УДК 512.542

Чжан Чи* (Ун-т науки и технологии Китая),
А. Н. Скиба (Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины, Беларусь)

О Σ_t^σ-ЗАМКНУТЫХ КЛАССАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП*

All analyzed groups are finite. Let $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ be a partition of the set of all primes $\mathbb{P}$. If n is an integer, then the symbol $\sigma(n)$ denotes a set $\{\sigma_i | \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$. Integers n and m are called σ-coprime if $\sigma(n) \cap \sigma(m) = \varnothing$.

Let $t > 1$ be a natural number and let $\mathfrak{F}$ be a class of groups. Then we say that $\mathfrak{F}$ is Σ_t^σ-closed provided $\mathfrak{F}$ contains each group G with subgroups $A_1, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}$ whose indices $|G : A_1|, \ldots, |G : A_t|$ are pairwise σ-coprime.

We study Σ_t^σ-closed classes of finite groups.

Усі розглянуті в роботі групи є скінченними. Нехай $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — деяке розбиття множини всіх простих чисел $\mathbb{P}$. Якщо n — ціле число, символ $\sigma(n)$ позначає множину $\{\sigma_i | \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$. Цілі числа n і m називаються σ-взаємно простими, якщо $\sigma(n) \cap \sigma(m) = \varnothing$.

Нехай $t > 1$ — натуральне число і $\mathfrak{F}$ — клас груп. Тоді говорять, що $\mathfrak{F}$ є Σ_t^σ-замкненим, якщо $\mathfrak{F}$ містить кожну групу G з підгрупами $A_1, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}$, індекси яких $|G : A_1|, \ldots, |G : A_t|$ є попарно σ-взаємно простими.

В даній роботі досліджуються Σ_t^σ-замкнені класи скінченних груп.

1. Введение. Все рассматриваемые в данной работе группы конечны, и G всегда обозначает конечную группу. Более того, $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\pi = \{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если n — натуральное число, то символ $\pi(n)$ обозначает множество всех его простых делителей n; как обычно, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых делителей порядка группы G.

Следуя Л. А. Шеметкову [1], символом σ будем обозначать некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$, $\Pi \subseteq \sigma$ и $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$. Группа G называется [2] *σ-примарной*, если G — σ_i-группа для некоторого i; *σ-разрешимой,* если каждый главный фактор группы G является σ-примарным.

В дальнейшем $\sigma(n) = \{\sigma_i | \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$ [3, 4], $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ и $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$. Натуральные числа n и m называются *σ-взаимно простыми*, если $\sigma(n) \cap \sigma(m) = \varnothing$.

Напомним, что G называется *σ-разложимой* [1] или *σ-нильпотентной* [5], если $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ для некоторых σ-примарных групп $G_1, \ldots, G_n$, и *мета-σ-нильпотентной* [4], если G является расширением некоторой σ-нильпотентной группы с помощью σ-нильпотентной группы.

Отметим также, что σ-нильпотентные группы оказались весьма полезными в теории формаций (см., например, статьи [6, 7] и монографии [1] (гл. IV), [8] (гл. 6)). В последние годы σ-нильпотентные группы и различные классы мета-σ-нильпотентных групп нашли новые и в определенной степени неожиданные приложения в теориях перестановочных и обобщенно субнормальных подгрупп (см., в частности, статьи [2, 9–18] и обзор [4]). Это обстоятельство указывает на то, что задача дальнейшего изучения σ-нильпотентных и мета-σ-нильпотентных групп является вполне актуальной и интересной.

В данной работе мы изучаем Σ_t^σ-замкнутые классы мета-σ-нильпотентных групп в смысле следующего определения.

* Исследования Чжан Чи поддержаны Китайским стипендиальным советом и НФСО Китая (11771409).

Определение 1.1. *Пусть $t > 1$ — натуральное число и $\mathfrak{F}$ — класс групп. Тогда мы говорим, что $\mathfrak{F}$ является Σ_t^σ-замкнутым, если $\mathfrak{F}$ содержит каждую группу G, имеющую подгруппы $A_1, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}$, индексы которых $|G : A_1|, \ldots, |G : A_t|$ попарно σ-взаимно просты.*

Символ σ в этом определении мы опускаем в случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$ (здесь используем обозначения из работы [9]). Таким образом, в этом случае мы рассматриваем Σ_t-*замкнутые* классы групп в обычном смысле [1, с. 44].

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если: (i) $G/N \in \mathfrak{F}$ для каждой группы $G \in \mathfrak{F}$ и любой ее нормальной подгруппы N, (ii) $G/(N \cap R) \in \mathfrak{F}$ для любой группы G с $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G/R \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной* или *локальной*, если $G \in \mathfrak{F}$ для любой группы G с условием $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$.

Мы называем функцию f вида

$$f : \sigma \to \{\text{формации групп}\}$$

формационной σ-функцией [19] и полагаем

$$LF_\sigma(f) = \Big(G \mid G = 1 \quad \text{или} \quad G \neq 1 \quad \text{и} \quad G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \quad \text{для всех} \quad \sigma_i \in \sigma(G)\Big).$$

Определение 1.2. *Если для некоторой формационной σ-функции f мы имеем $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то говорим, следуя* [19], *что класс $\mathfrak{F}$ является σ-локальным, а f — σ-локальным определением $\mathfrak{F}$.*

Рассмотрим несколько примеров.

***Пример* 1.1.** (i) В силу результатов [20] (IV, 3.2) в случае, когда $\sigma = \sigma^1$, формационная σ-функция и σ-локальная формация — это соответственно формационная функция и локальная формация в обычном смысле [20] (IV, определение 3.1) (см. также [8], гл. 2). В этом случае вместо $LF_\sigma(f)$ мы используем, как обычно, символ $LF(f)$ [20] (IV, определение 3.1).

(ii) Для формации всех единичных групп $\mathfrak{I}$ имеем $\mathfrak{I} = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i) = \varnothing$ для всех i.

(iii) Пусть $\mathfrak{N}_\sigma$ — класс всех σ-нильпотентных групп. Тогда $\mathfrak{N}_\sigma$ — формация [2] и, очевидно, $\mathfrak{N}_\sigma = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i) = \mathfrak{I}$ для всех i.

(iv) Пусть теперь $\mathfrak{N}_\sigma^2$ — класс всех мета-σ-нильпотентных групп. Тогда $\mathfrak{N}_\sigma^2 = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i) = \mathfrak{N}_\sigma$ для всех i.

(v) Формация всех сверхразрешимых групп $\mathfrak{U}$ не является σ-локальной для всех σ с $\sigma \neq \sigma^1$. Действительно, предположим, что $\mathfrak{U} = LF_\sigma(f)$ является σ-локальной и $|\sigma_i| > 1$ для некоторого i. Пусть $p, q \in \sigma_i$, где $p > q$. Наконец, пусть $G = C_q \wr C_p = K \rtimes C_p$ — регулярное сплетение групп C_q и C_p с $|C_q| = q$ и $|C_p| = p$, где K — базовая группа сплетения G. Тогда $C_G(K) = K$, а также $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = G$ и $\sigma(G) = \{\sigma_i\}$. Поскольку $C_p \in \mathfrak{U}$, то $f(\sigma_i) \neq \varnothing$. Следовательно, $G \in LF_\sigma(f) = \mathfrak{U}$, и поэтому $G = C_q \times C_p$, так как $p > q$. Противоречие. Следовательно, мы имеем (v).

Теория Σ_t-замкнутых классов разрешимых групп и ее приложения были рассмотрены в работе [21] (см. также [1] (гл. 1) и [22] (гл. 2)).

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Каждая σ-локальная формация мета-σ-нильпотентных групп является Σ_4^σ-замкнутой.*

В случае, когда $\sigma = \sigma^1$, из теоремы 1.1 получаем следующие известные факты.

***Следствие* 1.1** [23]. *Если G имеет четыре сверхразрешимые подгруппы A_1, A_2, A_3, A_4, индексы которых $|G\colon A_1|$, $|G\colon A_2|$, $|G\colon A_3|$, $|G\colon A_4|$ попарно взаимно просты, то G сверхразрешима.*

***Следствие* 1.2.** *Если G имеет четыре метанильпотентные подгруппы A_1, A_2, A_3, A_4, индексы которых $|G\colon A_1|$, $|G\colon A_2|$, $|G\colon A_3|$, $|G\colon A_4|$ попарно взаимно просты, то G метанильпотентна.*

***Следствие* 1.3.** *Предположим, что G имеет четыре подгруппы A_1, A_2, A_3, A_4, индексы которых $|G\colon A_1|$, $|G\colon A_2|$, $|G\colon A_3|$, $|G\colon A_4|$ попарно взаимно просты. Если A_i' является нильпотентной для всех $i = 1, 2, 3, 4$, то G' нильпотентна.*

Наконец, из теоремы 1.1 получаем следующий результат.

***Следствие* 1.4** [21]. *Каждая локальная формация метанильпотентных групп является Σ_4-замкнутой.*

В теории π-разрешимых групп ($\pi = \{p_1, \ldots, p_n\}$) рассматривается разбиение $\sigma = \sigma^{1\pi} = \{\{p_1\}, \ldots, \{p_n\}, \pi'\}$ множества $\mathbb{P}$ [9]. Заметим, что G является $\sigma^{1\pi}$-разрешимой в том и только в том случае, когда G π-разрешима; $\sigma^{1\pi}$-нильпотентной в том и только в том случае, когда G является *π-специальной* [24], т. е. $G = O_{p_1}(G) \times \ldots \times O_{p_n}(G) \times O_{\pi'}(G)$.

Таким образом, мы получаем в этом случае из теоремы 1.1 следующие утверждения.

***Следствие* 1.5.** *Предположим, что G имеет четыре мета-π-специальные подгруппы A_1, A_2, A_3, A_4, индексы которых $|G\colon A_1|$, $|G\colon A_2|$, $|G\colon A_3|$, $|G\colon A_4|$ попарно взаимно просты и каждый из них является либо π-числом, либо π'-числом. Предположим также, что только одно из чисел $|G\colon A_1|$, $|G\colon A_2|$, $|G\colon A_3|$, $|G\colon A_4|$ является π'-числом. Тогда G является мета-π-специальной.*

***Следствие* 1.6.** *Предположим, что G имеет четыре подгруппы A_1, A_2, A_3, A_4, индексы которых $|G\colon A_1|$, $|G\colon A_2|$, $|G\colon A_3|$, $|G\colon A_4|$ попарно взаимно просты и каждый из них является либо π-числом, либо π'-числом. Предположим также, что только одно из чисел $|G\colon A_1|$, $|G\colon A_2|$, $|G\colon A_3|$, $|G\colon A_4|$ является π'-числом. Если A_i' является π-специальной для всех $i = 1, 2, 3, 4$, то G' является π-специальной.*

Если для подгруппы A группы G имеет место $\sigma(|A|) \subseteq \Pi$ и $\sigma(|G\colon A|) \subseteq \Pi'$, то A называется *холловой Π-подгруппой* [4] группы G. Мы говорим, что G является *Π-замкнутой*, если G имеет нормальную холлову Π-подгруппу.

Доказательству теоремы 1.1 предшествует много вспомогательных результатов. Следующая теорема является одним из них.

Теорема 1.2. (i) *Класс всех σ-разрешимых Π-замкнутых групп $\mathfrak{F}$ является Σ_3^σ-замкнутым.*

(ii) *Каждая формация σ-нильпотентных групп $\mathfrak{M}$ является Σ_3^σ-замкнутой.*

***Следствие* 1.7.** *Классы всех σ-разрешимых групп и всех σ-нильпотентных групп являются Σ_3^σ-замкнутыми.*

В случае, когда $\sigma = \sigma^1$, из следствия 1.7 получаем следующие известные результаты.

***Следствие* 1.8** ([20], гл. I, теорема 3.4). *Если G имеет три разрешимые подгруппы A_1, A_2 и A_3, индексы которых $|G\colon A_1|$, $|G\colon A_2|$, $|G\colon A_3|$ попарно взаимно просты, то G разрешима.*

***Следствие* 1.9** [25]. *Если G имеет три нильпотентные подгруппы A_1, A_2 и A_3, индексы которых $|G\colon A_1|$, $|G\colon A_2|$, $|G\colon A_3|$ попарно взаимно просты, то G нильпотентна.*

***Следствие* 1.10** [23]. *Если G имеет три абелевы подгруппы A_1, A_2 и A_3, индексы которых $|G\colon A_1|$, $|G\colon A_2|$, $|G\colon A_3|$ попарно взаимно просты, то G абелева.*

В случае, когда $\sigma = \sigma^{1\pi}$, из теоремы 1.2 получаем следующие результаты.

***Следствие* 1.11.** *Предположим, что G имеет три π-разрешимые подгруппы A_1, A_2, A_3, индексы которых $|G\colon A_1|$, $|G\colon A_2|$, $|G\colon A_3|$ попарно взаимно просты и каждый из них является либо π-числом, либо π'-числом. Предположим также, что только одно из чисел $|G\colon A_1|$, $|G\colon A_2|$, $|G\colon A_3|$ является π'-числом. Тогда G является π-разрешимой.*

***Следствие* 1.12.** *Предположим, что G имеет три π-специальные подгруппы A_1, A_2, A_3, индексы которых $|G\colon A_1|$, $|G\colon A_2|$, $|G\colon A_3|$ попарно взаимно просты и каждый из них является либо π-числом, либо π'-числом. Предположим также, что только одно из чисел $|G\colon A_1|$, $|G\colon A_2|$, $|G\colon A_3|$ является π'-числом. Тогда G является π-специальной.*

2. Общие свойства σ-локальных формаций. Если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — классы групп, то $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — класс всех групп G таких, что для некоторой нормальной подгруппы N группы G имеет место $G/N \in \mathfrak{H}$ и $N \in \mathfrak{M}$. *Гашютцево произведение* $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ классов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ определяется условием: $G \in \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ в том и только в том случае, когда $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется *наследственным* (в смысле Мальцева [26]), если $G \in \mathfrak{F}$ в случае, когда $G \leq A \in \mathfrak{F}$.

Все утверждения следующей леммы известны (см., например, [27] (гл. II) или [20] (гл. IV)), и, фактически, каждое из них может быть доказано непосредственной проверкой.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — формации.*

(1) *$\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ — формация.*

(2) *Если $\mathfrak{M}$ является наследственной, то $\mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$.*

(3) *$(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}) \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \circ (\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F})$.*

(4) *Если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ являются наследственными, то $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ также наследственная.*

(5) *Если $\mathfrak{M}$ является насыщенной и $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \pi(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ также насыщенная.*

Класс всех Π-групп мы обозначим через $\mathfrak{G}_\Pi$, а класс всех σ-разрешимых Π-групп — через $\mathfrak{S}_\Pi$. В частности, $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ — класс всех σ_i'-групп, $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ — класс всех σ_i-групп и $\mathfrak{S}_{\sigma_i'}$ — класс всех σ-разрешимых σ_i'-групп.

Через $F_\Pi(G)$ обозначим произведение всех нормальных Π'-замкнутых подгрупп группы G. Мы пишем также $F_{\sigma_i}(G)$ вместо символа $F_{\{\sigma_i\}}(G)$.

Лемма 2.2. (1) *Класс всех (σ-разрешимых) Π-замкнутых групп $\mathfrak{F}$ является наследственной формацией. Более того,*

(2) *если E — нормальная подгруппа в G и $E/E \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $E \in \mathfrak{F}$; следовательно, формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной;*

(3) *если $A, B \in \mathfrak{F}$ — нормальные подгруппы в G и $G = AB$, то $G \in \mathfrak{F}$;*

(4) *если E — субнормальная подгруппа в G, то $F_\Pi(G) \cap E = F_\Pi(E)$.*

Доказательство. (1) Понятно, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\Pi \mathfrak{G}_{\Pi'}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ — наследственная формация по лемме 2.1 (пп. 1, 2, 4).

(2) Пусть $H/E\cap\Phi(G)$ — нормальная холлова Π-подгруппа в $E/E\cap\Phi(G)$. Тогда $H/E\cap\Phi(G)$ является характеристической в $E/E \cap \Phi(G) \trianglelefteq G/E \cap \Phi(G)$, и поэтому H нормальна в G. Пусть $D = O_{\Pi'}(E \cap \Phi(G))$. Тогда, поскольку $E \cap \Phi(G)$ является нильпотентной, D — холлова Π'-подгруппа в H. Следовательно, согласно теореме Шура – Цассенхауза, H имеет холлову

Π-подгруппу V и любые две холловы Π-подгруппы группы H сопряжены в H. Следовательно, $G = HN_G(V) = (VD))N_G(V) = N_G(V)$ согласно обобщенной лемме Фраттини. Таким образом, V нормальна в G. Наконец, заметим, что V является холловой Π-подгруппой в E, так как $\sigma(|E/E \cap \Phi(G) \colon H/E \cap \Phi(G)|) \cap \Pi = \varnothing$, и поэтому $E \in \mathfrak{F}$.

(3) Если V — холлова Π-подгруппа в A, то V является характеристической в A, и поэтому V нормальна в G. Аналогично, холлова Π-подгруппа W группы B нормальна в G. Более того,

$$G/VW = AB/VW = (AVW/VW)(BVW/VW),$$

где

$$AVW/VW \simeq A/A \cap VW = A/V(A \cap W) \simeq (A/V)/(V(A \cap W)/V$$

и BVW/VW — Π'-группы. Следовательно, VW — холлова Π-подгруппа в G, и поэтому $G \in \mathfrak{F}$.

(4) Так как группа A является Π'-замкнутой в том и только в том случае, когда $A \in \mathfrak{G}_{\Pi'}\mathfrak{G}_{\Pi}$, утверждение (4) справедливо согласно предложению [20] (гл. VIII).

Лемма 2.2 доказана.

Если f — формационная σ-функция, то символ $\mathrm{Supp}\,(f)$ обозначает *суппорт* функции f, т. е. множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \varnothing$.

Лемма 2.3. *Пусть* $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ *и* $\Pi = \mathrm{Supp}\,(f)$. *Тогда:*

(1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;

(2) $G \in \mathfrak{F}$ *в том и только в том случае, когда* $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ *для всех* $\sigma_i \in \sigma(G)$;

(3) $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_\Pi$; *следовательно,* $\mathfrak{F}$ *— насыщенная формация;*

(4) *если каждая группа класса* $\mathfrak{F}$ *является* σ*-разрешимой, то* $\mathfrak{F} = \left(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)\right) \cap$ $\cap\, \mathfrak{G}_\Pi$.

Доказательство. (1) Пусть $\sigma_i \in \Pi$, тогда $1 \in f(\sigma_i)$ и для всех σ_i-групп $G \neq 1$ имеет место $\sigma(G) = \{\sigma_i\}$ и $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = G$. Следовательно, $G \in LF_\sigma(f) = \mathfrak{F}$, и поэтому $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$. Значит, $\Pi \subseteq \sigma(\mathfrak{F})$. С другой стороны, если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$, то для некоторой группы $G \in \mathfrak{F}$ имеет место $\sigma_i \in \sigma(G)$ и $G/F_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$. Таким образом, $\sigma_i \in \Pi$, и поэтому $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$.

(2) Если $G \in \mathfrak{F}$ и $\sigma_i \in \sigma(G)$, то $G/F_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$, где $F_{\sigma_i}(G)$ является σ_i'-замкнутой по лемме 2.2(3). Значит, $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ по лемме 2.2(1). Аналогично, если для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$ имеет место $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$, то $G/F_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$, и поэтому $G \in \mathfrak{F}$.

(3) Если $G \in \mathfrak{F}$, то $\sigma(G) \subseteq \Pi$, и поэтому $G \in \mathfrak{G}_\Pi$. Более того, в этом случае для всех $\sigma_i \in$ $\in \sigma(G)$ имеет место $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ по утверждению (2) леммы. Наконец, если $\sigma_i \in \Pi \backslash \sigma(G)$, то $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i'} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$, так как класс $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ является наследственным. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_\Pi$. Значит, $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_\Pi$ является наследственной формацией в силу лемм 2.1(5) и 2.2(1), (2). Следовательно, мы имеем (3).

(4) См. доказательство утверждения (3).

Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. *Если* $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, *то* $\mathfrak{F} = LF_\sigma(t)$, *где* $t(\sigma_i) = f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ *для всех* $\sigma_i \in \sigma$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу леммы 2.3(3) t — формационная σ-функция и $LF_\sigma(t) \subseteq \mathfrak{F}$. С другой стороны, если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/F_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F} = t(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$, и поэтому $G \in LF_\sigma(t)$. Следовательно, $\mathfrak{F} = LF_\sigma(t)$.

Лемма 2.4 доказана.

Предложение 2.1. *Пусть* f *и* h *— формационные* σ*-функции и* $\Pi = \mathrm{Supp}\,(f)$. *Предположим, что* $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = LF_\sigma(h)$.

(1) *Если* $\sigma_i \in \Pi$, *то* $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$.

(2) $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, *где* F — *такая формационная* σ-*функция, что*

$$F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}F(\sigma_i)$$

для всех $\sigma_i \in \Pi$.

Доказательство. (1) Предположим, что $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка в $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \setminus \mathfrak{F}$. Заметим, что $f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ — формация по лемме 2.3(3), поэтому $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ — формация по лемме 2.1(1), (2). Следовательно, $R = G^{\mathfrak{F}} \leq G^{f(\sigma_i)\cap\mathfrak{F}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, и поэтому R — σ_i-группа.

Более того, $F_{\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G)$ и $F_{\sigma_j}(G/R) = F_{\sigma_j}(G)/R$ для всех $j \neq i$. Следовательно, поскольку $G/R \in \mathfrak{F}$, имеет место

$$(G/R)/F_{\sigma_j}(G/R) \simeq G/F_{\sigma_j}(G) \in f(\sigma_j)$$

для всех $\sigma_j \in \sigma(G) \setminus \{\sigma_i\}$. Наконец, справедливо

$$G/F_{\sigma_i}(G) = G/O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i),$$

так как $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ и класс $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ является наследственным. Но тогда $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$.

Теперь предположим, что $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \not\subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ и G — группа минимального порядка в $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \setminus \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$. Тогда в G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа R, $R = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i)\cap\mathfrak{F})}$ и $R \nleq O_{\sigma_i}(G)$. Следовательно, $O_{\sigma_i}(G) = 1$.

Пусть A — неединичная σ_i-группа и $E = A \wr G = K \rtimes G$ — регулярное сплетение A и G, где K — базовая группа сплетения E. Тогда $O_{\sigma_i'}(E) = 1$, поэтому $F_{\sigma_i}(E) = O_{\sigma_i}(E) = K(O_{\sigma_i}(E) \cap G) = K$, так как $O_{\sigma_i}(G) = 1$. Более того, поскольку $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$, имеет место $E \in \mathfrak{F}$, и поэтому $E/F_{\sigma_i}(E) = E/K \simeq G \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$. Следовательно, $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$, что влечет $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$.

(2) Пусть $\mathfrak{M} = LF_\sigma(F)$. Тогда

$$\mathfrak{M} = \left(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i}(\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}))\right) \cap \mathfrak{G}_\Pi =$$

$$= \left(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})\right) \cap \mathfrak{G}_\Pi = \mathfrak{F}$$

в силу лемм 2.3(3) и 2.4. Следовательно, мы имеем (2).

Предложение доказано.

***Следствие* 2.1.** (1) *Для каждой формационной* σ-*функции* f *класс* $LF_\sigma(f)$ *является непустой насыщенной формацией.*

(2) *Каждая* σ-*локальная формация* $\mathfrak{F}$ *имеет и притом единственное* σ-*локальное определение* F *такое, что для любого* σ-*локального определения* f *формации* $\mathfrak{F}$ *и для любого* $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ *имеет место*

$$F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}F(\sigma_i).$$

Доказательство. (1) Прежде всего заметим, что каждая единичная группа принадлежит $LF_\sigma(f)$ по определению, поэтому этот класс не является пустым. С другой стороны, класс $LF_\sigma(f)$ является насыщенной формацией по лемме 2.3(3).

(2) Непосредственно следует из предложения 2.1(2).

Следствие доказано.

Напомним, что $\mathrm{form}\,(\mathfrak{X})$ обозначает пересечение всех формаций, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Предложение 2.2. *Пусть* $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ — *σ-локальная формация,* $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$, m — *такая формационная σ-функция, что* $m(\sigma_i) = \mathrm{form}\,(G/F_{\sigma_i}(G) |\ G \in \mathfrak{F})$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi$ *и* $m(\sigma_i) = \varnothing$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi'$. *Тогда:*

(i) $\mathfrak{F} = LF_\sigma(m)$,

(ii) $m(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ *для каждой формационной σ-функции h формации $\mathfrak{F}$ и для каждого* $\sigma_i \in \sigma$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}(\sigma_i) = (G/F_{\sigma_i}(G) |\ G \in \mathfrak{F})$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $\mathfrak{M} = LF_\sigma(m)$. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. С другой стороны, $\mathfrak{F}(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$, и поэтому $m(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Кроме того, имеет место $m(\sigma_i) = \varnothing \subseteq f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, и поэтому $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$.

Утверждение доказано.

Мы называем σ-локальное определение m формации $\mathfrak{F}$ в предложении 2.2 *наименьшим σ-локальным определением формации* $\mathfrak{F}$.

3. Доказательства теорем 1.1 и 1.2. ***Доказательство теоремы* 1.2.** (i) Предположим, что $\mathfrak{F}$ не является Σ_3^σ-замкнутой и G — группа минимального порядка среди групп G таких, что $G \notin \mathfrak{F}$, но G имеет подгруппы $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{F}$, индексы которых $|G : A_1|$, $|G : A_2|$ и $|G : A_3|$ попарно σ-взаимно просты. Тогда $G = A_iA_j$ для всех $i \neq j$. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа в G.

(1) *G/R является σ-разрешимой и Π-замкнутой. Следовательно, R не является σ-примарной Π-группой.*

Если для некоторого i имеет место $A_i \leq R$, то для любого $j \neq i$ имеем $G/R = A_iA_j/R = A_jR/R \simeq A_j/(A_j \cap R) \in \mathfrak{F}$, так как $\mathfrak{F}$ — формация по лемме 2.2. Теперь предположим, что $A_i \nleq R$ для всех i. Тогда условие теоремы выполнено для G/R, поэтому G/R — σ-разрешимая Π-замкнутая группа в силу выбора группы G. Таким образом, R не является σ-примарной Π-группой, так как $G \notin \mathfrak{F}$. Следовательно, мы имеем (1).

(2) *G является σ-разрешимой.*

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа в A_1. Так как A_1 является σ-разрешимой, L — σ_i-группа для некоторого i. Более того, поскольку $|G : A_2| = |A_1 : A_1 \cap A_2|$ и $|G : A_3| = |A_1 : A_1 \cap A_3|$ σ-взаимно просты по условию, имеет место $L \leq A_1 \cap A_2$ или $L \leq A_1 \cap A_3$. Следовательно, мы можем предполагать, не теряя общности, что $L \leq A_2$, и поэтому $L^G = L^{A_1A_2} = L^{A_2} \leq A_2$. Значит, $1 < L^G$ является σ-разрешимой, и поэтому справедливо (2) в силу утверждения (1).

(3) *R — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, $R \nleq \Phi(G)$ и R является σ_i-группой для некоторого $\sigma_i \in \Pi'$. Следовательно, $C_G(R) \leq R$.*

Поскольку G σ-разрешима согласно (2), R является σ_i-группой для некоторого i. Более того, из утверждения (2) и леммы 2.2 следует, что R — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, R является Π'-группой и $R \nleq \Phi(G)$. Следовательно, $C_G(R) \leq R$ согласно результатам [20] (гл. А, 17.2).

(4) *Найдутся такие* $j \neq k$, *что* $R \leq A_j \cap A_k$.

Поскольку $|G\colon A_j|$ и $|G\colon A_k|$ являются σ-взаимно простыми по условию, это следует из утверждения (3).

Заключительное противоречие для (i). Так как $O_{\Pi}(A_j)$ нормальна в A_j и $R \leq O_{\Pi'}(A_j)$ согласно (3) и (4), получаем, что $O_{\Pi}(A_j) \leq C_G(R) \leq R \leq O_{\Pi'}(A_j)$ согласно (3). Следовательно, $O_{\Pi}(A_j) = 1$. Но A_j является Π-замкнутой по условию, и поэтому A_j — Π'-группа. Аналогично, A_k — Π'-группа, и поэтому $G = A_jA_k$ — Π'-группа. Но тогда G является Π-замкнутой. Это противоречие завершает доказательство утверждения (i).

(ii) Предположим, что $\mathfrak{M}$ не является Σ_3^{σ}-замкнутой и G — группа минимального порядка среди групп G таких, что $G \notin \mathfrak{M}$, но G имеет подгруппы $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{M}$, индексы которых $|G\colon A_1|$, $|G\colon A_2|$ и $|G\colon A_3|$ попарно σ-взаимно просты. Тогда $G \neq A_i$ для всех i и G является σ-нильпотентной согласно утверждению (i). Более того, в силу выбора группы G для каждой минимальной нормальной подгруппы R группы G имеет место $G/R \in \mathfrak{M}$. Следовательно, R является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G, поскольку класс $\mathfrak{M}$ является формацией. В частности, G является σ_i-группой для некоторого i. Но тогда в силу $A_1 < G$ и $A_2 < G$ индексы $|G\colon A_1|$ и $|G\colon A_2|$ не являются σ-взаимно простыми. Это противоречие завершает доказательство утверждения (ii).

Теорема 1.2 доказана.

Лемма 3.1. *Если G является σ-разрешимой, то $C_G(F_\sigma(G)) \leq F_\sigma(G)$.*

Доказательство. Пусть $C = C_G(F_\sigma(G))$. Предположим, что $C \nleq F_\sigma(G)$ и $H/F_\sigma(G)$ — такой главный фактор группы G, что $H \leq F_\sigma(G)C$. Тогда $H = F_\sigma(G)(H \cap C)$. Поскольку G является σ-разрешимой,

$$H/F_\sigma(G) = F_\sigma(G)(H \cap C)/F_\sigma(G) \simeq (H \cap C)/((H \cap C) \cap F_\sigma(G))$$

— σ_i-группа для некоторого i.

Пусть теперь U — минимальное добавление к $(H \cap C) \cap F_\sigma(G)$ в $H \cap C$. Тогда $((H \cap C) \cap \cap F_\sigma(G)) \cap U \leq \Phi(U)$, поэтому U является σ_i-группой. Более того, $(H \cap C) \cap F_\sigma(G) \leq Z(H \cap C)$, и поэтому $H \cap C$ — нормальная σ-нильпотентная подгруппа группы G. Следовательно, $H \cap C \leq \leq F_\sigma(G)$, и поэтому $H = F_\sigma(G)$. Это противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\Pi}\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}_\sigma$. Если формация $\mathfrak{X}$ является Σ_t^{σ}-замкнутой, то $\mathfrak{F}$ является Σ_{t+1}^{σ}-замкнутой.*

Доказательство. Предположим, что данная лемма не является справедливой и G — группа минимального порядка среди таких групп G, что $G \notin \mathfrak{F}$, но G имеет подгруппы $A_1, \ldots, A_{t+1} \in \in \mathfrak{F}$, индексы которых $|G\colon A_1|, \ldots, |G\colon A_{t+1}|$ попарно σ-взаимно просты. Тогда G является σ-разрешимой по теореме 1.2.

Пусть R — минимальная нормальная подгруппа группы G, тогда R — σ_i-группа для некоторого i. Более того, условие теоремы выполняется для G/R, так как $\mathfrak{F}$ — формация по лемме 2.1(1), (2), и поэтому $G/R \in \mathfrak{F}$ согласно выбору группы G. Следовательно, R — единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Значит, $\sigma_i \in \Pi'$ и $R \leq O_{\sigma_i}(G) = F_\sigma(G)$. Таким образом, $C_G(F_\sigma(G) = C_G(O_{\sigma_i}(G)) \leq O_{\sigma_i}(G)$ по лемме 3.1.

В силу условия найдутся такие числа $i_1, \ldots, i_t$, что $O_{\sigma_i}(G) \leq A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_t}$. Тогда $O_{\Pi}(A_{i_j}) \leq C_G(O_{\sigma_i}(G)) \leq O_{\sigma_i}(G)$. Следовательно, $O_{\Pi}(A_{i_j}) = 1$, и поэтому $A_{i_j} \in \mathfrak{X}$ для всех $j = 1, \ldots, t$. Таким образом, $G \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, поскольку $\mathfrak{X}$ является Σ_t^{σ}-замкнутой. Это противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 3.3. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— формация* σ*-разрешимых* Π*-замкнутых групп и* $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\Pi\mathfrak{M}$. *Если* $\mathfrak{M}$ *является* Σ_3^σ*-замкнутой, то* $\mathfrak{F}$ *также* Σ_3^σ*-замкнута.*

Доказательство. Предположим, что G имеет такие подгруппы $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{F}$, индексы которых $|G : A_1|$, $|G : A_2|$, $|G : A_3|$ попарно σ-взаимно просты. Тогда G имеет нормальную холлову Π-подгруппу V по теореме 1.2. Следовательно, $V \cap A_i$ — нормальная холлова Π-подгруппа V в A_i, и поэтому из изоморфизма $VA_i/V \simeq A_i/A_i \cap V$ вытекает, что $VA_i/V \in \mathfrak{M}$ и индексы $|(G/V) : (A_1V/V)|$, $|(G/V) : (A_2V/V)|$, $|(G/V) : (A_3V/V)|$ попарно σ-взаимно просты. Но тогда $G/V \in \mathfrak{M}$, поскольку $\mathfrak{M}$ является Σ_3^σ-замкнутой по условию. Значит, $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма доказана.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 3.4. *Если класс групп* $\mathfrak{F}_j$ *является* Σ_t^σ*-замкнутым для всех* $j \in J$, *то класс* $\bigcap_{j\in J}\mathfrak{F}_j$ *также является* Σ_t^σ*-замкнутым.*

Формационная σ-функция f называется *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ для всех i, и *полной*, если $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ для всех i.

В силу следствия 2.1 каждая σ-локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственное внутреннее и полное σ-локальное определение F. Мы называем такую функцию F *каноническим σ-локальным определением* формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$ *—* σ*-локальная формация* σ*-разрешимых групп, где* F *— каноническое* σ*-локальное определение формации* $\mathfrak{F}$. *Если формация* $F(\sigma_i)$ *является* Σ_t^σ*-замкнутой для всех* i, *то формация* $\mathfrak{F}$ *также* Σ_{t+1}^σ*-замкнута.*

Доказательство. Пусть $\Pi = \mathrm{Supp}\,(\mathfrak{F})$. Тогда, согласно лемме 2.3(4) и следствию 2.1,

$$\mathfrak{F} = \left(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{S}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)\right) \cap \mathfrak{S}_\Pi = \left(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{S}_{\sigma_i'} F(\sigma_i)\right) \cap \mathfrak{S}_\Pi.$$

Согласно лемме 3.2, формация $\mathfrak{S}_{\sigma_i'}F(\sigma_i)$ является Σ_{t+1}^σ-замкнутой. С другой стороны, класс $\mathfrak{S}_\Pi$ является Σ_2^σ-замкнутым, и поэтому данный класс Σ_{t+1}^σ-замкнут. Следовательно, формация $\mathfrak{F}$ является Σ_{t+1}^σ-замкнутой по лемме 3.4.

Теорема 3.1 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.1.** Пусть $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ — произвольная σ-локальная формация мета-σ-нильпотентных групп, где f — наименьшее σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Тогда согласно предложению 2.1 формация $f(\sigma_i)$ содержится в $\mathfrak{N}_\sigma$ для всех σ_i. Следовательно, $f(\sigma_i)$ является Σ_3^σ-замкнутой по теореме 1.2.

Пусть F — каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Тогда $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma$ согласно предложениям 2.1 и 2.2. Следовательно, $F(\sigma_i)$ является Σ_3^σ-замкнутой по лемме 3.3, и поэтому $\mathfrak{F}$ является Σ_4^σ-замкнутой по теореме 3.1.

Теорема 1.1 доказана.

Литература

1. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978.
2. *Skiba A. N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. – 2015. – **436**. – P. 1 – 16.
3. *Skiba A. N.* A generalization of a Hall theorem // J. Algebra and Appl. – 2015. – **15**, № 4. – P. 21 – 36.
4. *Skiba A. N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups // Communs Math. Statist. – 2016. – **4**, № 3. – P. 281 – 309.

5. *Guo W., Skiba A. N.* Finite groups with permutable complete Wielandt sets of subgroups // J. Group Theory. – 2018. – **18**. – P. 191 – 200.
6. *Ballester-Bolinches A., Doerk K., Pèrez-Ramos M. D.* On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups // J. Algebra. – 1992. – **148**. – P. 42 – 52.
7. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н.* О решетке подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и их примыкающие алгебраические структуры / Под ред. Н. С. Черникова. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – С. 27 – 54.
8. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. – Dordrecht: Springer, 2006.
9. *Skiba A. N.* Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups // J. Algebra. – 2018. – **495**. – P. 114 – 129.
10. *Beidleman J. C., Skiba A. N.* On τ_σ-quasinormal subgroups of finite groups // J. Group Theory. – 2017. – **20**, № 5. – P. 955 – 964.
11. *Guo W., Skiba A. N.* Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups σ-permutable embedded // J. Group Theory. – 2017. – **20**, № 1. – P. 169 – 183.
12. *Guo W., Skiba A. N.* On Π-quasinormal subgroups of finite groups // Monatsh. Math. – 2018. – **185**, № 3. – P. 443 – 453.
13. *Guo W., Skiba A. N.* Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups σ-permutable embedded // J. Group Theory. – 2017. – **20**, № 1. – P. 169 – 183.
14. *Huang J., Hu B., Wu X.* Finite groups all of whose subgroups are σ-subnormal or σ-abnormal // Communs Algebra. – 2017. – **45**, № 1. – P. 4542 – 4549.
15. *Hu B., Huang J., Skiba A. N.* On weakly σ-quasinormal subgroups of finite groups // Publ. Math. Debrecen. – 2018. – **92**, № 1 – 2. – P. 201 – 216.
16. *Hu B., Huang J., Skiba A. N.* Groups with only σ-semipermutable and σ-abnormal subgroups // Acta Math. Hung. – 2017. – **153**, № 1. – P. 236 – 248.
17. *Guo W., Skiba A. N.* On the lattice of $\Pi_{\mathfrak{J}}$-subnormal subgroups of a finite group // Bull. Austral. Math. Soc. – 2017. – **96**, № 2. – P. 233 – 244.
18. *Guo W., Skiba A. N.* Finite groups whose n-maximal subgroups are σ-subnormal // Sci. China Math. – 2018. – **61**.
19. *Skiba A. N.* On one generalization of local formations // Probl. Phys., Math. and Techn. – 2018. – **1**, № 34. – P. 76 – 81.
20. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. – Berlin etc.: Walter de Gruyter, 1992.
21. *Kramer O.-U.* Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilerfremden Indizes // Math. Z. – 1974. – **139**, № 1. – S. 63 – 68.
22. *Guo W.* The theory of classes of groups. – Berlin etc.: Sci. Press-Kluwer Acad. Publ., 2000.
23. *Doerk K.* Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen // Math. Z. – 1966. – **91**. – S. 198 – 205.
24. *Чунихин С. А.* Подгруппы конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1964.
25. *Kegel O. H.* Zur Struktur mehrafach faktorisierbarer endlicher Gruppen // Math. Z. – 1965. – **87**. – S. 42 – 48.
26. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970.
27. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989.

Получено 12.03.18