{H}). \tag{5.2}$$

Неважко встановити, що операція (5.2) у випадку $\mathrm{L}_j(x; \partial) := \partial/\partial x_j,\ j = \overline{1,m}$, збігається зі звичайним зовнішнім диференціюванням $d = \sum_{j=1}^{m} dx_j \wedge \partial/\partial x_j$ на векторному просторі Грасмана $\Lambda(M; \mathcal{H})$. Використовуючи операцію (5.2) на $\Lambda(M; \mathcal{H})$, можна побудувати узагальнений коланцюговий комплекс де Рама:

$$\mathcal{H} \to \Lambda^0(M; \mathcal{H}) \overset{d_{\mathcal{L}}}{\to} \Lambda^1(M; \mathcal{H}) \overset{d_{\mathcal{L}}}{\to} \ldots \overset{d_{\mathcal{L}}}{\to} \Lambda^m(M; \mathcal{H}) \overset{d_{\mathcal{L}}}{\to} 0. \tag{5.3}$$

Комплекс (5.3) має важливу властивість, яку сформулюємо у вигляді леми.

Лема 5.1. *Коланцюговий комплекс* (5.3) *є точним.*

Доведення безпосередньо випливає з рівності $d_{\mathcal{L}} d_{\mathcal{L}} = 0$, яка має місце згідно з комутативністю операторів (5.1).

Далі будемо частково дотримуватись ідей робіт [20, 71]. Диференціальна форма $\beta \in \Lambda(M; \mathcal{H})$ називається $d_{\mathcal{L}}$-замкненою, якщо $d_{\mathcal{L}}\beta = 0$, а форма $\gamma \in \Lambda(M; \mathcal{H})$ — $d_{\mathcal{L}}$-гомологічною нулю, якщо існує на M така форма $\omega \in \Lambda(M; \mathcal{H})$, що $\gamma = d_{\mathcal{L}}\omega$.

Розглянемо стандартну алгебраїчну зіркову операцію Ходжа:

$$\star \colon \Lambda^k(M; \mathcal{H}) \to \Lambda^{m-k}(M; \mathcal{H}), \quad k = \overline{0,m}, \tag{5.4}$$

як це зроблено у [8, 19, 20, 80]: якщо β належить $\Lambda^k(M; \mathcal{H})$, то форма $\star\beta \in \Lambda^{m-k}(M; \mathcal{H})$ є такою, що:

i) $(m-k)$-вимірний об'єм $|\star\beta|$ форми $\star\beta$ дорівнює k-вимірному об'єму $|\beta|$ форми β;

ii) m-вимірна міра $\bar{\beta}^{\intercal} \wedge \star\beta > 0$ при фіксованій орієнтації на M.

Задамо на векторному просторі $\Lambda(M; \mathcal{H})$ природний скалярний добуток: для будь-яких $\beta, \gamma \in \Lambda^k(M; \mathcal{H}),\ k = \overline{0,m}$,

$$(\beta, \gamma) := \int\limits_M \bar{\beta}^{\intercal} \wedge \star\gamma. \tag{5.5}$$

Згідно зі скалярним добутком (5.5), можна побудувати гільбертів простір

$$\mathcal{H}_\Lambda(M) := \overset{m}{\underset{k=0}{\oplus}} \mathcal{H}_\Lambda^k(M),$$

необхідний для подальшого викладу. Зауважимо також, що зіркова операція Ходжа має таку властивість: для будь-яких $\beta, \gamma \in \mathcal{H}_\Lambda^k(M),\ k = \overline{0,m}$,

$$(\beta, \gamma) = (\star\beta, \star\gamma), \tag{5.6}$$

тобто операція Ходжа $\star : \mathcal{H}_\Lambda(M) \to \mathcal{H}_\Lambda(M)$ є ізометричною і спряженою відносно скалярного добутку (5.5) операцією, що задовольняє умову $(\star)' = (\star)^{-1}$.

Позначимо через $d'_\mathcal{L}$ формально спряжений вираз до зовнішньої слабкої диференціальної операції $d_\mathcal{L} : \mathcal{H}_\Lambda(M) \to \mathcal{H}_\Lambda(M)$ у гільбертовому просторі $\mathcal{H}_\Lambda(M)$. Використовуючи операції $d'_\mathcal{L}$ та $d_\mathcal{L}$ в $\mathcal{H}_\Lambda(M)$, можна природним чином задати [8, 20, 80] узагальнений оператор Лапласа – Ходжа $\Delta_\mathcal{L} : \mathcal{H}_\Lambda(M) \to \mathcal{H}_\Lambda(M)$:

$$\Delta_\mathcal{L} := d'_\mathcal{L} d_\mathcal{L} + d_\mathcal{L} d'_\mathcal{L}. \tag{5.7}$$

Розглянемо форму $\beta \in \mathcal{H}_\Lambda(M)$, яка задовольняє рівність

$$\Delta_\mathcal{L}\beta = 0. \tag{5.8}$$

Таку форму назвемо гармонічною. Можна встановити, що гармонічна форма $\beta \in \mathcal{H}_\Lambda(M)$ задовольняє одночасно дві спряжені умови:

$$d'_\mathcal{L}\beta = 0, \qquad d_\mathcal{L}\beta = 0, \tag{5.9}$$

що безпосередньо випливають із (5.7) та (5.9).

Неважко перевірити, що диференціальна операція в $\mathcal{H}_\Lambda(M)$

$$d^*_\mathcal{L} := \star d'_\mathcal{L}(\star)^{-1} \tag{5.10}$$

задає також [19, 26, 77] звичайну зовнішню операцію антидиференціювання у просторі $\mathcal{H}_\Lambda(M)$. Дуальний до (5.3) коланцюговий комплекс

$$\mathcal{H} \to \Lambda^0(M;\mathcal{H}) \overset{d^*_\mathcal{L}}{\to} \Lambda^1(M;\mathcal{H}) \overset{d^*_\mathcal{L}}{\to} \ldots \overset{d^*_\mathcal{L}}{\to} \Lambda^m(M;\mathcal{H}) \overset{d^*_\mathcal{L}}{\to} 0, \tag{5.11}$$

очевидно, є також точним, оскільки властивість $d^*_\mathcal{L} d^*_\mathcal{L} = 0$ має місце згідно з означенням (5.7).

Позначимо через $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L})}(M)$ та $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*)}(M)$, $k = \overline{0,m}$, когомологічні групи відповідно $d_\mathcal{L}$-замкнених та $d^*_\mathcal{L}$-замкнених диференціальних форм, а через $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L})}(M)$, $k = \overline{0,m}$, абелеві групи гармонічних диференціальних форм із гільбертових підпросторів $\mathcal{H}^k_\Lambda(M)$, $k = \overline{0,m}$.

Задамо також звичайну впорядковану послідовність [2] додатних та від'ємних гільбертових просторів диференціальних форм

$$\mathcal{H}^k_{\Lambda,+}(M) \subset \mathcal{H}^k_\Lambda(M) \subset \mathcal{H}^k_{\Lambda,-}(M) \tag{5.12}$$

і відповідні впорядковані послідовності гільбертових підпросторів для гармонічних форм

$$\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L}),+}(M) \subset \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L})}(M) \subset \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L}),-}(M) \tag{5.13}$$

та когомологічних груп

$$\begin{gathered} \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M) \subset \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L})}(M) \subset \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M), \\ \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*),+}(M) \subset \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*)}(M) \subset \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M) \end{gathered} \tag{5.14}$$

для будь-якого $k = \overline{0,m}$. Вважаємо також, що оператор Лапласа – Ходжа (5.7) є еліптичним в $\mathcal{H}^0_\Lambda(M)$. Виходячи з міркувань робіт [8, 19, 77], можна сформулювати дещо узагальнену теорему де Рама – Ходжа.

Теорема 5.1. *Групи гармонічних форм* $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L}),-}(M)$, $k=\overline{0,m}$, *ізоморфні до груп когомологій* $(H^k(M;\mathbb{C}))^{\Sigma}$, $k=\overline{0,m}$, *де* $H^k(M;\mathbb{C})$ — k*-та когомологічна група многовиду* M *з комплексними коефіцієнтами*, $\Sigma\subset\mathbb{C}^p$ — *множина спектральних параметрів, які позначають лінійний простір незалежних* $d^*_{\mathcal{L}}$*-замкнених* 0*-форм з* $\mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M)$, *і мають місце такі розклади в прямі суми*:

$$\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L}),-}(M)\oplus\Delta\mathcal{H}^k_{-}(M)=\mathcal{H}^k_{\Lambda,-}(M)=\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L}),-}(M)\oplus d_{\mathcal{L}}\mathcal{H}^{k-1}_{\Lambda,-}(M)\oplus d'_{\mathcal{L}}\mathcal{H}^{k+1}_{\Lambda,-}(M) \quad (5.15)$$

для будь-якого $k=\overline{0,m}$.

Інший варіант подібного твердження був сформульований у [71] і є узагальненою теоремою де Рама – Ходжа.

Теорема 5.2 (див. [71]). *Узагальнені групи когомологій* $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M)$, $k=\overline{0,m}$, *ізоморфні, відповідно, до груп когомологій* $(H^k(M;\mathbb{C}))^{\Sigma}$, $k=\overline{0,m}$.

Доведення цієї теореми ґрунтується на деякій спеціальній послідовності [71] диференціальних тотожностей типу Лагранжа. Задамо замкнені підпростори

$$\mathcal{H}^*_0:=\left\{\varphi^{(0)}(\lambda)\in\mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M): d^*_{\mathcal{L}}\varphi^{(0)}(\lambda)=0,\ \varphi^{(0)}(\lambda)|_{\Gamma}=0,\ \lambda\in\Sigma\right\} \quad (5.16)$$

для деякої гладкої $(m-1)$-вимірної гіперповерхні $\Gamma\subset M$ та $\Sigma\subset\big(\sigma(\mathcal{L})\cap\bar{\sigma}(\mathcal{L}^*)\big)\times\Sigma_\sigma\subset\mathbb{C}^p$, де $\mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M)$ — впорядкована когомологічна група нульового порядку [2, 3] з ланцюга гільбертових просторів (5.14), $\sigma(\mathcal{L})$ і $\sigma(\mathcal{L}^*)$ — відповідні спектри множини операторів $\mathcal{L}$ та $\mathcal{L}^*$. Вважаємо, що розмірність $\dim\mathcal{H}^*_0=\operatorname{card}\Sigma$ є відомою.

Наступна лема є фундаментальною для доведення теореми 5.2.

Лема 5.2 (див. [71]). *Існують множина диференціальних* $(k+1)$*-форм*

$$Z^{(k+1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda),d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}\big]\in\Lambda^{k+1}(M;\mathcal{H}),\quad k=\overline{0,m},$$

та множина диференціальних k*-форм*

$$Z^{(k)}[\varphi^{(0)}(\lambda),\psi^{(k)}]\in\Lambda^k(M;\mathcal{C}),\quad k=\overline{0,m},$$

параметризованих спектральною множиною $\Sigma\ni\lambda$ *і півторалінійних щодо* $\big(\varphi^{(0)}(\lambda),\psi^{(k)}\big)\in\in\mathcal{H}^*_0\times\mathcal{H}^k_{\Lambda,-}(M)$ *таких, що*

$$Z^{(k+1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda),d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}\big]=dZ^{(k)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda),\psi^{(k)}\big] \quad (5.17)$$

для всіх $k=\overline{0,m}$ *та* $\lambda\in\Sigma$.

Доведення ґрунтується на узагальненій тотожності типу Лагранжа, яка має місце для будь-якої пари $(\varphi^{(0)}(\lambda),\psi^{(k)})\in\mathcal{H}^*_0\times\mathcal{H}^k_{\Lambda,-}(M)$:

$$0=\big\langle d^*_{\mathcal{L}}\varphi^{(0)}(\lambda),\star(\psi^{(k)}\wedge\bar{\gamma})\big\rangle=$$

$$=\big\langle \star\, d'_{\mathcal{L}}(\star)^{-1}\varphi^{(0)}(\lambda),\star(\psi^{(k)}\wedge\bar{\gamma})\big\rangle=$$

$$=\big\langle d'_{\mathcal{L}}(\star)^{-1}\varphi^{(0)}(\lambda),\psi^{(k)}\wedge\bar{\gamma}\big\rangle=$$

$$=\big\langle(\star)^{-1}\varphi^{(0)}(\lambda),d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}\wedge\bar{\gamma}\big\rangle+Z^{(k+1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda),d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}\big]\wedge\bar{\gamma}=$$

$$= \langle (\star)^{-1}\varphi^{(0)}(\lambda), d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)} \wedge \bar{\gamma}\rangle + dZ^{(k)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(k)}\big] \wedge \bar{\gamma}, \tag{5.18}$$

де $Z^{(k+1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}\big] \in \Lambda^{k+1}(M;\mathbb{C}),\ k=\overline{0,m}$, і $Z^{(k)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(k)}\big] \in \Lambda^{k-1}(M;\mathbb{C}),\ k = \overline{0,m}$, — деякі півторалінійні диференціальні форми, параметризовані елементами $\lambda \in \Sigma$, а $\bar{\gamma} \in \Lambda^{m-k-1}(M;\mathbb{C})$ — довільна стала $(m-k-1)$-форма. Тому півторалінійні диференціальні $(k{+}1)$-форми $Z^{(k+1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}\big] \in \Lambda^{k+1}(M;\mathbb{C}),\ k=\overline{0,m}$, та k-форми $Z^{(k)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(k)}\big] \in \Lambda^{k}(M;\mathbb{C}),\ k=\overline{0,m},\ \lambda\in\Sigma$, задовольняють умови даної леми.

На основі леми 5.2 можна побудувати ізоморфізм груп когомологій, про який йдеться у теоремі 5.2. Зокрема, згідно з [71], розглянемо деяке симпліціальне [19, 77] розбиття $\mathcal{K}(M)$ многовиду M і введемо лінійні відображення $B_\lambda^{(k)}: \mathcal{H}^k_{\Lambda,-}(M) \to C_k(M;\mathbb{C})),\ k=\overline{0,m},\ \lambda\in\Sigma$, де $C_k(M;\mathbb{C}),\ k=\overline{0,m}$, — відповідні вільні абелеві групи над полем $\mathbb{C}$, породжені всіма k-ланцюгами симплексів $S^{(k)} \in C_k(M;\mathbb{C}),\ k=\overline{0,m}$, з симпліціального комплексу $\mathcal{K}(M)$:

$$B_\lambda^{(k)}(\psi^{(k)}) := \sum_{S^{(k)}\in C_k(M;\mathbb{C}))} S^{(k)} \int\limits_{S^{(k)}} Z^{(k)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(k)}\big], \tag{5.19}$$

де $\psi^{(k)} \in \mathcal{H}^k_\Lambda(M),\ k=\overline{0,m}$. За допомогою відображень (5.19) сформулюємо таку теорему.

Теорема 5.3 (див. [71]). *Множина лінійних відображень* (5.19), *параметризованих елементами* $\lambda\in\Sigma$, *задає ізоморфізм груп когомологій із теореми* 5.2.

Доведення можна провести за допомогою відображень (5.19), розглянувши групи когомологій $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M)$ і гомологій $H_k(M;\mathbb{C})$ многовиду M для кожного $k=\overline{0,m}$. Якщо взяти елемент $\psi^{(k)} := \psi^{(k)}(\mu) \in \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M),\ k=\overline{0,m}$, який розв'язує рівняння $d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}(\mu)=0$, де $\mu\in\Sigma_k$ — деяка множина спектральних параметрів, які позначають елементи підпростору $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M)$, то з (5.19) і тотожності (5.18) легко отримати

$$dZ^{(k)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(k)}(\mu)\big] = 0 \tag{5.20}$$

для всіх пар параметрів $(\lambda,\mu)\in\Sigma\times\Sigma_k,\ k=\overline{0,m}$. Це означає, що, згідно з лемою Паункаре [26, 77], існують диференціальні $(k-1)$-форми $\Omega^{(k-1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi(\mu)\big] \in \Lambda^{k-1}(M;\mathbb{C}),\ k=\overline{0,m}$, такі, що

$$Z^{(k)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi(\mu)\big] = d\Omega^{(k-1)}[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi(\mu)] \tag{5.21}$$

для всіх пар $(\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(k)}(\mu)) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M)$, параметризованих елементами $(\lambda,\mu) \in \Sigma\times\Sigma_k,\ k=\overline{0,m}$. Після переходу в правій частині (5.19) до груп гомологій $H_k(M;\mathbb{C})$, $k=\overline{0,m}$, переконаємося, згідно з теоремою Стокса [19, 26, 77, 80], що відображення

$$B_\lambda^{(k)}: \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M) \rightleftarrows H_k(M;\mathbb{C}) \tag{5.22}$$

є ізоморфізмами для будь-якого $\lambda\in\Sigma$. Використовуючи дуальність Пуанкаре [77] для груп гомологій $H_k(M;\mathbb{C}),\ k=\overline{0,m}$, та когомологій $H^k(M;\mathbb{C}),\ k=\overline{0,m}$, отримуємо твердження теореми 5.3, тобто $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M) \simeq (H^k(M;\mathbb{C}))^\Sigma$.

Будемо вважати тепер, що $M := \mathrm{T}^r \times \bar{\mathbb{R}}^s$, $\dim M = s+r \in \mathbb{Z}_+$, та $\mathcal{H} := L_2(\mathrm{T}^r; L_2(\mathbb{R}^s;\mathbb{C}^N))$, де $\mathrm{T}^r := \mathop{\times}\limits_{j=1}^{r} \mathrm{T}_j,\ \mathrm{T}_j := [0,\mathrm{T}_j) \subset \mathbb{R}_+,\ j=\overline{1,r}$, і покладемо

$$d_{\mathcal{L}} = \sum_{j=1}^{r} dt_j \wedge \mathrm{L}_j(t;x|\partial),\ \mathrm{L}_j(t;x|\partial) := \partial/\partial t_j - L_j(t;x|\partial), \tag{5.23}$$

де

$$L_j(t;x|\partial) = \sum_{|\alpha|=0}^{n(L_j)} a_\alpha^{(j)}(t;x)\partial^{|\alpha|}/\partial x^\alpha, \quad j=\overline{1,r}, \tag{5.24}$$

— диференціальні операції, параметрично залежні від $t \in \mathrm{T}^r$ і задані на щільних підпросторах $D(\mathrm{L}_j) = D(\mathcal{L}) \subset L_2(\mathbb{R}^s;\mathbb{C}^N)$, $j=\overline{1,r}$. Будемо вважати також, що оператори $\mathrm{L}_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $j=\overline{1,r}$, комутують між собою.

Розглянемо фіксовану пару $(\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)dx) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}^s_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M)$, параметризовану елементами $(\lambda,\mu) \in \Sigma \times \Sigma$, для яких, згідно з теоремами 5.3 та Стокса [19, 26, 77, 80], має місце рівність

$$B_\lambda^{(s)}(\psi^{(0)}(\mu)dx) = S^{(s)}_{(t;x)} \int\limits_{\partial S^{(s)}_{(t;x)}} \Omega^{(s-1)}\Big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)dx\Big], \tag{5.25}$$

де $S^{(s)}_{(t;x)} \in C_s(M;\mathbb{C})$ — деякий довільний, але фіксований елемент, параметризований довільно вибраною точкою $(t;x) \in M \cap S^{(s)}_{(t;x)}$. Розглянемо інтегральні вирази

$$\begin{gathered}\Omega_{(t;x)}(\lambda,\mu) := \int\limits_{\partial S^{(s)}_{(t;x)}} \Omega^{(s-1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)dx\big],\\ \Omega_{(t_0;x_0)}(\lambda,\mu) := \int\limits_{\partial S^{(s)}_{(t_0;x_0)}} \Omega^{(s-1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)dx\big],\end{gathered} \tag{5.26}$$

де точка $(t_0;x_0) \in M \cap S^{(s)}_{(t_0;x_0)}$ є фіксованою, параметри λ, μ належать Σ, які інтерпретуються як відповідні ядра [2] оборотних інтегральних операторів типу Гільберта – Шмідта $\Omega_{(t;x)}$, $\Omega_{(t_0;x_0)} : L_2^{(\rho)}(\Sigma;\mathbb{C}) \to L_2^{(\rho)}(\Sigma;\mathbb{C})$, а ρ — деяка скінченна міра Бореля на множині параметрів Σ. Вважаємо також, що межі $\partial S^{(s)}_{(t;x)} := \sigma^{(s-1)}_{(t;x)}$ і $\partial S^{(s)}_{(t_0;x_0)} := \sigma^{(s-1)}_{(t_0;x_0)}$ гомологічні одна до одної при $(t;x) \to (t_0;x_0) \in M$. Задамо відображення

$$\mathbf{\Omega}_\pm : \psi^{(0)}(\eta) \to \tilde{\psi}^{(0)}(\eta) \tag{5.27}$$

для $\psi^{(0)}(\eta)dx \in \mathcal{H}^s_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M)$ і деякого $\tilde{\psi}^{(0)}(\eta)dx \in \mathcal{H}^s_{\Lambda,-}(M)$, де, за означенням,

$$\begin{gathered}\tilde{\psi}^{(0)}(\eta) := \psi^{(0)}(\eta) \cdot \Omega^{-1}_{(t;x)}\Omega_{(t_0;x_0)} =\\ = \int\limits_\Sigma d\rho(\mu) \int\limits_\Sigma d\rho(\xi) \psi^{(0)}(\mu)\Omega^{-1}_{(t;x)}(\mu,\xi)\Omega_{(t_0;x_0)}(\xi,\eta)\end{gathered} \tag{5.28}$$

для будь-якого $\eta \in \Sigma$ завдяки (5.25). Припустимо також, що елементи (5.28) асоційовані з іншими елементами із трансмутованої за Дельсартом групи когомологій $\mathcal{H}^s_{\Lambda(\tilde{\mathcal{L}}),-}(M)$, тобто виконується умова

$$d_{\tilde{\mathcal{L}}}\tilde{\psi}^{(0)}(\eta)dx = 0 \tag{5.29}$$

для $\tilde{\psi}^{(0)}(\eta)dx \in \mathcal{H}^s_{\Lambda(\tilde{\mathcal{L}}),-}(M)$, $\eta \in \Sigma$, і нового зовнішнього антидиференціювання в $\mathcal{H}_{\Lambda,-}(M)$:

$$d_{\tilde{\mathcal{L}}} := \sum_{j=1}^{m} dx_j \wedge \tilde{\mathrm{L}}_j(t;x|\partial), \ \tilde{\mathrm{L}}_j(t;x|\partial) := \partial/\partial t_j - \tilde{L}_j(t;x|\partial), \tag{5.30}$$

де вирази

$$\tilde{L}_j(t;x|\partial) = \sum_{|\alpha|=0}^{n(L_j)} \tilde{a}_\alpha^{(j)}(t;x)\partial^{|\alpha|}/\partial x^\alpha, \tag{5.31}$$

$j = \overline{1,r}$, є деякими диференціальними операціями в $L_2(\mathbb{R}^s;\mathbb{C}^N)$, параметрично залежними від $t \in \mathrm{T}^r$.

Покладемо, за визначенням, що

$$\tilde{\mathrm{L}}_j := \mathbf{\Omega}_\pm \mathrm{L}_j \mathbf{\Omega}_\pm^{-1} \tag{5.32}$$

для кожного $j = \overline{1,r}$, де $\mathbf{\Omega}_\pm : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — відповідні оператори трансмутації Дельсарта, асоційовані з деякими елементами $S_\pm(\sigma_{x;t}^{(s-1)}, \sigma_{x_0;t_0}^{(s-1)}) \in C_s(M;\mathbb{C})$, що відповідають гомологічним одна до одної межам $\partial S_{x;t}^{(s)} = \sigma_{x;t}^{(s-1)}$ та $\partial S_{x_0;t_0}^{(s)} = \sigma_{x_0;t_0}^{(s-1)}$. Оскільки всі оператори $\mathrm{L}_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \ j = \overline{1,r}$, вибрано комутуючими, то така властивість має місце для трансмутованих операторів (5.32), тобто $[\tilde{\mathrm{L}}_j, \tilde{\mathrm{L}}_k] = 0, \ k,j = \overline{0,m}$. Останнє, що є еквівалентним до (5.32), приводить до загального виразу

$$d_{\tilde{\mathcal{L}}} = \mathbf{\Omega}_\pm d_{\mathcal{L}} \mathbf{\Omega}_\pm^{-1}. \tag{5.33}$$

Щоб задовольнити умови (5.33) і (5.29), розглянемо, відповідно до (5.25), вирази

$$\tilde{B}_\lambda^{(s)}(\tilde{\psi}^{(0)}(\eta)dx) = S_{(t;x)}^{(s)} \tilde{\Omega}_{(t;x)}(\lambda,\eta), \tag{5.34}$$

асоційовані із зовнішнім диференціюванням (5.33), де $S_{(t;x)}^{(s)} \in C_s(M;\mathbb{C})$ та $(\lambda,\eta) \in \Sigma \times \Sigma$. Нехай задано відображення

$$\mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast} : \varphi^{(0)}(\lambda) \to \tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda), \tag{5.35}$$

де $\mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast} : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}^*$ — деякі оператори, що асоційовані (необов'язково тут спряжені) з відповідними операторами перетворення Дельсарта $\mathbf{\Omega}_\pm : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ і задовольняють стандартні співвідношення $\tilde{\mathrm{L}}_j^* := \mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast} \mathrm{L}_j^* \mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast,-1}, \ j = \overline{1,r}$. Власне, оператори типу Дельсарта $\mathbf{\Omega}_\pm : \mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M) \to \mathcal{H}^0_{\Lambda(\tilde{\mathcal{L}}),-}(M)$ пов'язані з двома різними зображеннями дії (5.28) при необхідних додаткових умовах

$$d_{\tilde{\mathcal{L}}} \tilde{\psi}^{(0)}(\eta)dx = 0, \qquad d_{\tilde{\mathcal{L}}}^* \tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda) = 0, \tag{5.36}$$

які означають, що мають місце вкладення $\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda) \in \mathcal{H}^0_{\Lambda(\tilde{\mathcal{L}}^*),-}(M), \ \lambda \in \Sigma$, та $\tilde{\psi}^{(0)}(\eta)dx \in \mathcal{H}^s_{\Lambda(\tilde{\mathcal{L}}),-}(M), \ \eta \in \Sigma$. Сформулюємо важливу щодо умов (5.36) лему.

Лема 5.3. *Має місце властивість інваріантності*

$$\tilde{Z}^{(s)} = \Omega_{(t_0;x_0)} \Omega_{(t;x)}^{-1} Z^{(s)} \Omega_{(t;x)}^{-1} \Omega_{(t_0;x_0)} \tag{5.37}$$

для будь-яких $(t;x)$ *та* $(t_0;x_0) \in M$.

На підставі співвідношення (5.37) і симетричної дуальності між просторами когомологій $\mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M)$ і $\mathcal{H}^0_{\Lambda(\tilde{\mathcal{L}}),-}(M)$ отримуємо такі пари відображень:

$$\begin{aligned}\psi^{(0)} &= \tilde{\psi}^{(0)}\tilde{\Omega}_{(t;x)}^{-1}\tilde{\Omega}_{(t_0;x_0)}, \qquad \varphi^{(0)} = \tilde{\varphi}^{(0)}\tilde{\Omega}_{(t;x)}^{\circledast,-1}\tilde{\Omega}_{(t_0;x_0)}^{\circledast},\\ \tilde{\psi}^{(0)} &= \psi^{(0)}\Omega_{(t;x)}^{-1}\Omega_{(t_0;x_0)}, \qquad \tilde{\varphi}^{(0)} = \varphi^{(0)}\Omega_{(t;x)}^{\circledast,-1}\Omega_{(t_0;x_0)}^{\circledast},\end{aligned} \tag{5.38}$$

де ядра відповідних інтегральних операторів з $L_2^{(\rho)}(\Sigma;\mathbb{C})\otimes L_2^{(\rho)}(\Sigma;\mathbb{C})$ визначені як

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_{(t;x)}(\lambda,\mu) &:= \int\limits_{\sigma_{(t;x)}^{(s)}} \tilde{\Omega}^{(s-2)}\big[\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda),\tilde{\psi}^{(0)}(\mu)dx\big],\\ \tilde{\Omega}_{(t;x)}^{\circledast}(\lambda,\mu) &:= \int\limits_{\sigma_{(t;x)}^{(s)}} \bar{\tilde{\Omega}}^{(s-2),\intercal}\big[\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda),\tilde{\psi}^{(0)}(\mu)dx\big]\end{aligned} \tag{5.39}$$

для всіх $(\lambda,\mu)\in\Sigma\times\Sigma$, що дозволяє знайти оператори перетворення Дельсарта, які забезпечують суто диференціальну природу перетворених виразів (5.32).

Зауважимо, що згідно (5.37) та (5.38) має місце операторна рівність

$$\Omega_{(t_0;x_0)}\Omega_{(t;x)}^{-1}\Omega_{(t_0;x_0)} + \tilde{\Omega}_{(t_0;x_0)}\Omega_{(t;x)}^{-1}\Omega_{(t_0;x_0)} = 0 \tag{5.40}$$

для будь-яких $(t_0;x_0)$ і $(t;x)\in M$, тобто $\tilde{\Omega}_{(t_0;x_0)} = -\Omega_{(t_0;x_0)}$.

Визначимо подібно до (5.16) три додаткових замкнених та щільних в $\mathcal{H}_{\Lambda,-}^0(M)$ підпростори:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &:= \Big\{\psi^{(0)}(\mu)\in\mathcal{H}_{\Lambda(\mathcal{L}),-}^0(M)\colon d_{\mathcal{L}}\psi^{(0)}(\mu)=0,\ \psi^{(0)}(\mu)|_{\Gamma}=0,\ \mu\in\Sigma\Big\},\\ \tilde{\mathcal{H}}_0 &:= \Big\{\tilde{\psi}^{(0)}(\mu)\in\mathcal{H}_{\Lambda(\tilde{\mathcal{L}}),-}^0(M)\colon d_{\tilde{\mathcal{L}}}\tilde{\psi}^{(0)}(\mu)=0,\ \tilde{\psi}^{(0)}(\mu)|_{\tilde{\Gamma}}=0,\ \mu\in\Sigma\Big\},\\ \tilde{\mathcal{H}}_0^* &:= \Big\{\tilde{\varphi}^{(0)}(\eta)\in\mathcal{H}_{\Lambda(\tilde{\mathcal{L}}^*),-}^0(M)\colon d_{\tilde{\mathcal{L}}}^*\tilde{\psi}^{(0)}(\eta)=0,\ \tilde{\varphi}^{(0)}(\eta)|_{\tilde{\Gamma}}=0,\ \eta\in\Sigma\Big\},\end{aligned} \tag{5.41}$$

де Γ та $\tilde{\Gamma}\subset M$ — деякі гладкі $(s-1)$-вимірні гіперповерхні, і визначимо дії

$$\mathbf{\Omega}_{\pm}\colon \psi^{(0)}\to\tilde{\psi}^{(0)} := \psi^{(0)}\Omega_{(t;x)}^{-1}\Omega_{(t;x)}, \qquad \mathbf{\Omega}_{\pm}^{\circledast}\colon \varphi^{(0)}\to\tilde{\varphi}^{(0)} := \varphi^{(0)}\Omega_{(t;x)}^{\circledast,-1}\Omega_{(t_0;x_0)}^{\circledast} \tag{5.42}$$

на довільній, але фіксованій парі елементів $\big(\varphi^{(0)}(\lambda),\psi^{(0)}(\mu)\big)\in\mathcal{H}_0^*\times\mathcal{H}_0$, параметризованій множиною Σ, де, за визначенням, необхідно, щоб всі отримані пари $\big(\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda),\tilde{\psi}^{(0)}(\mu)dx\big)$, $\lambda,\mu\in\in\Sigma$, належали до $\mathcal{H}_{\Lambda(\tilde{\mathcal{L}}^*),-}^0(M)\times\mathcal{H}_{\Lambda(\tilde{\mathcal{L}}),-}^s(M)$. Зауважимо, що операторну властивість (5.40) можна записати компактніше:

$$\tilde{\Omega}_{(t;x)} = \tilde{\Omega}_{(t_0;x_0)}\Omega_{(t;x)}^{-1}\Omega_{(t_0;x_0)} = -\Omega_{(t_0;x_0)}\Omega_{(t;x)}^{-1}\Omega_{(t_0;x_0)}. \tag{5.43}$$

Побудуємо за виразами (5.42) такі операторні ядра з гільбертового простору $L_2^{(\rho)}(\Sigma;\mathbb{C})\otimes\otimes L_2^{(\rho)}(\Sigma;\mathbb{C})$:

$$\Omega_{(t;x)}(\lambda,\mu)-\Omega_{(t_0;x_0)}(\lambda,\mu) = \int\limits_{\partial S_{(t;x)}^{(s)}} \Omega^{(s-1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda),\psi^{(0)}(\mu)dx\big]-$$

$$- \int\limits_{\partial S^{(s)}_{(t_0;x_0)}} \Omega^{(s-1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)dx\big] =$$

$$= \int\limits_{S^{(s)}_{\pm}\left(\sigma^{(s-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(s-1)}_{(t_0;x_0)}\right)} d\Omega^{(s-1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)dx\big] =$$

$$= \int\limits_{S^{(s)}_{\pm}\left(\sigma^{(s-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(s-1)}_{(t_0;x_0)}\right)} Z^{(s)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)dx\big] \tag{5.44}$$

та

$$\Omega^{\circledast}_{(t;x)}(\lambda,\mu) - \Omega^{\circledast}_{(t_0;x_0)}(\lambda,\mu) = \int\limits_{\partial S^{(s)}_{(t;x)}} \bar{\Omega}^{(s-1),\intercal}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)dx\big] -$$

$$- \int\limits_{\partial S^{(s)}_{(t_0;x_0)}} \bar{\Omega}^{(s-1),\intercal}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)dx\big] =$$

$$= \int\limits_{S^{(s)}_{\pm}\left(\sigma^{(s-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(s-1)}_{(t_0;x_0)}\right)} d\bar{\Omega}^{(s-1),\intercal}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)dx\big] =$$

$$= \int\limits_{S^{(s)}_{\pm}\left(\sigma^{(s-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(s-1)}_{(t_0;x_0)}\right)} \bar{Z}^{(s-1),\intercal}\big[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)dx\big], \tag{5.45}$$

де λ, μ належать Σ і s-вимірні поверхні $S^{(s)}_{+}\Big(\sigma^{(s-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(s-1)}_{(t_0;x_0)}\Big)$ та $S^{(s)}_{-}\Big(\sigma^{(s-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(s-1)}_{(t_0;x_0)}\Big) \subset$ $\subset M$ напнуті гладко без самоперетинів між двома гомологічними циклами $\sigma^{(s-1)}_{(t;x)} = \partial S^{(s)}_{(t;x)}$ та $\sigma^{(s-1)}_{(t_0;x_0)} := \partial S^{(s)}_{(t_0;x_0)} \in C_{s-1}(M;\mathbb{C})$ так, що межа

$$\partial\left(S^{(s)}_{+}\Big(\sigma^{(s-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(s-1)}_{(t_0;x_0)}\Big) \cup S^{(s)}_{-}\left(\sigma^{(s-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(s-1)}_{(t_0;x_0)}\right)\right) = \varnothing.$$

Оскільки вирази $\Omega_{(t_0;x_0)}, \Omega^{\circledast}_{(t_0;x_0)} : L_2^{(\rho)}(\Sigma;\mathbb{C}) \to L_2^{(\rho)}(\Sigma;\mathbb{C})$ є сталими при фіксованій точці $(t_0;x_0) \in M$ і, за припущенням, оборотні, то для продовження дій, заданих виразами (5.42), на весь гільбертів простір $\mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$ можна застосувати до них, як і раніше, класичний метод варіації сталих, використавши (5.45). В результаті отримаємо такі вирази для інтегральних операторів перетворення Дельсарта:

$$\begin{gathered}
\mathbf{\Omega}_{\pm} = \mathbf{1} - \int\limits_{\Sigma\times\Sigma} d\rho(\xi)d\rho(\eta)\tilde{\psi}(x;\xi)\Omega^{-1}_{(t_0;x_0)}(\xi,\eta) \int\limits_{S^{(s)}_{\pm}\left(\sigma^{(s-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(s-1)}_{(t_0;x_0)}\right)} Z^{(s)}[\varphi^{(0)}(\eta), \cdot], \\
\mathbf{\Omega}^{\circledast}_{\pm} = \mathbf{1} - \int\limits_{\Sigma\times\Sigma} d\rho(\xi)d\rho(\eta)\tilde{\varphi}(x;\eta)\Omega^{\circledast,-1}_{(t_0;x_0)}(\xi,\eta) \int\limits_{S^{(s)}_{\pm}\left(\sigma^{(s-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(s-1)}_{(t_0;x_0)}\right)} \bar{Z}^{(s),\intercal}[\cdot, \psi^{(0)}(\xi)dx],
\end{gathered} \tag{5.46}$$

заданих для фіксованих пар $\left(\varphi^{(0)}(\xi),\psi^{(0)}(\eta)\right)\in\mathcal{H}_0^*\times\mathcal{H}_0$ та $\left(\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda),\tilde{\psi}^{(0)}(\mu)\right)\in\tilde{\mathcal{H}}_0^*\times\tilde{\mathcal{H}}_0$, $\lambda,\mu\in\Sigma$, які є обмеженими оборотними інтегральними операторними парами типу Вольтерра на просторі $\mathcal{H}\times\mathcal{H}^*$. Застосовуючи міркування з пункту 1, можна показати, що відповідні трансмутовані множини операторів $\tilde{\mathrm{L}}_j:=\mathbf{\Omega}_\pm\mathrm{L}_j\mathbf{\Omega}_\pm^{-1},\ j=\overline{1,r}$, і $\tilde{\mathrm{L}}_k^*:=\mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast}\mathrm{L}_k^*\mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast,-1},\ k=\overline{1,r}$, є суто диференціальними. Тому має місце така теорема.

Теорема 5.4. *Вирази* (5.46) *є обмеженими оборотними інтегральними операторами трансмутації Дельсарта типу Вольтерра на $\mathcal{H}\times\mathcal{H}^*$, що перетворюють задані комутуючі множини операторів $\mathrm{L}_j,\ j=\overline{1,r}$, та їх формально спряжені $\mathrm{L}_k^*,\ k=\overline{1,r}$, у відповідні суто диференціальні множини операторів $\tilde{\mathrm{L}}_j:=\mathbf{\Omega}_\pm\mathrm{L}_j\mathbf{\Omega}_\pm^{-1},\ j=\overline{1,r}$, та $\tilde{\mathrm{L}}_k^*:=\mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast}\mathrm{L}_k^*\mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast,-1},\ k=\overline{1,r}$. Крім того, належним чином побудовані замкнені підпростори $\mathcal{H}_0\subset\mathcal{H}$ і $\tilde{\mathcal{H}}_0\subset\mathcal{H}$ такі, що вольтеррівські оператори $\mathbf{\Omega}_\pm$ суттєво залежать від топологічної структури узагальнених груп когомологій $\mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M)$ та $\mathcal{H}^0_{\Lambda(\tilde{\mathcal{L}}),-}(M)$, параметризованих елементами $S_\pm^{(s)}\left(\sigma^{(s-1)}_{(t;x)},\sigma^{(s-1)}_{(t_0;x_0)}\right)\in$ $\in C_s(M;\mathbb{C})$.*

Припустимо, що всі диференціальні оператори $L_j:=L_j(x|\partial),\ j=\overline{1,r}$, розглянуті вище, не залежать від змінної $t\in\mathrm{T}^r\subset\mathbb{R}^r_+$. Тоді можна взяти

$$
\begin{gathered}
\mathcal{H}_0:=\Big\{\psi^{(0)}_\mu(\xi)\in L_{2,-}(\mathbb{R}^s;\mathbb{C}^N):\ L_j\psi^{(0)}_\mu(\xi)=\mu_j\psi^{(0)}_\mu(\xi),\ j=\overline{1,r},\\
\psi^{(0)}_\mu(\xi)|_\Gamma=0,\ \mu:=(\mu_1,\ldots,\mu_r)\in\sigma(\tilde{L})\cap\bar{\sigma}(L^*),\ \xi\in\Sigma_\sigma\Big\},\\
\tilde{\mathcal{H}}_0:=\Big\{\tilde{\psi}^{(0)}_\mu(\xi)\in L_{2,-}(\mathbb{R}^s;\mathbb{C}^N):\ \tilde{L}_j\tilde{\psi}^{(0)}_\mu(\xi)=\mu_j\tilde{\psi}^{(0)}_\mu(\xi),\ j=\overline{1,r},\\
\tilde{\psi}^{(0)}_\mu(\xi)|_{\tilde{\Gamma}}=0,\ \mu:=(\mu_1,\ldots,\mu_r)\in\sigma(\tilde{L})\cap\bar{\sigma}(L^*),\ \xi\in\Sigma_\sigma\Big\},\\
\mathcal{H}_0^*:=\Big\{\varphi^{(0)}_\lambda(\eta)\in L_{2,-}(\mathbb{R}^s;\mathbb{C}^N):\ L_j\varphi^{(0)}_\lambda(\eta)=\bar{\lambda}_j\varphi^{(0)}_\lambda(\eta),\ j=\overline{1,r},\\
\varphi^{(0)}_\lambda(\eta)|_\Gamma=0,\ \lambda:=(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\in\sigma(\tilde{L})\cap\bar{\sigma}(L^*),\ \eta\in\Sigma_\sigma\Big\},\\
\tilde{\mathcal{H}}_0^*:=\Big\{\tilde{\varphi}^{(0)}_\lambda(\eta)\in L_{2,-}(\mathbb{R}^s;\mathbb{C}^N):\ \tilde{L}_j\tilde{\varphi}^{(0)}_\lambda(\eta)=\bar{\lambda}_j\tilde{\varphi}^{(0)}_\lambda(\eta),\ j=\overline{1,r},\\
\tilde{\varphi}^{(0)}_\lambda(\eta)|_{\tilde{\Gamma}}=0,\ \lambda:=(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\in\sigma(\tilde{L})\cap\bar{\sigma}(L^*),\ \eta\in\Sigma_\sigma\Big\}
\end{gathered}
\tag{5.47}
$$

і побудувати відповідні оператори трансмутації Дельсарта

$$
\begin{gathered}
\mathbf{\Omega}_\pm=\mathbf{1}-\int\limits_{\sigma(\tilde{L})\cap\bar{\sigma}(L^*)}d\rho_\sigma(\lambda)\int\limits_{\Sigma_\sigma\times\Sigma_\sigma}d\rho_{\Sigma_\sigma}(\xi)d\rho_{\Sigma_\sigma}(\eta)\times\\
\times\int\limits_{S_\pm^{(s)}\left(\sigma_x^{(s-1)},\sigma_{x_0}^{(s-1)}\right)}dx\quad\tilde{\psi}^{(0)}_\lambda(\xi)\Omega^{-1}_{(x_0)}(\lambda;\xi,\eta)\bar{\varphi}^{(0),\intercal}_\lambda(\eta)(\cdot)
\end{gathered}
\tag{5.48}
$$

та

$$
\mathbf{\Omega}_\pm^{\circledast}=\mathbf{1}-\int\limits_{\sigma(\tilde{L})\cap\bar{\sigma}(L^*)}d\rho_\sigma(\lambda)\int\limits_{\Sigma}d\rho_{\Sigma_\sigma}(\xi)d\rho_{\Sigma_\sigma}(\eta)\times
$$

$$\times \int\limits_{S_{\pm}^{(s)}\left(\sigma_x^{(s-1)},\sigma_{x_0}^{(s-1)}\right)} dx \qquad \tilde{\varphi}_\lambda^{(0)}(\xi)\bar{\Omega}_{(x_0)}^{\intercal,-1}(\lambda;\xi,\eta)\times\bar{\psi}_\lambda^{(0),\intercal}(\eta)(\cdot), \tag{5.49}$$

що діють вже у гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}^s;\mathbb{C}^N)$, де для будь-яких $(\lambda;\xi,\eta)\in(\sigma(\tilde{L})\cap \cap\,\bar{\sigma}(L^*))\times\Sigma_\sigma^2$ ядра

$$\begin{gathered}\Omega_{(x_0)}(\lambda;\xi,\eta):=\int\limits_{\sigma_{x_0}^{(s-1)}}\Omega^{(s-1)}\Big[\varphi_\lambda^{(0)}(\xi),\psi_\lambda^{(0)}(\eta)dx\Big],\\ \Omega_{(x_0)}^{\circledast}(\lambda;\xi,\eta):=\int\limits_{\sigma_{x_0}^{(s-1)}}\bar{\Omega}^{(s-1),\intercal}\Big[\varphi_\lambda^{(0)}(\xi),\psi_\lambda^{(0)}(\eta)dx\Big]\end{gathered} \tag{5.50}$$

належать до $L_2^{(\rho)}(\Sigma_\sigma;\mathbb{C})\times L_2^{(\rho)}(\Sigma_\sigma;\mathbb{C})$ для кожного $\lambda\in\sigma(\tilde{L})\cap\bar{\sigma}(L^*)$, що вважається тут параметром. Крім того, оскільки $\partial\mathbf{\Omega}_\pm/\partial t_j=0,\ j=\overline{1,r}$, неважко отримати множину диференціальних виразів

$$\mathcal{R}(\tilde{L}):=\Big\{\tilde{L}_j(x|\partial):=\mathbf{\Omega}_\pm L_j(x|\partial)\mathbf{\Omega}_\pm^{-1}:j=\overline{1,r}\Big\}, \tag{5.51}$$

що утворюють кільце комутуючих один з одним диференціальних операторів, які діють в $L_2(\mathbb{R}^s;\mathbb{C}^N)$, породжених відповідним початковим кільцем $\mathcal{R}(L)$.

Отже, ми певним чином описали кільце $\mathcal{R}(\tilde{L})$ комутуючих між собою багатовимірних диференціальних операторів, породжених початковим кільцем $\mathcal{R}(L)$. Зокрема, в одновимірному випадку ця задача розглядалась і була розв'язана у роботах [33, 57] за допомогою алгебро-геометричних методів та методу оберненого спектрального перетворення. Наш підхід є новим поглядом на цю задачу в багатовимірному випадку.

6. Спеціальний випадок: теорія солітонів. Розглянемо узагальнену теорію де Рама – Ходжа про комутуючу множину $\mathcal{L}$ двох диференціальних операторів у гільбертовому просторі $\mathcal{H}:=L_2(\mathrm{T}^2;H),\ H:=L_2(\mathbb{R}^s;\mathbb{C}^N)$, для випадку, коли $M:=\mathrm{T}^2\times\bar{\mathbb{R}}^s$ та

$$\mathcal{L}:=\Big\{\mathrm{L}_j:=\partial/\partial t_j-L_j(t;x|\partial):t_j\in\mathrm{T}_j:=[0,\mathrm{T}_j)\subset\mathbb{R}_+,\ j=\overline{1,2}\Big\},$$

де, за означенням, $\mathrm{T}^2:=\mathrm{T}_1\times\mathrm{T}_2$,

$$L_j(t;x|\partial):=\sum_{|\alpha|=0}^{n(L_j)}a_\alpha^{(j)}(t;x)\partial^{|\alpha|}/\partial x^\alpha \tag{6.1}$$

з коефіцієнтами $a_\alpha^{(j)}\in C^1\big(\mathrm{T}^2;S(\mathbb{R}^s;\operatorname{End}\mathbb{C}^N)\big),\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^s,\ |\alpha|=\overline{0,n(L_j)},\ j=\overline{1,2}$. Відповідний скалярний добуток має вигляд

$$(\varphi,\psi):=\int\limits_{\mathrm{T}^2}dt\int\limits_{\mathbb{R}^s}dx\langle\varphi,\psi\rangle \tag{6.2}$$

для будь-якої пари $(\varphi,\psi)\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}$, а узагальнений зовнішній диференціал

$$d_{\mathcal{L}}:=\sum_{j=1}^{2}dt_j\wedge\mathrm{L}_j, \tag{6.3}$$

де вважається, що для всіх $t \in \mathrm{T}^2$ та $x \in \mathbb{R}^s$ комутатор

$$[\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2] = 0. \tag{6.4}$$

Це означає, що відповідні узагальнені коланцюгові комплекси де Рама – Ходжа

$$\begin{gathered} \mathcal{H} \to \Lambda^0(M;\mathcal{H}) \overset{d_{\mathcal{L}}}{\to} \Lambda^1(M;\mathcal{H}) \overset{d_{\mathcal{L}}}{\to} \ldots \overset{d_{\mathcal{L}}}{\to} \Lambda^m(M;\mathcal{H}) \overset{d_{\mathcal{L}}}{\to} 0, \\ \mathcal{H} \to \Lambda^0(M;\mathcal{H}) \overset{d^*_{\mathcal{L}}}{\to} \Lambda^1(M;\mathcal{H}) \overset{d^*_{\mathcal{L}}}{\to} \ldots \overset{d^*_{\mathcal{L}}}{\to} \Lambda^m(M;\mathcal{H}) \overset{d^*_{\mathcal{L}}}{\to} 0 \end{gathered} \tag{6.5}$$

є точними. Задамо, згідно з (5.16) та (5.41), замкнені підпростори $\mathcal{H}_0^{\circledast}$ і $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_-$:

$$\begin{gathered} \mathcal{H}_0 := \Big\{ \psi^{(0)}(\lambda;\eta) \in \mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M) \colon \partial\psi^{(0)}(\lambda;\eta)/\partial t_j = \\ = L_j(t;x|\partial)\psi^{(0)}(\lambda;\eta),\ j = \overline{1,2}, \\ \psi^{(0)}(\lambda;\eta)|_{t=t_0} = \psi_\lambda(\eta) \in H_-,\ \psi^{(0)}(\lambda;\eta)|_\Gamma = 0, \\ (\lambda;\eta) \in \Sigma \subset (\sigma(L) \cap \bar\sigma(L^*)) \times \Sigma_\sigma \Big\}, \\ \mathcal{H}_0^* := \Big\{ \varphi^{(0)}(\lambda;\eta) \in \mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M) \colon -\partial\varphi^{(0)}(\lambda;\eta)/\partial t_j = \\ = L_j(t;x|\partial)\varphi^{(0)}(\lambda;\eta),\ j = \overline{1,2}, \\ \varphi^{(0)}(\lambda;\eta)|_{t=t_0} = \varphi_\lambda(\eta) \in H_-,\ \varphi^{(0)}(\lambda;\eta)|_\Gamma = 0, \\ (\lambda;\eta) \in \Sigma \subset (\sigma(L) \cap \bar\sigma(L^*)) \times \Sigma_\sigma \Big\} \end{gathered} \tag{6.6}$$

для деякої гладкої гіперповерхні $\Gamma \subset M$ і спектральної множини виродження $\Sigma_\sigma \in \mathbb{C}^{p-1}$. За допомогою підпросторів (6.6) можна побудувати оборотні оператори трансмутації Дельсарта $\mathbf{\Omega}_\pm \colon H \to H$ у загальному вигляді (5.49) з ядрами $\Omega_{(t_0;x_0)}(\lambda;\xi,\eta) \in L_2^{(\rho)}(\Sigma_\sigma;\mathbb{C}) \times L_2^{(\rho)}(\Sigma_\sigma;\mathbb{C})$:

$$\begin{gathered} \Omega_{(t_0;x_0)}(\lambda;\xi,\eta) := \int\limits_{\sigma^{(s-1)}_{(t_0;x_0)}} \Omega^{(s-1)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda;\xi), \psi^{(0)}(\lambda;\eta)dx\big], \\ \Omega^{\circledast}_{(t_0;x_0)}(\lambda;\xi,\eta) := \int\limits_{\sigma^{(s-1)}_{(t_0;x_0)}} \bar\Omega^{(s-1),\intercal}\big[\varphi^{(0)}(\lambda;\xi), \psi^{(0)}(\lambda;\eta)dx\big] \end{gathered} \tag{6.7}$$

для всіх $(\lambda;\xi,\eta) \in (\sigma(L) \cap \bar\sigma(L^*)) \times \Sigma_\sigma^2$. В результаті отримаємо щодо відповідного розкладу міри $\rho := \rho_\sigma \odot \rho_{\Sigma_\sigma^2}$ такі інтегральні вирази:

$$\begin{gathered}
\mathbf{\Omega}_{\pm} = \mathbf{1} - \int\limits_{\sigma(\tilde{L})\cap\bar{\sigma}(L^*)} d\rho_\sigma(\lambda) \int\limits_{\Sigma_\sigma\times\Sigma_\sigma} d\rho_{\Sigma_\sigma}(\xi) d\rho_{\Sigma_\sigma}(\eta) \times \\
\times \int\limits_{S_\pm^{(s)}\left(\sigma_{(t_0;x)}^{(s-1)},\sigma_{(t_0;x_0)}^{(s-1)}\right)} dx \qquad \tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\xi)\Omega_{(t_0;x_0)}^{-1}(\lambda;\xi,\eta)\bar{\varphi}^{(0),\intercal}(\lambda;\eta)(\cdot), \\
\mathbf{\Omega}_{\pm}^{\circledast} = \mathbf{1} - \int\limits_{\sigma(\tilde{L})\cap\bar{\sigma}(L^*)} d\rho_\sigma(\lambda) \int\limits_{\Sigma_\sigma\times\Sigma_\sigma} d\rho_{\Sigma_\sigma}(\xi) d\rho_{\Sigma_\sigma}(\eta) \times \\
\times \int\limits_{S_\pm^{(s)}\left(\sigma_{(t_0;x)}^{(s-1)},\sigma_{(t_0;x_0)}^{(s-1)}\right)} dx \qquad \tilde{\varphi}_\lambda^{(0)}(\xi)\bar{\Omega}_{(t_0;x_0)}^{\intercal,-1}(\lambda;\xi,\eta) \times \bar{\psi}^{(0),\intercal}(\lambda;\eta)(\cdot),
\end{gathered} \tag{6.8}$$

де $S_+^{(s)}\left(\sigma_{(t_0;x)}^{(s-1)},\sigma_{(t_0;x_0)}^{(s-1)}\right) \in C_s(M;\mathbb{C})$ — деяка гладка s-вимірна поверхня, напнута між двома гомологічними циклами $\sigma_{(t_0;x)}^{(s-1)}$ та $\sigma_{(t_0;x_0)}^{(s-1)} \in \mathcal{K}(M)$, а $S_-^{(s)}\left(\sigma_{(t_0;x)}^{(s-1)},\sigma_{(t_0;x_0)}^{(s-1)}\right) \in C_s(M;\mathbb{C})$ — така гладка s-вимірна поверхня, що $\partial\left(S_+^{(s)}\left(\sigma_{(t_0;x)}^{(s-1)},\sigma_{(t_0;x_0)}^{(s-1)}\right) \cup S_-^{(s)}\left(\sigma_{(t_0;x)}^{(s-1)},\sigma_{(t_0;x_0)}^{(s-1)}\right)\right) = \varnothing$. За результатами пункту 3 можна побудувати, врахувавши (6.8), відповідно факторизовані оператори Фредгольма $\mathbf{\Omega}$ і $\mathbf{\Omega}^{\circledast}: H \to H,\ H = L_2(\mathbb{R}^s;\mathbb{C}^N)$:

$$\mathbf{\Omega} := \mathbf{\Omega}_+^{-1}\mathbf{\Omega}_-, \qquad \mathbf{\Omega}^{\circledast} := \mathbf{\Omega}_+^{\circledast-1}\mathbf{\Omega}_-^{\circledast}. \tag{6.9}$$

Варто зазначити, що ядра $\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega})$ та $\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}^{\circledast}) \in H_- \otimes H_-$ задовольняють узагальнені [2] визначальні рівняння у тензорному вигляді

$$\begin{gathered}
(\tilde{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{1})\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}) = (\mathbf{1}\otimes\mathcal{L}^*)\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}), \\
(\tilde{\mathcal{L}}^* \otimes \mathbf{1})\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}^{\circledast}) = (\mathbf{1}\otimes\mathrm{L})\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}^{\circledast}).
\end{gathered} \tag{6.10}$$

Оскільки $\operatorname{supp}\hat{K}_+(\mathbf{\Omega}) \cap \operatorname{supp}\hat{K}_-(\mathbf{\Omega}) = \sigma_{(t_0;x)}^{(s-1)} \cup \sigma_{(t_0;x_0)}$ та $\operatorname{supp}\hat{K}_+(\mathbf{\Omega}^{\circledast}) \cup \operatorname{supp}\hat{K}_-(\mathbf{\Omega}^{\circledast}) = \mathbb{R}^s$, за результатами [28, 46, 62] отримуємо, що відповідні рівняння Гельфанда – Левітана – Марченка мають вигляд

$$\begin{gathered}
\hat{K}_+(\mathbf{\Omega}) + \hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) + \hat{K}_+(\mathbf{\Omega}) \cdot \hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) = \hat{K}_-(\mathbf{\Omega}), \\
\hat{K}_+(\mathbf{\Omega}^{\circledast}) + \hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}^{\circledast}) + \hat{K}_+(\mathbf{\Omega}^{\circledast}) \cdot \hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}^{\circledast}) = \hat{K}_-(\mathbf{\Omega}^{\circledast}),
\end{gathered} \tag{6.11}$$

де, за означенням, $\mathbf{\Omega} := \mathbf{1} + \hat{\Phi}(\mathbf{\Omega})$, $\mathbf{\Omega}^{\circledast} := 1 + \hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}^{\circledast})$, і їх можна розв'язати [27, 46] у просторі $\mathcal{B}_\infty^\pm(H)$ для ядер $\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega})$ і $\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}^{\circledast}) \in H_- \otimes H_-$, що параметрично залежать від $t \in \mathrm{T}^2$. Тому трансмутовані за Дельсартом диференціальні оператори $\tilde{\mathrm{L}}_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ j = \overline{1,2}$, комутують між собою і задовольняють співвідношення

$$\tilde{\mathrm{L}}_j = \partial/\partial t_j - \mathbf{\Omega}_\pm L_j \mathbf{\Omega}_\pm^{-1} - \left(\partial\mathbf{\Omega}_\pm/\partial t_j\right)\mathbf{\Omega}_\pm^{-1} := \partial/\partial t_j - \tilde{L}_j, \tag{6.12}$$

де операторні вирази для $\tilde{L}_j : H \to H,\ j = \overline{1,2}$, є суто диференціальними. Остання властивість дозволяє побудувати певні нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними на коефіцієнти диференціальних операторів (6.12) і розв'язати їх за допомогою стандартної процедури оберненого спектрального перетворення [36, 38, 44, 57] або перетворення Дарбу – Беклунда

[37, 60, 67], які дають широкий клас точних розв'язків солітонного типу. Інший непростий, але цікавий аспект підходу, розвиненого в даній роботі, пов'язаний [15] з алгоритмами дослідження диференціально-операторних виразів, залежних від спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$, і, зокрема, раніше обговорювався у роботах [28, 62].

Автори вдячні колегам з Інституту математики НАН України, механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Т. Шевченка та механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені І. Франка за корисні обговорення теорії операторів трансмутації Дельсарта та їх застосувань у сучасній математичній фізиці. Особливо хочемо відзначити плідні дискусії та корисні поради і зауваження, надані професором Л. П. Нижником та доцентом І. В. Микитюком під час підготовки рукопису до публікації.

Література

1. *Абловиц М., Сегур Х.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. – М.: Мир, 1989.
2. *Berezansky Yu. M.* Eigenfunctions expansions related with selfadjoint operators. – Kiev: Naukova Dumka, 1965 (in Russian).
3. *Berezin F. A., Shubin M. A.* Schrödinger equation. – Moscow: Moscow Univ. Publ., 1983 (in Russian).
4. *Blackmore D., Prykarpatsky A. K., Samoylenko V. Hr.* Nonlinear dynamical systems of mathematical physics: spectral and differential-geometrical integrability analysis. – World Sci. Publ., 2011.
5. *Blackmore D., Prykarpatsky A. K., Zagrodzinski J.* Lax-type flows on Grassmann manifolds and dual momentum mappings // Rep. Math. Phys. –1997. – **40**, № 3. – P. 539 – 549.
6. *Bukhgeim A. L.* Volterra equations and inverse problems. – Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).
7. *Calogero F., Degasperis A.* Spectral transform and solitons // Stud. Math. and Appl. – 1982. – Vol. 1. – 532 p.
8. *Chern S. S.* Complex manifolds. – Chicago Univ. Publ., 1956.
9. *Carroll R.* Topics in soliton theory. – North Holland, 1991. – 428 p.
10. *Carroll R.* Transmutation and operator differential equations. – North Holland, 1979. – 245 p.
11. *Carroll R.* Transmutation, scattering theory and special functions. – North Holland, 1982. – 457 p.
12. *Carroll R.* Transmutation theory and applications. – North Holland, 1986. – 351 p.
13. *Chadan K., Sabatier P. C.* Inverse problems in quantum scattering theory. – Springer, 1989. – 439 p.
14. *Danford N., Schwartz J. T.* Linear operators. – New York: InterSci. Publ., 1963.
15. *Datta B. N., Sarkissian D. R.* Feedback control in distributed parameter gyroscopic systems: a solution of the partial eigenvalue assignment problem // Mech. Syst. and Signal Proc. – 2002. – **16**, № 1. – P. 3 – 17.
16. *Delsarte J.* Sur certaines transformations fonctionelles relative aux equations lineaires aux derives partielles du second ordre // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1938. – **206**. – P. 178 – 182.
17. *Delsarte J., Lions J. L.* Transmutations d'operateurs differentielles dans le domain complexe // Comment. Math. Helv. – 1957. – **52**. – P. 113 – 128.
18. *Delsarte J., Lions J. L.* Moyennes generalisees // Comment. Math. Helv. – 1959. – № 34. – P. 59 – 69.
19. *De Rham G.* Varietes differentielles. – Paris: Hermann, 1955.
20. *De Rham G.* Sur la theorie des formes differentielles harmoniques // Ann. Univ. Grenoble. – 1946. – **22**. – P. 135 – 152.
21. *Dirac P. A. M.* The principles of quantum mechanics. – Oxford Univ. Press, 1935. – 300 p.
22. *Dunford N., Schwartz T.* Linear operators. Spectral operators. – New York etc.: Wiley-lntersci., 1971.
23. *Faddeev L. D.* Quantum inverse scattering problem. II // Modern Problems Math. – Moscow: VINITI Publ., 1974. – **3**. – P. 93 – 180 (in Russian).
24. *Faddeev L. D., Takhtadjyan L. A.* Hamiltonian approach to soliton theory. – Moscow: Nauka, 1986 (in Russian).
25. *Gilbert R., Begehr Y.* Transformations, transmutations and kernel functions. – Longman: Pitman, 1992. – Vols 1, 2.
26. *Godbillon C.* Geometrie differentielle et mechanique analytique. – Paris: Hermann, 1969.
27. *Gokhberg I. C., Krein M. G.* Theory of Volterra operators. – Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).
28. *Golenia J., Prykarpatsky Y. A., Samoilenko A. M., Prykarpatsky A. K.* The general differential-geometric structure of multidimensional Delsarte transmutation operators in parametric functional spaces and their applications in soliton theory. Pt 2 // Opuscula Math. – 2004. – № 24.
29. *Holod P. I., Klimyk A. U.* Theory of symmetry. – Moscow: Factorial, 2002 (in Russian).

30. *Hruslov E. J.* Asymptotics of the solution of the Cauchy problem for the KdV equation with step-like initial data // Math. USSR-Sb. – 1976. – **28**. – P. 229 – 248.
31. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Совр. математика. Фундам. направления. – 2018. – **64**, № 2. – С. 211 – 428.
32. *Konopelchenko B. G.* Solitons in multidimensions: inverse spectral transform method. – Singapore: World Sci., 1993.
33. *Krichever I. M.* Algebro-geometric methods in theory of nonlinear equations // Russian Math. Surveys. – 1977. – **32**, № 6. – P. 183 – 208 (in Russian).
34. *Lax P.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Communs Pure and Appl. Math. – 1968. – **21**, № 2. – P. 467 – 490.
35. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщенного сдвига. – М.: Наука, 1973.
36. *Levitan B. M., Sargsian I. S.* Sturm – Liouville and Dirac operators. – Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
37. *Matveev V. B., Salle M. I.* Darboux – Backlund transformations and applications. – New York: Springer, 1993.
38. *Levitan B.M.* Sturm – Liouville inverse problems. – Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).
39. *Lions J. L.* Operateurs de Delsarte et probl‘eme mixte // Bull. Soc. Math. France. – 1956. – № 84. – P. 9 – 95.
40. *Lions J. L.* Quelques applications d’operateurs de transmutations // Colloq. Int. Nancy. – 1956. – P. 125 – 142.
41. *Lopatynski Y. B.* On harmonic fields on Riemannian manifolds // Ukr. Math. J. – 1950. – **2**, № 1. – P. 56 – 60 (in Russian).
42. *Лопатинський Я. Б.* Введение в современную теорию дифференциальных уравнений в частных производных. – Киев: Наук. думка, 1980.
43. *Манаков С. В.* Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения // Успехи мат. наук. – 1976. – **31**, № 5. – С. 245 – 246.
44. *Marchenko V. A.* Spectral theory of Sturm – Liouville operators. – Kiev: Naukova Dumka, 1972 (in Russian).
45. *Mitropolsky Yu. A., Bogolubov N. N. (Jr.), Prykarpatsky A. K., Samoylenko V. H.* Integrable dynamical systems: differential-geometric and spectral aspects. – Kiev: Naukova Dumka, 1987.
46. *Mykytiuk Ya. V.* Factorization of Fredholmian operators // Math. Stud. Proc. Lviv Math. Soc. – 2003. – **20**, № 2. – P. 185 – 199 (in Ukrainian).
47. *Mykytiuk Ya. V.* Factorization of Fredholmian operators in operator algebras // Math. Stud. Proc. Lviv Math. Soc. – 2004. – **21**, № 1. – P. 87 – 97 (in Ukrainian).
48. *Newell A. C.* Solitons in mathematics and physics. – Arizona, SIAM Publ., 1985.
49. *Newton R. G.* Inverse Schrödinger scattering in three dimensions. – Berlin etc.: Springer, 1989.
50. *Nimmo J. C. C.* Darboux tarnsformations from reductions of the KP-hierarchy. – 2002. – 11 p. – (Preprint / Univ. Glasgow).
51. *Нижник Л. П.* Интегрирование нелинейных многомерных уравнений методом обратной задачи // Докл. АН СССР. – 1980. – **254**, № 2. – С. 332 – 335.
52. *Нижник Л. П.,* Обратная задача рассеяния для гиперболических уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991.
53. *Nizhnik L. P.* The inverse scattering problems for the hyperbolic equatioins and their applications to non-linear integrable equatiins // Rep. Math. Phys. – 1988. – **26**, № 2. – P. 261 – 283.
54. *Nizhnik L. P.* Inverse scattering problem for he wave equation and its application // Parameter Identification and Inverse Problems in Hydrology, Geology and Ecology. – 1996. – P. 233 – 238.
55. *Nizhnik L. P., Pochynaiko M. D.* The integration of a spatially two-dimensional Schrödinger equation by the inverse problem method // Func. Anal. and Appl. – 1982. – **16**, № 1. – P. 80 – 82 (in Russian).
56. *von Neumann J.* Mathematical foundations of quantum mechanics // Princeton Landmarks Math. and Phys. – 1955. – 464 p.
57. *Novikov S. P., Manakov S. V., Pitaevskii L. P., Zakharov V. E.* Theory of solitons. The inverse scattering method. – Springer, 1984.
58. *Ovsienko V.* Bi-Hamilton nature of the equation $u_{tx} = u_{xy}u_y - u_{yy}u_x$ // arXiv:0802.1818v1 [math-ph] 13 Feb 2008.
59. *Ovsienko V., Roger C.* Looped cotangent Virasoro algebra and non-linear integrable systems in dimension $2 + 1$ // Communs Math. Phys. – 2007. – **273**. – P. 357 – 378.
60. *Prykarpatsky A. K., Blackmore D.* Versal deformations of a Dirac type differential operator // J. Nonlinear Math. Phys. – 1999. – **6**, № 3. – P. 246 – 254.
61. *Prykarpatsky A. K., Mykytiuk I. V.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: classical and quantum aspects. – Kluwer Acad. Publ., 1998.

62. *Prykarpatsky A. K., Samoilenko A. M., Prykarpatsky Y. A.* The multi-dimensional Delsarte transmutation operators, their differential-geometric structure and applications. Pt. 1 // Opuscula Math. – 2003. – **23**. – P. 71 – 80.
63. *Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A.* Integrable systems. – Moscow; Izhevsk: Comput. Res. Inst. Publ., 2003 (in Russian).
64. *Самойленко А. М., Прикарпатський Я. А.* Алгебро-аналітичні аспекти цілком інтегровних динамічних систем та їх збурень. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – **41**.
65. *Samoilenko A. M., Prykarpatsky Y. A., Prykarpatsky A. K.* Generalized de-Rham – Hodge – Skrypnik theory: differential-geometric and spectral aspects with applications // Ukr. Math. Bull. – 2005. – **2**, № 4. – P. 550 – 582.
66. *Samoilenko A. M., Prykarpatsky Y. A., Prykarpatsky A. K.* The de-Rham – Hodge – Skrypnik theory of Delsarte – Lions transmutations in multidimension and its applications // Rep. Math. Phys. – 2005. – **55**, № 3. – P. 351 – 370.
67. *Samoilenko A. M., Prykarpatsky Y. A., Samoylenko V. G.* The structure of Darboux-type binary transformations and their applications in soliton theory // Ukr. Mat. Zh. – 2003. – **55**, № 12. – P. 1704 – 1723 (in Ukrainian).
68. *Samoilenko A. M., Prykarpatsky Y. A., Prykarpatsky A. K.* The spectral and differential geometric aspects of a generalized De Rham – Hodge theory related with Delsarte transmutation operators in multidimension and its applications to spectral and soliton problems // Nonlinear Anal. – 2006. – **65**. – P. 395 – 432.
69. *Sitnik S. M.* Buschman – Erdelyi transmutations, classification and applications // arXiv:1304.2114v1 [math.CA] 8 Apr. 2013.
70. *Sitnik S. M.* Transmutations and applications. A survey // Advances in Modern Anal. and Math. Modeling / Eds Yu. F. Korobeinik, A. G. Kusraev. – Vladikavkaz: Vladikavkaz Sci. Center Rus. Acad. Sci. and Rep. North Ossetia-Alania. – 2008. – P. 226 – 293.
71. *Skrypnik I. V.* Periods of A-closed forms // Proc. USSR Acad. Sci. – 1965. – **160**, № 4. – P. 772 – 773 (in Russian).
72. *Skrypnik I. V.* A harmonique fields with peculiarities // Ukr. Math. J. – 1965. – **17**, № 4. – P. 130 – 133 (in Russian).
73. *Skrypnik I. V.* The generalized De Rham theorem // Proc. UkrSSR Acad. Sci. – 1965. – **1**. – P. 18 – 19 (in Ukrainian).
74. *Skrypnik I. V.* A-harmonic forms on a compact Riemannian space // Proc. UkrSSR Acad. Sci. – 1965. – **2**. – P. 174 – 175 (in Ukrainian).
75. *Spivak M.* Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus. – Addison-Wesley Publ. Co., 1965. – 146 p.
76. *Shubin M. A.* Pseudo-differential operators and spectral theory. – Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
77. *Teleman R.* Elemente de topologie si varietati diferentiabile. – Bucuresti Publ., 1964.
78. *Trimeche Kh.* Transmutation operators and mean-periodic functions associated with differential operators // Math. Rep. – 1988. – **4**, Pt. 1. – 282 p.
79. *Веселов А. П., Новиков С. П.* Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Потенциальные операторы // Докл. АН СССР. – 1984. – **279**, № 4. – С. 20 – 24.
80. *Warner F.* Foundations of differential manifolds and Lie groups. – New York: Acad. Press, 1971.
81. *Zakharov V. E., Shabat A. B.* An exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional automodulation of waves in nonlinear media // Zh. Eksp. Teor. Fiz. – 1971. – **61**, № 1. – P. 118 – 134.

Одержано 13.06.18