УДК 517.983+517.955

В. Г. Бондаренко (Ин-т прикл. систем. анализа Нац. техн. ун-та Украины „КПИ им. И. Сикорского”, Киев)

ФОРМУЛА ТРОТТЕРА – ДАЛЕЦКОГО ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

For a semilinear parabolic equation, we prove a relation generalizing the Trotter – Daletskii formula.

Для напівлінійного параболічного рівняння доведено співвідношення, що узагальнює формулу Троттера – Далецького.

1. Предварительные сведения и постановка задачи. Одним из методов построения решений возмущенных эволюционных уравнений является сведение их к интегральному уравнению [1, 2]. Так, решение $u(t,\mathbf{x})$ задачи Коши для полулинейного параболического уравнения

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(u), \quad u(0,\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \\ Lu = \operatorname{tr} A(\mathbf{x})\nabla^2 u + (b(\mathbf{x}), \nabla u), \quad A(\mathbf{x}) \geq \lambda I, \quad \lambda > 0,\end{gathered} \tag{1}$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(t,\mathbf{x}) = \int \varphi(\mathbf{y}) p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} + \int\limits_0^t d\tau \int f(u(\tau,\mathbf{y})) p(t-\tau,\mathbf{x},\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

где $p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})$ — фундаментальное решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} = Lu$, коэффициенты $A(\mathbf{x}),\ b(\mathbf{x})$ — ограниченные гельдеровы функции. Слагаемое $f(u)$ назовем возмущением линейного уравнения.

В настоящей работе объектом изучения являются некоторые свойства решения задачи Коши (1), когда функция f сохраняет постоянный знак в области значений $u(t,\mathbf{x})$, ограничена в этой области и удовлетворяет некоторым условиям гладкости. Тогда $u(t,\mathbf{x})$ — классическое решение, имеющее непрерывные производные $\dfrac{\partial u}{\partial t},\ \dfrac{\partial u}{\partial x_k},\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$.

Введем обозначения:

1) $r(t,a)$ — решение задачи Коши

$$\frac{dr}{dt} = f(r), \quad r(0,a) = a, \quad r(t,a) = G_t a, \quad G_t \text{ — фазовый поток;}$$

полагая $\Phi(z) = \displaystyle\int_\delta^z f(s)\, ds$, где выбор числа δ гарантирует сходимость интеграла, получаем явное представление

$$r(t,a) = \Phi^{-1}(t + \Phi(a)); \tag{2}$$

2) $q(t,\mathbf{x})$ — решение задачи Коши невозмущенного линейного параболического уравнения

$$\frac{\partial q}{\partial t} = Lq, \quad q(0,\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \tag{3}$$

т. е. $q(t,\mathbf{x}) = (e^{tL}\varphi)(\mathbf{x}) \equiv \int \varphi(\mathbf{y})p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}$;

3) $v(t,\mathbf{x}) = r(t,q(t,\mathbf{x})) = G_t q(t,\mathbf{x})$, $\quad w(t,\mathbf{x}) = \int r(t,\varphi(\mathbf{y}))p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}$ — композиции решений; $v(0,\mathbf{x}) = w(0,\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$.

Цель работы — установить зависимость между $u(t,x)$, $v(t,x)$ и $w(t,x)$. В частности, рассмотрена следующая задача теории возмущений.

Пусть A, B, $\overline{A+B}$ — генераторы сжимающих C_0-полугрупп e^{tA}, e^{tB}, $e^{t(A+B)}$ в некотором банаховом пространстве. В работах [3, 4] (при различных условиях и разными методами) доказана формула, устанавливающая связь между введенными полугруппами. В [5] эта формула имеет вид

$$e^{T(A+B)} = s - \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{T}{n}A}e^{\frac{T}{n}B}\right)^n, \tag{4}$$

где $\left(\frac{T}{n},\ldots,\frac{kT}{n},\ldots,T\right)$ — разбиение отрезка $[0;T]$, $T>0$. В дальнейшем (4) будем называть формулой Троттера – Далецкого.

Задача — обобщить этот результат для нелинейного возмущения f оператора L, т. е. для полулинейного уравнения (1).

Обозначим через $H(t)$ нелинейную полугруппу, порожденную генератором $L+f$:

$$(H(t)\varphi)(\mathbf{x}) = u(t,\mathbf{x}).$$

При некоторых условиях на функцию f доказывается аналог формулы Троттера – Далецкого

$$H(T) = s - \lim_{n}\left(G_{\frac{T}{n}}e^{\frac{T}{n}L}\right)^n,$$

где сходимость имеет место в норме пространства $C(\mathbb{R}^d)$.

***Замечание* 1.** В монографии [6, с. 307 – 315] нелинейная формула Троттера – Далецкого для $A(\mathbf{x}) = A = \mathrm{const}$ доказана в следующей версии. Для последовательности

$$\psi_n(T,\cdot) = \left(e^{\frac{T}{n}L}G_{\frac{T}{n}}\right)^n\varphi$$

получена оценка $\|\psi_n(T,\cdot) - u(T,\cdot)\|_V \le C\|\varphi\|_V n^{-\delta}$, где V — некоторое банахово пространство; приведен ряд примеров, $V \ne C(\mathbb{R}^d)$, и сходимость $\psi_n(T,\cdot)$ требует дополнительных условий на начальную функцию.

***Замечание* 2.** Отметим частный случай *линейного* параболического уравнения $\frac{du}{dt} = Lu + L_1u$, в котором оператор L_1 рассматривается как возмущение. Сведение к «традиционному» интегральному уравнению

$$u(t) = e^{tL}u(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)L}L_1u(\tau)d\tau, \qquad e^{tL}u(0) = q(t,\cdot),$$

возможно, если ядро полученного уравнения Вольтерра имеет интегрируемую особенность. Достаточным условием этого является подчиненность оператора L_1 оператору L. Приведем контрпример:

$$L = \operatorname{tr} A(\mathbf{x})\nabla^2 u, \quad L_1 = \operatorname{tr} B(\mathbf{x})\nabla^2 u, \quad A^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x})B(\mathbf{x})A^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}) \le \delta I, \quad \delta < 1.$$

В этом случае в [7] предложен модифицированный метод параметрикса: в качестве «нулевого» приближения вместо $q(t,\mathbf{x})$ выбрана композиция

$$v(t,\mathbf{x}) = \int (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} (\det B(\mathbf{z}))^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}(B^{-1}(\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mathbf{z}), \mathbf{x}-\mathbf{z})\right\} q(t,\mathbf{z})\, d\mathbf{z},$$

что приводит к наличию интегрируемой особенности и сходимости итерационного метода.

2. Полученные результаты. Для введенных выше функций $v(t,\mathbf{x})$, $w(t,\mathbf{x})$ положим

$$m = \frac{\partial v}{\partial t} - Lv - f(v), \quad \mu = \frac{\partial w}{\partial t} - Lw - f(w).$$

Лемма 1. *Невязки $m(t,\mathbf{x})$, $\mu(t,\mathbf{x})$ задаются равенствами*

$$m = \frac{f(v)}{f^2(q)}(A(x)\nabla q, \nabla q)(f'(q) - f'(v)),$$

$$\mu = \int f(r(t,\varphi(\mathbf{y})))p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} - f(w(t,\mathbf{x})).$$

Доказательство. При вычислении m используем представление (2), из которого следуют выражения для производных:

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{f(r)}{f(a)}, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial a^2} = \frac{f(r)}{f^2(a)}(f'(r) - f'(a)),$$

следствием которых являются равенства ($\mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f(v) + \frac{f(v)}{f(q)}\frac{\partial q}{\partial t}, \qquad (\nabla v, \mathbf{h}) = \frac{f(v)}{f(q)}(\nabla q, \mathbf{h}),$$

$$(\nabla^2 v\, \mathbf{k}, \mathbf{h}) = \frac{f(v)}{f^2(q)}(f'(v) - f'(q))(\nabla q, \mathbf{k})(\nabla q, \mathbf{h}) + \frac{f(v)}{f(q)}(\nabla^2 q\, \mathbf{k}, \mathbf{h}).$$

Формула для μ получается дифференцированием выражения для $w(t,\mathbf{x})$.

Обозначим через D область значений функций

$$q(t,\mathbf{x}), \quad v(t,\mathbf{x}), \quad t \in [0;T].$$

Лемма 2. *Пусть $|f'(z)| \le M$, $|f''(z)| \le M_1$, $z \in D$. Тогда невязка m удовлетворяет оценке*

$$|m(t,\mathbf{x})| \le cM_1 t e^{2Mt} \|\nabla q(t,\mathbf{x})\|^2, \quad c = \sup\|A(\mathbf{x})\|.$$

Доказательство. Функции $g_1(t) = f(r(t,a))$, $g_2(t) = f'(r(t,a)) - f'(a)$ удовлетворяют уравнениям

$$g_1'(t) = f'(r)g_1(t), \quad g_1(0) = f(a); \qquad g_2'(t) = f''(r)g_1(t), \quad g_2(0) = 0.$$

Отсюда

$$g_1(t) = f(a)\exp\left\{\int_0^t f'(r(\tau,a))d\tau\right\}, \quad g_2(t) = f(a)\int_0^t f''(r(\tau,a))\exp\left\{\int_0^\tau f'(r(s,a))ds\right\}d\tau.$$

Из условий леммы следуют оценки

$$|g_1(t)| \leq |f(a)|e^{Mt}, \quad |g_2(t)| \leq |f(a)|\; M_1\int_0^t e^{M\tau}\,d\tau \leq |f(a)|\; M_1 te^{Mt},$$

что приводит к неравенству

$$\left|\frac{f(r)}{f^2(a)}(f'(r) - f'(a))\right| \leq M_1 te^{2Mt}.$$

Подставляя в это неравенство v, q вместо r, a, приходим к утверждению леммы.

Следствие. *Если производная $\nabla q(t,\mathbf{x})$ ограничена, то*

$$|m(t,\mathbf{x})| \leq Cte^{2Mt}. \tag{5}$$

При обобщении формулы Троттера – Далецкого для нелинейного скалярного возмущения f оператора L, т. е. для полулинейного уравнения (1), преобразуем выражение $\left(G_{\frac{T}{n}}\, e^{\frac{T}{n}L}\right)^n$. Построим последовательности функций $\left(0 \leq t \leq \dfrac{T}{n}\right)$:

$$q_0(t,\mathbf{x}) = \int \varphi(\mathbf{y})p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \qquad v_1(t,\mathbf{x}) = r(t, q_0(t,\mathbf{x})),$$

$$q_1(t,\mathbf{x}) = \int v_1\left(\frac{T}{n},\mathbf{y}\right)p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \qquad v_2\left(t + \frac{T}{n},\mathbf{x}\right) = r(t, q_1(t,\mathbf{x})),$$

$$q_k(t,\mathbf{x}) = \int v_k\left(k\frac{T}{n},\mathbf{y}\right)p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \qquad v_{k+1}\left(t + k\frac{T}{n},\mathbf{x}\right) = r(t, q_k(t,\mathbf{x})),$$

$$0 \leq k \leq n-1, \qquad q_k(0,\mathbf{x}) = v_k\left(\frac{kT}{n},\mathbf{x}\right) = v_{k+1}\left(\frac{kT}{n},\mathbf{x}\right).$$

В терминах эволюционных операторов

$$v_{k+1}\left(t + \frac{kT}{n}\right) = G_t e^{tL} v_k\left(\frac{kT}{n}\right).$$

Теорема. *Пусть выполнены условия леммы 2. Если производные $|\nabla q_k(t,\mathbf{x})| < c_1$, то последовательность $v_n(T,\mathbf{x}) \to u(T,\mathbf{x}), n \to \infty$, равномерно по $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.*

Доказательство. Обозначим

$$s = t + k\frac{T}{n}, \quad \Delta_k = \left[k\frac{T}{n}; (k+1)\frac{T}{n}\right].$$

Разность

$$h_{k+1}(t, \mathbf{x}) = v_{k+1}(s, \mathbf{x}) - u(s, \mathbf{x}), \quad s \in \Delta_k,$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial h_{k+1}}{\partial t} = Lh_{k+1} + f(v_{k+1}) - f(u) + m_k(t, \mathbf{x}),$$

где

$$m_k(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial v_{k+1}}{\partial t} - Lv_{k+1} - f(v_{k+1}),$$

и после умножения на $2h_{k+1}$ приходим к неравенству

$$\frac{\partial h_{k+1}^2}{\partial t} < Lh_{k+1}^2 + (2M+1)h_{k+1}^2 + m_k^2(t, \mathbf{x}),$$

из которого следует оценка

$$h_{k+1}^2(t, \mathbf{x}) < e^{(2M+1)t} \int h_{k+1}^2(0, \mathbf{y}) p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} + \int\limits_0^t d\tau \int e^{(2M+1)(t-\tau)}\, m_k^2(t, \mathbf{y}) p(t-\tau, \mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}.$$

По лемме 2 и условию теоремы

$$m_k^2(t, \mathbf{x}) \leq cM_1^2 t^2 e^{4Mt} |\nabla q_k(t, \mathbf{x})|^4 \leq \; Ct^2 e^{4Mt},$$

откуда

$$h_{k+1}^2(t, \mathbf{x}) \leq e^{(2M+1)t} \int h_{k+1}^2(0, \mathbf{y}) p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} + C_1 t^3 e^{4Mt} \tag{6}$$

для $s = t \in \Delta_0,\ h_1(0, \mathbf{x}) = 0,\ h_1^2(t, \mathbf{x}) \leq C_1 t^3 e^{4Mt},$ т. е. начальное условие для интервала Δ_1 удовлетворяет неравенству

$$h_2^2(0, \mathbf{x}) \leq C_1 \left(\frac{T}{n}\right)^3 e^{4M\frac{T}{n}}.$$

Если $s = t + \dfrac{T}{n} \in \Delta_1$, то оценка (6) принимает вид

$$h_2^2\left(\frac{T}{n}, \mathbf{x}\right) \leq \; C_1 \left(\frac{T}{n}\right)^3 \left(e^{(6M+1)\frac{T}{n}} + e^{4M\frac{T}{n}}\right) < 2C_1 \left(\frac{T}{n}\right)^3 e^{(6M+1)\frac{T}{n}},$$

и для $s = t + k\dfrac{T}{n} \in \Delta_k$

$$h_{k+1}^2\left(\frac{T}{n}, \mathbf{x}\right) < (k+1)C_1 \left(\frac{T}{n}\right)^3 e^{(2kM+4M+k)\frac{T}{n}},$$

т. е.

$$h_n^2\left(\frac{T}{n},\mathbf{x}\right)=(v_n(T,\mathbf{x})-u(T,\mathbf{x}))^2<\frac{n+1}{n^3}C_2T^3\to 0,\quad n\to\infty.$$

Теорема доказана.

Если в операторе $L=\mathrm{tr}(A\nabla^2)$ матрица A не зависит от $\mathbf{x}$, то достаточное условие неравенства $|\nabla q_k(t,\mathbf{x})|<c_1$ можно сформулировать в терминах начальной функции $\varphi(\mathbf{x})$.

Утверждение. *Если $A(\mathbf{x})\equiv A$, то выполняется неравенство*

$$\|\nabla q(t,\mathbf{x})\|^2<\int\|\nabla\varphi(\mathbf{y})\|^2p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}.$$

Доказательство. Заметим, что функция $z(t,\mathbf{x})=(\nabla q(t,\mathbf{x}),\mathbf{h})$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(z^2)=\mathrm{tr}(A\nabla^2z^2)-2(A\nabla z,\nabla z).$$

Полагая $\mathbf{h}$ базисными элементами в $\mathbb{R}^d$ и суммируя по ним, приходим к неравенству

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla q(t,\mathbf{x})\|^2<\mathrm{tr}(A\nabla^2\|\nabla q(t,\mathbf{x})\|^2),\quad \|\nabla q(0,\mathbf{x})\}^2=\|\nabla\varphi(\mathbf{x})\|^2,$$

из которого следует утверждение.

Литература

1. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
2. *Yagi A.* Abstract parabolic evolution equations and their applications. – Berlin: Springer, 2010.
3. *Trotter T. F.* Of the product of semigroups of operators // Proc. Amer. Math. Soc. – 1959. – **10**. – P. 545 – 551.
4. *Далецкий Ю. Л.* Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями // Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, № 5. – С. 3 – 115.
5. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. – Киев: Вища шк., 1989. – 347 с.
6. *Taylor M. E.* Partial differential equations. III. — New York: Springer-Verlag, 1997. – 610 p.
7. *Bondarenko V.* Construction of the fundamental solution of disturbed parabolic equation // Bull. Sci. Math. – 2003. – **127**, № 3. – P. 191 – 206.

Получено 18.06.17