УДК 519.21

І. М. Боднарчук (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

РЕГУЛЯРНІСТЬ М'ЯКОГО РОЗВ'ЯЗКУ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ

We study a stochastic parabolic differential equation driven by a general stochastic measure. The existence, uniqueness, and Hölder regularity of the mild solution are established.

Исследовано стохастическое дифференциальное уравнение параболического типа, порожденное общей стохастической мерой. Доказаны существование, единственность и непрерывность по Гельдеру мягкого решения.

1. Вступ. У даній роботі ми розглядаємо рівняння

$$\begin{aligned} Lu(t,x)dt + f(t,x,u(t,x))\,dt + \sigma(t,x)\,d\mu(x) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{aligned} \tag{1}$$

де $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, μ — загальна стохастична міра, визначена на σ-алгебрі борелевих множин з $\mathbb{R}$, а оператор L має вигляд

$$Lu(t,x) = a(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial^2 x} + b(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + c(t,x)u(t,x) - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}, \tag{2}$$

до того ж функції $a,\ b,\ c$ визначено в циліндрі

$$S = [0,T] \times \mathbb{R} = \{(t,x) \colon t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}\}.$$

За певних припущень щодо коефіцієнтів оператора L та функцій $f,\ \sigma,\ u_0$ ми досліджуємо м'який розв'язок рівняння (1), визначений рівністю

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} p(t,x;0,y)u_0(y)\,dy + \int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}} p(t,x;s,y)f(s,y,u(s,y))\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int\limits_0^t p(t,x;s,y)\sigma(s,y)\,ds\,. \tag{3}$$

Тут $p(t,x;s,y)$ — фундаментальний розв'язок оператора L, визначеного рівністю (2). Інтеграли від випадкових функцій по ds та dy беруться для кожного фіксованого ω. Деякі підходи до визначення таких інтегралів та їх властивості досліджено в [12] (див. також [11], глава 3). Докладніше про означення м'якого розв'язку див. [6] (розділ 6).

Частковий випадок задачі (1) (рівняння теплопровідності) при

$$a(t,x) = a^2 \in (0,+\infty), \qquad b(t,x) = c(t,x) = 0$$

досліджено у статті [1]. У цій публікації доведено існування та єдиність м'якого розв'язку і встановлено неперервність за Гельдером його траєкторій за часовою та просторовою змінними.

Наша мета полягає в поширенні цього результату на випадок загального параболічного рівняння та покращенні показників неперервності за Гельдером.

Уперше стохастичні диференціальні рівняння параболічного типу, породжені гауссівським білим шумом, було введено та обговорено в [2] (розділ V). Регулярність розв'язків стохастичних параболічних рівнянь з крайовими умовами Діріхле або Неймана досліджено в [3, 4]. Різні типи стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними розглянуто в [5 – 7]. У книзі [6] рівняння з частинними похідними досліджено як стохастичні рівняння у функціональних просторах, а у статті [7] для вивчення стохастичних диференціальних рівнянь застосовано теорію інтегральних рівнянь Вольтерра. Статті [8, 9] присвячено дослідженню гельдеровості м'яких розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними, породжених загальними стохастичними мірами.

Опишемо коротко будову статті. Основну теорему сформульовано і доведено в пункті 2. Леми 1 та 2, які використовуються при доведенні теореми, наведено в пунктах 4 і 5 відповідно. Леми містять твердження про те, що інтеграл за стохастичною мірою з рівняння (3) є неперервним за Гельдером окремо за просторовою та часовою змінними. В пункті 3 наведено додаткові відомості, що використовуються при доведенні цих лем. У пункті 6 отримані результати порівняно з результатами статті [1].

2. Постановка проблеми та основний результат. Нехай $\mathsf{L}_0 = \mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — множина всіх дійснозначних випадкових величин, визначених на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Збіжність в L_0 — це збіжність за ймовірністю. Нехай також X — довільна множина, а $\mathcal{B}$ — борелева σ-алгебра підмножин з X.

Означення. *Довільне σ-адитивне відображення $\mu\colon \mathcal{B} \to \mathsf{L}_0$ називається стохастичною мірою.*

У монографії [10] таке μ називається загальною стохастичною мірою. В цій роботі (розділ 7) (а також у [11], глава 1) для дійсної вимірної функції $g\colon \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ визначено та досліджено інтеграл вигляду $\int_{\mathsf{X}} g\, d\mu$. Зокрема, будь-яка вимірна обмежена функція інтегровна по μ. Крім того, для такого інтеграла справедливим є аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність (див. [10], твердження 7.1.1 або [11], пункт 1.1.1, наслідок).

Ми розглядаємо м'який розв'язок рівняння (1), тобто таку вимірну випадкову функцію $u(t,x) = u(t,x,\omega)\colon [0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, що при будь-яких (t,x) задовольняє інтегральне рівняння (3).

Далі будемо розглядати наступні припущення.

A_1. Функція $u_0(y) = u_0(y,\omega)\colon \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|u_0(y,\omega)| \le C_{u_0}(\omega)$.

A_2. Функція $u_0(y)$ неперервна за Гельдером по $y \in \mathbb{R}$, а саме,

$$|u_0(y_1) - u_0(y_2)| \le L_{u_0}(\omega)\, |y_1 - y_2|^{\beta(u_0)}, \quad \beta(u_0) \ge 1/2\,.$$

A_3. Функція $f(s,y,z)\colon [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|f(s,y,z)| \le C_f$.

A_4. Функція $f(s,y,z)$ ліпшицева по $y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}$, тобто

$$|f(s,y_1,z_1) - f(s,y_2,z_2)| \le L_f \left(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\right)\,.$$

A_5. Функція $\sigma(s,y)\colon [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|\sigma(s,y)| \le C_\sigma$.

A_6. Функція $\sigma(s,y)$ неперервна за Гельдером по $y \in \mathbb{R}$, тобто

$$|\sigma(s, y_1) - \sigma(s, y_2)| \le L_\sigma \, |y_1 - y_2|^{\beta(\sigma)}\,, \quad \beta(\sigma) > 1/2.$$

P. Фундаментальний розв'язок оператора L є однорідним за просторовими змінними:

$$p(t, x; s, y) = p(t, x - y; s, 0).$$

L_1. Функції $a(t,x)$, $b(t,x)$, $c(t,x)$ неперервні та обмежені в S за сукупністю змінних t та x і для деяких $\alpha > 0$, $A > 0$ скрізь в S виконуються нерівності

$$|a(t,x) - a(t^0, x^0)| \le A\left(\left|x - x^0\right|^\alpha + \left|t - t^0\right|^\alpha\right),$$
$$|b(t,x) - b(t, x^0)| \le A\left|x - x^0\right|^\alpha,$$
$$|c(t,x) - c(t, x^0)| \le A\left|x - x^0\right|^\alpha.$$

L_2. Оператор L рівномірно параболічний в S, тобто існують такі додатні сталі λ_0, λ_1, що $\lambda_0 \le a(t,x) \le \lambda_1$ для всіх $(t,x) \in S$.

Якщо виконуються припущення L_1 та L_2, то за теоремою 1 з розділу 4 [13] мають місце такі оцінки:

$$|p(t,x;s,y)| \le M(t-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t-s}}, \tag{4}$$

$$\left|\frac{\partial p(t,x;s,y)}{\partial x}\right| \le M(t-s)^{-1} e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t-s}}, \tag{5}$$

$$\left|\frac{\partial p(t,x;s,y)}{\partial t}\right| \le M(t-s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t-s}}, \tag{6}$$

де λ та M — додатні сталі.

Зауваження. Якщо виконується умова P, то коефіцієнти оператора L є незалежними від просторової змінної. У цьому випадку умова L_1 набирає значно простішого вигляду.

Теорема. *Нехай виконуються припущення* L_1, L_2, $\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_6$. *Тоді*:

1. *Рівняння* (3) *має розв'язок* $u(t,x)$. *Якщо* $v(t,x)$ — *інший розв'язок рівняння* (3), *то для всіх* t *та* x $u(t,x) = v(t,x)$ *майже напевно* (*м.н.*).

Якщо додатково виконується припущення P *та функція* $|y|^\tau$ *інтегровна по* μ *на* $\mathbb{R}$ *для деякого* $\tau > 1/2$, *то*:

2. *Для будь-яких фіксованих* $t \in [0,T]$, $K > 0$, $\gamma_1 < 1/2$ *випадковий процес* $u(t,x)$, $x \in \in [-K,K]$, *має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником* γ_1.

3. *Для будь-яких фіксованих* $\delta > 0$, $K > 0$, $\gamma_1 < 1/2$, $\gamma_2 < 1/4$ *випадкова функція* $u(t,x)$ *має таку модифікацію* $\tilde{u}(t,x)$, *що для деякого* $C_{\tilde{u}}(\omega) > 0$ *виконується*

$$|\tilde{u}(t_1,x_1) - \tilde{u}(t_2,x_2)| \le C_{\tilde{u}}(\omega)(|t_1 - t_2|^{\gamma_2} + |x_1 - x_2|^{\gamma_1}), \qquad t \in [\delta, T], \quad x \in [-K,K].$$

Доведення. Доведення тверджень 1 та 2 даної теореми аналогічне доведенню пунктів (i) та (ii) теореми зі статті [1], і ми його пропускаємо. Зауважимо лише, що використовується процес ітерації, де $u^{(0)}(t,x) = 0$ та

$$u^{(n+1)}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} p(t,x;0,y) u_0(y)\, dy +$$

$$+\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}} p(t,x;s,y)f(s,y,u^{(n)}(s,y))\,dy+$$

$$+\int_{\mathbb{R}} d\mu(y)\int_0^t p(t,x;s,y)\sigma(s,y)\,ds,\quad n\ge 0,$$

а розв'язок будується у вигляді

$$u(t,x)=\lim_{n\to\infty}u^{(n)}(t,x)\qquad\forall (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R},$$

де границя є границею збіжності за ймовірністю.

Також зауважимо, що отриманий за допомогою зазначеного вище ітераційного процесу розв'язок має неперервну модифікацію. Ця властивість була обґрунтована при доведенні пункту (i) теореми в [1]. Такі ж міркування справедливі і у розглядуваному випадку.

Крім того, при доведенні застосовується лема 1 даної роботи та використовується оцінка

$$\int_{\mathbb{R}}|p(t,x;s,y)|\,dy\le M\int_{\mathbb{R}}(t-s)^{-\frac12}e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t-s}}\,dy=C,\tag{7}$$

яка випливає з (4) та рівності $\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/b^2}dz=Cb$. Тут і далі через C та $C(\omega)$ позначено додатні сталі, які можуть бути різними у різних формулах.

Доведемо твердження 3 теореми. Нехай спочатку $|x|\le K$ є фіксованим. Доведемо гельдеровість м'якого розв'язку $u(t,x)$ за змінною t на множині $[\delta,T]$.

Зафіксуємо довільні $\delta\le t_1<t_2\le T$. Тоді для відповідної модифікації $u(\cdot,x)$ за лемою 2 маємо

$$|u(t_1,x)-u(t_2,x)|\le\int_{\mathbb{R}}|p(t_1,x;0,y)-p(t_2,x;0,y)|\,|u_0(y)|\,dy+$$

$$+\left|\int_0^{t_1} ds\int_{\mathbb{R}} p(t_1,x;s,y)f(s,y,u(s,y))\,dy-\right.$$

$$\left.-\int_0^{t_2} ds\int_{\mathbb{R}} p(t_2,x;s,y)f(s,y,u(s,y))\,dy\right|+C(\omega)|t_1-t_2|^{\gamma_2}=$$

$$=B_1+B_2+C(\omega)|t_1-t_2|^{\gamma_2}.$$

За припущенням A_1, оцінкою (6) і тим, що $t_1\ge\delta$, одержуємо

$$B_1\le C_{u_0}(\omega)\int_{\mathbb{R}}\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{\partial p(\tau,x;0,y)}{\partial\tau}\right|d\tau\,dy\le C_{u_0}(\omega)M\int_{\mathbb{R}}\int_{t_1}^{t_2}\tau^{-\frac32}e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{\tau}}d\tau\,dy=$$

$$=C(\omega)\int_{t_1}^{t_2}\tau^{-1}d\tau\int_{\mathbb{R}}\tau^{-\frac12}e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{\tau}}\,dy\le C(\omega)\delta^{-1}|t_1-t_2|\le C(\omega)|t_1-t_2|.$$

Для доданка B_2 можемо записати, враховуючи припущення A_3 та (7):

$$B_2 \le \int_0^{t_1} ds \int_{\mathbb{R}} |p(t_1, x; s, y) - p(t_2, x; s, y)|\, |f(s, y, u(s, y))|\, dy +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} ds \int_{\mathbb{R}} |p(t_2, x; s, y)|\, |f(s, y, u(s, y))|\, dy \le$$

$$\le C_f \int_0^{t_1} ds \int_{\mathbb{R}} |p(t_1, x; s, y) - p(t_2, x; s, y)|\, dy + C_f C |t_1 - t_2| =$$

$$= B_{21} + C|t_1 - t_2|.$$

Далі, оскільки $|x| \le K$, то з (6) отримуємо

$$B_{21} \le C_f \int_0^{t_1} ds \int_{\mathbb{R}} \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial p(\tau, x; s, y)}{\partial \tau} \right| d\tau\, dy \le C \int_0^{t_1} ds \int_{\mathbb{R}} \int_{t_1}^{t_2} (\tau - s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\lambda |x-y|^2}{\tau - s}} d\tau\, dy =$$

$$= C \int_0^{t_1} ds \int_{\{|y| \le K+1\}} \int_{t_1}^{t_2} (\tau - s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\lambda |x-y|^2}{\tau - s}} d\tau\, dy +$$

$$+ C \int_0^{t_1} ds \int_{\{|y| \ge K+1\}} \int_{t_1}^{t_2} (\tau - s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\lambda |x-y|^2}{\tau - s}} d\tau\, dy = B_{211} + B_{212}.$$

Тоді

$$B_{211} = C \int_0^{t_1} ds \int_{t_1}^{t_2} (\tau - s)^{-\frac{3}{2}} d\tau \int_{\{|y| \le K+1\}} e^{-\frac{\lambda |x-y|^2}{\tau - s}}\, dy \le C(2K+2) \int_0^{t_1} \int_{t_1}^{t_2} (\tau - s)^{-\frac{3}{2}} d\tau\, ds =$$

$$= C \int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{-\frac{1}{2}} - (t_2 - s)^{-\frac{1}{2}})\, ds = C(t_1^{1/2} - t_2^{1/2} + |t_1 - t_2|^{1/2}) \le C|t_1 - t_2|^{1/2}.$$

Використовуючи оцінки $ze^{-z^2} \le Ce^{-z^2/2}$ та $|x - y| \ge 1$ при $|x| \le K$, $|y| \ge K + 1$, маємо

$$B_{212} \le C \int_0^{t_1} ds \int_{t_1}^{t_2} \int_{\{|y| \ge K+1\}} (\tau - s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\lambda |x-y|^2}{\tau - s}}\, dy\, d\tau \le$$

$$\le C \int_0^{t_1} ds \int_{t_1}^{t_2} (\tau - s)^{-\frac{1}{2}} \int_{\{|y| \ge K+1\}} (\tau - s)^{-1} \lambda^{1/2} |x - y| e^{-\frac{\lambda |x-y|^2}{\tau - s}}\, dy\, d\tau \le$$

$$\leq C\int\limits_0^{t_1} ds \int\limits_{t_1}^{t_2} (\tau - s)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\{|y|\geq K+1\}} (\tau - s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{2(\tau-s)}}\, dy\, d\tau \leq C\int\limits_0^{t_1} ds \int\limits_{t_1}^{t_2} (\tau - s)^{-\frac{1}{2}} d\tau \leq$$

$$\leq C|t_1 - t_2| \int\limits_0^{t_1} (t_1 - s)^{-\frac{1}{2}}\, ds \leq C|t_1 - t_2|.$$

Таким чином, одержуємо

$$|u(t_1, x) - u(t_2, x)| \leq C(\omega)|t_1 - t_2|^{\gamma_2}.$$

Отже, за припущень пункту 3 ми отримали модифікацію $\tilde{u}^{(x)}$, неперервну за Гельдером за змінною x при фіксованому t, та модифікацію $\tilde{u}^{(t)}$, що задовольняє умову Гельдера по t при кожному фіксованому x. Вилучимо всі $\omega \in \Omega$, для яких $\tilde{u}^{(x)}(t, x) \neq \tilde{u}^{(t)}(t, x)$ хоча б для однієї пари раціональних $(t, x) \in [\delta, T] \times \mathbb{R}$. Для всіх інших ω покладемо $\tilde{u} = \tilde{u}^{(x)} = \tilde{u}^{(t)}$ для раціональних (t, x) та довизначимо $\tilde{u}$ на всю множину $[\delta, T] \times \mathbb{R}$ за неперервністю. Тобто ми одержали модифікацію $\tilde{u}(t, x)$, яка є неперервною за Гельдером за змінними t та x.

Теорему доведено.

3. Допоміжні відомості. Розглядаємо простір Бєсова $B^{\alpha}_{22}([c, d])$, $0 < \alpha < 1$. Функція g належить $B^{\alpha}_{22}([c, d])$, якщо скінченною є її норма у просторі Бєсова:

$$\|g\|_{B^{\alpha}_{22}([c,d])} = \|g\|_{L_2([c,d])} + \left(\int\limits_0^{d-c} (w_2(g, r))^2 r^{-2\alpha-1}\, dr \right)^{1/2}, \tag{8}$$

де

$$w_2(g, r) = \sup_{0\leq h\leq r} \left(\int\limits_c^{d-h} |g(v + h) - g(v)|^2\, dv \right)^{1/2}.$$

Покладемо для довільного $j \in \mathbb{Z}$

$$\Delta^{(j)}_{kn} = (j + (k - 1)2^{-n}, j + k2^{-n}], \qquad n \geq 0, \quad 1 \leq k \leq 2^n.$$

Нехай функція $g(z, v)\colon Z \times [j, j + 1] \to \mathbb{R}$ така, що для будь-якого $z \in Z$ функція $g(z, \cdot)$ неперервна на $[j, j + 1]$. Тут Z — довільна множина. Позначимо

$$g_n(z, v) = g(z, j)\mathbf{1}_{\{j\}}(v) + \sum_{1\leq k\leq 2^n} g(z, j + (k - 1)2^{-n})\mathbf{1}_{\Delta^{(j)}_{kn}}(v).$$

Тоді за лемою 3 [14] випадкова функція

$$\eta(z) = \int\limits_{[j,j+1]} g(z, v)d\mu(v), \quad z \in Z,$$

має модифікацію

$$\widetilde{\eta}(z) = \int\limits_{[j,j+1]} g_0(z,v)d\mu(v) + \sum_{n\geq 1}\left(\int\limits_{[j,j+1]} g_n(z,v)d\mu(v) - \int\limits_{[j,j+1]} g_{n-1}(z,v)d\mu(v)\right) \tag{9}$$

таку, що для всіх $\varepsilon > 0,\ \omega \in \Omega,\ z \in Z$ виконується

$$|\widetilde{\eta}(z)| \leq |g(z,j)\mu([j,j+1])| + \left\{\sum_{n\geq 1} 2^{n\varepsilon} \sum_{1\leq k\leq 2^n} |g(z,j+k2^{-n}) - g(z,j+(k-1)2^{-n})|^2\right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{\sum_{n\geq 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\leq k\leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(j)})|^2\right\}^{1/2}.$$

Для цієї модифікації за теоремою 1.2 [15] справджується оцінка

$$|\widetilde{\eta}(z)| \leq |g(z,j)\mu([j,j+1])| + C\|g(z,\cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([j,j+1])} \left\{\sum_{n\geq 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\leq k\leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(j)})|^2\right\}^{1/2}, \tag{10}$$

де $\alpha = \varepsilon/2 + 1/2$, а сума зі стохастичною мірою є скінченною за лемою 3.1 [1].

4. Регулярність стохастичного інтеграла по x. У даному пункті будемо досліджувати неперервність за Гельдером стохастичного інтеграла з рівності (3) за просторовою змінною при фіксованій часовій змінній.

Лема 1. *Нехай $|y|^{\tau}$ інтегровна по μ на $\mathbb{R}$ для деякого $\tau > 1/2$ та виконуються припущення* L_1, L_2, A_5, A_6, P. *Тоді для будь-яких фіксованих $t \in [0,T]$, $K > 0$ та $\gamma_1 < 1/2$ випадковий процес*

$$\vartheta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int\limits_0^t p(t,x;s,y)\sigma(s,y)\,ds, \quad |x| \leq K,$$

має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником γ_1.

Доведення. Для довільних фіксованих $t,\ x_1 \leq\ x_2$ покладемо

$$q(z,y) = \int\limits_0^t p(t,x_1;s,y)\sigma(s,y)\,ds - \int\limits_0^t p(t,x_2;s,y)\sigma(s,y)\,ds, \qquad z=(t,x_1,x_2), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Тоді для модифікації (9) стохастичного інтеграла

$$\eta(z) = \int\limits_{[j,j+1]} q(z,y)d\mu(y)$$

справджується оцінка (10).

Оцінимо норму функції $q(z,\cdot)$ у просторі Бєсова на $[j,j+1]$. Для цього розглянемо величину

$$q(z,y+h) - q(z,y) = \int\limits_0^t \left(p(t,x_1;s,y) - p(t,x_2;s,y)\right)\left(\sigma(s,y+h) - \sigma(s,y)\right)ds +$$

$$+\int\limits_0^t \left(p(t,x_1;s,y+h)-p(t,x_1;s,y)-p(t,x_2;s,y+h)+p(t,x_2;s,y)\right)\sigma(s,y+h)ds = I_1+I_2.$$

Нам будуть потрібні наступні оцінки. Для довільного $b>0$

$$\int\limits_0^t \frac{1}{r}e^{-\frac{b}{r}}dr = \left|\frac{b}{r}=z\right| = \int\limits_{b/t}^{\infty}\frac{1}{z}e^{-z}dz \le \mathbf{1}_{\{t>b\}}\int\limits_{b/t}^{1}\frac{1}{z}dz + \int\limits_1^{\infty}e^{-z}dz =$$

$$= \mathbf{1}_{\{t>b\}}\ln\frac{t}{b}+e^{-1} \le \mathbf{1}_{\{t>b\}}\ln\frac{T}{b}+1 \le \left|\ln\frac{T}{b}\right|+1.$$

Також за (5)

$$|p(t,x_1;s,y)-p(t,x_2;s,y)| = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{\partial p(t,x;s,y)}{\partial x}dx\right| \le \frac{C}{t-s}\int\limits_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t-s}}dx.$$

Використовуючи дані оцінки та припущення A_6, для доданка I_1 маємо

$$|I_1| \le Ch^{\beta(\sigma)}\int\limits_0^t |p(t,x_1;s,y)-p(t,x_2;s,y)|\,ds \le$$

$$\le Ch^{\beta(\sigma)}\int\limits_0^t\left(\frac{C}{t-s}\int\limits_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t-s}}dx\right)ds =$$

$$= |t-s=r| = Ch^{\beta(\sigma)}\int\limits_{x_1}^{x_2}dx\int\limits_0^t\frac{1}{r}e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{r}}dr \le$$

$$\le Ch^{\beta(\sigma)}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\left|\ln\frac{T}{\lambda|x-y|^2}\right|+1\right)dx \le$$

$$\le Ch^{\beta(\sigma)}\left(C_1|x_1-x_2|+C_2\int\limits_{x_1}^{x_2}|\ln|x-y||\,dx\right) \le$$

$$\le Ch^{\beta(\sigma)}\left(C_1|x_1-x_2|+2C_2\int\limits_0^{|x_1-x_2|/2}|\ln z|dz\right) =$$

$$= Ch^{\beta(\sigma)}\left(C_1|x_1-x_2|+2C_2(z-z\ln z)\Big|_0^{|x_1-x_2|/2}\right) =$$

$$= Ch^{\beta(\sigma)}\left((C_1+C_2)|x_1-x_2|-C_2|x_1-x_2|\ln|x_1-x_2|\right) \le Ch^{\beta(\sigma)}|x_1-x_2|^{\gamma}, \qquad (11)$$

де $0<\gamma<1$ довільне, стала C залежить від γ, λ, K, T, і ми використали той факт, що $|x_1-x_2|^{1-\gamma}\ln|x_1-x_2| \le C$ для $x_1,x_2\in\{x\in\mathbb{R}\colon |x|\le K\}$ та будь-якого $\gamma<1$, оскільки $|x_1-x_2|^{1-\gamma}\ln|x_1-x_2|\to 0$, $\quad |x_1-x_2|\to 0$.

Аналогічну оцінку отримуємо і для доданка I_2, записавши його у вигляді суми двох доданків і використавши припущення A_5:

$$|I_2| \leq \left| \int\limits_0^t \left(p(t, x_1; s, y+h) - p(t, x_2; s, y+h)\right) \sigma(s, y+h) ds \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_0^t \left(p(t, x_1; s, y) - p(t, x_2; s, y)\right) \sigma(s, y+h) ds \right| \leq C|x_1 - x_2|^\gamma. \tag{12}$$

Дослідимо тепер модуль неперервності

$$(w_2(q, r))^2 \leq 2 \sup_{0 \leq h \leq r} \int\limits_j^{j+1-h} I_1^2 dy + 2 \sup_{0 \leq h \leq r} \int\limits_j^{j+1-h} I_2^2 dy.$$

За співвідношенням (11) маємо

$$\sup_{0 \leq h \leq r} \int\limits_j^{j+1-h} I_1^2 dy \leq C|x_1 - x_2|^{2\gamma} \sup_{0 \leq h \leq r} h^{2\beta(\sigma)}(1-h) \leq C r^{2\beta(\sigma)} |x_1 - x_2|^{2\gamma}.$$

Враховуючи (12), одержуємо

$$\sup_{0 \leq h \leq r} \int\limits_j^{j+1-h} I_2^2 dy \leq C|x_1 - x_2|^{2\gamma}. \tag{13}$$

Потрібно ще отримати оцінку I_2 за допомогою степеня r. Використовуючи припущення A_5, P та метод доведення (11), приходимо до співвідношення

$$\left| \int\limits_0^t \left(p(t, x_1; s, y+h) - p(t, x_1; s, y)\right) \sigma(s, y+h) ds \right| \leq$$

$$\leq C \int\limits_0^t \left|\left(p(t, x_1 - h; s, y) - p(t, x_1; s, y)\right)\right| ds \leq C \int\limits_0^t \frac{1}{t-s} \int\limits_{x_1-h}^{x_1} e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t-s}} dx\, ds \leq C h^\gamma.$$

Аналогічно міркуємо і у випадку з другим доданком. Отже,

$$\sup_{0 \leq h \leq r} \int\limits_j^{j+1-h} I_2^2 dy \leq C r^{2\gamma}. \tag{14}$$

Перемножимо нерівність (13), піднесену до степеня θ, та (14), взяту в степені $1-\theta$, для деякого $0 < \theta < 1$. В результаті одержимо

$$\sup_{0\le h\le r}\int\limits_j^{j+1-h} I_2^2 dy \le Cr^{2\gamma(1-\theta)}|x_1-x_2|^{2\gamma\theta}.$$

Таким чином,

$$(w_2(q,r))^2 \le Cr^{2\beta(\sigma)}|x_1-x_2|^{2\gamma} + Cr^{2\gamma(1-\theta)}|x_1-x_2|^{2\gamma\theta} \le C|x_1-x_2|^{2\gamma\theta}(r^{2\beta(\sigma)}+r^{2\gamma(1-\theta)}).$$

Щоб інтеграл із (8) був скінченним, необхідно, щоб

$$2\gamma(1-\theta) > 2\alpha \Leftrightarrow \gamma\theta < \gamma - \alpha.$$

Якщо вибрати $\gamma \to 1-$ та $\alpha \to 1/2+$, то отримаємо показник гельдеровості $\gamma\theta \to 1/2-$.

Отже, для довільного $0 < \gamma_1 < 1/2$ існує таке $\alpha > 1/2$, що

$$\|q(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([j,j+1])} \le C|x_1-x_2|^{\gamma_1}.$$

Крім того, аналогічні міркування, як і при оцінюванні (11), приводять до нерівностей

$$|q(z,j)| \le C|x_1-x_2|^{\gamma}, \qquad \|q(z,\cdot)\|_{L_2([j,j+1])} \le C|x_1-x_2|^{\gamma}.$$

Тепер дослідимо стохастичний інтеграл на множині $y \in \mathbb{R}$. Використовуючи попередні оцінки, співвідношення (10) та нерівність Коші, для відповідної модифікації маємо

$$|\vartheta(x_1)-\vartheta(x_2)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} q(z,y)d\mu(y)\right| \le \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\int\limits_j^{j+1} q(z,y)\,d\mu(y)\right| \le$$

$$\le \sum_{j\in\mathbb{Z}}|q(z,j)\mu([j,\ j+1])| + C\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|q(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([j,\ j+1])}\left\{\sum_{n\ge1}2^{n(1-2\alpha)}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta^{(j)}_{kn}\right)\right|^2\right\}^{1/2} \le$$

$$\le C|x_2-x_1|^{\gamma_1}\left[\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mu([j,\ j+1])| + \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\{\sum_{n\ge1}2^{n(1-2\alpha)}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta^{(j)}_{kn}\right)\right|^2\right\}^{1/2}\right] \le$$

$$\le C|x_2-x_1|^{\gamma_1}\left[\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(|j|+1)^{\rho}\left(\mu([j,\ j+1])\right)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(|j|+1)^{-\rho}\right)^{1/2} +\right.$$

$$\left. + \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le 2^n}(|j|+1)^{\rho}2^{n(1-2\alpha)}\left|\mu\left(\Delta^{(j)}_{kn}\right)\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(|j|+1)^{-\rho}\right)^{1/2}\right].$$

Тут для довільного $\rho > 1$ виконується $\sum_{j\in\mathbb{Z}}(|j|+1)^{-\rho} < +\infty$, а суми зі стохастичними мірами мають вигляд $\sum_{l=1}^{\infty}\left(\int_{\mathsf{X}} f_l\,d\mu\right)^2$, де

$$\{f_l(y),\ l\geq 1\} = \left\{(|j|+1)^{\rho/2}\ \mathbf{1}_{[j,\ j+1]}(y),\ j\in\mathbb{Z}\right\},$$

$$\{f_l(y),\ l\geq 1\} = \left\{(|j|+1)^{\rho/2}\, 2^{n(1-2\alpha)/2}\mathbf{1}_{\Delta_{kn}^{(j)}}(y),\ j\in\mathbb{Z},\ n\geq 1,\ 1\leq k\leq 2^n\right\}$$

у першій та другій частинах останньої суми відповідно. Оскільки $\sum_{l=1}^{\infty}|f_l(y)|\leq C(|y|^\tau+1)$ для $\tau=\rho/2$ та за умовою даної леми $|y|^\tau$ інтегровна по μ на $\mathbb{R}$, то за лемою 3.1 [1] одержимо скінченність відповідних сум, що й завершує доведення леми 1.

5. Регулярність стохастичного інтеграла по t. У даному пункті будемо досліджувати неперервність за Гельдером стохастичного інтеграла з рівності (3) за часовою змінною при фіксованій просторовій змінній.

Лема 2. *Нехай $|y|^\tau$ інтегровна по μ на $\mathbb{R}$ для деякого $\tau>1/2$ та виконуються припущення* L_1, L_2, A_5, A_6, P. *Тоді для будь-яких фіксованих $x\in\mathbb{R}$ та $\gamma_2<1/4$ випадковий процес*

$$\hat{\vartheta}(t)=\int\limits_{\mathbb{R}}d\mu(y)\int\limits_0^t p(t,x;s,y)\sigma(s,y)\,ds,\quad t\in[0,T],$$

має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником γ_2.

Доведення. Нехай $x\in\mathbb{R},\ 0\leq t_1<t_2\leq T$ — довільні фіксовані. Покладемо

$$\hat{q}(z,y)=\int\limits_0^{t_2}p(t_2,x;s,y)\sigma(s,y)\,ds-\int\limits_0^{t_1}p(t_1,x;s,y)\sigma(s,y)\,ds,\quad z=(t_1,t_2,x).$$

Тоді для модифікації (9) стохастичного інтеграла

$$\hat{\eta}(z)=\int\limits_{[j,j+1]}\hat{q}(z,y)\,d\mu(y)$$

виконується співвідношення (10). Оцінимо норму простору Бєсова функції $\hat{q}(z,\cdot)$. Маємо

$$\hat{q}(z,y+h)-\hat{q}(z,y)=\int\limits_0^{t_1}\left(p(t_2,x;s,y+h)-p(t_1,x;s,y+h)\right)\sigma(s,y+h)ds-$$

$$-\int\limits_0^{t_1}\left(p(t_2,x;s,y)-p(t_1,x;s,y)\right)\sigma(s,y)ds+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}p(t_2,x;s,y+h)\sigma(s,y+h)ds-\int\limits_{t_1}^{t_2}p(t_2,x;s,y)\sigma(s,y)ds=$$

$$=\int\limits_0^{t_1}\left(p(t_2,x;s,y+h)-p(t_1,x;s,y+h)\right)\left(\sigma(s,y+h)-\sigma(s,y)\right)ds+$$

$$+\int\limits_0^{t_1}\left(p(t_2,x;s,y+h)-p(t_2,x;s,y)\right)\sigma(s,y)ds-$$

$$-\int_0^{t_1} \left(p(t_1,x;s,y+h) - p(t_1,x;s,y)\right)\sigma(s,y)ds+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} p(t_2,x;s,y+h)(\sigma(s,y+h)-\sigma(s,y))ds+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} (p(t_2,x;s,y+h) - p(t_2,x;s,y))\sigma(s,y)ds=$$

$$= J_{11} + J_{12} - J_{13} + J_{21} + J_{22} = J_1 + J_2.$$

За припущенням A_6, використовуючи (4), отримуємо

$$|J_{21}| \le Ch^{\beta(\sigma)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{-1/2} e^{-\frac{\lambda|x-y-h|^2}{t_2-s}} ds \le$$

$$\le Ch^{\beta(\sigma)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{-1/2} ds = Ch^{\beta(\sigma)}(t_2-t_1)^{1/2}. \qquad (15)$$

Далі, з одного боку, за припущенням A_5 та (4)

$$|J_{22}| \le \left| \int_{t_1}^{t_2} p(t_2,x;s,y+h)\sigma(s,y)ds \right| + \left| \int_{t_1}^{t_2} p(t_2,x;s,y)\sigma(s,y)ds \right| \le$$

$$\le C\int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{-1/2} e^{-\frac{\lambda|x-y-h|^2}{t_2-s}} ds + C\int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{-1/2} e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t_2-s}} ds \le C(t_2-t_1)^{1/2}. \qquad (16)$$

З іншого боку, міркуючи, як і при отриманні (11), маємо

$$|J_{22}| \le C\int_{t_1}^{t_2} \int_{x-h}^{x} \left| \frac{\partial p(t_2,v;s,y)}{\partial v} \right| dv\, ds \le C \int_{t_1}^{t_2} \int_{x-h}^{x} (t_2-s)^{-1} e^{-\frac{\lambda|v-y|^2}{t_2-s}} dv\, ds \le Ch^{\gamma_0}, \qquad (17)$$

де $0 < \gamma_0 < 1$ — довільне та стала C залежить від γ_0.

Отже, перемноживши (16) та (17) у степенях θ_0 та $1-\theta_0$, $\theta_0 \in (0,1)$, відповідно, з урахуванням (15) одержимо

$$|J_2| \le Ch^{\beta(\sigma)}(t_2-t_1)^{1/2} + Ch^{(1-\theta_0)\gamma_0}(t_2-t_1)^{\theta_0/2} \le C(t_2-t_1)^{\theta_0/2}(h^{\beta(\sigma)} + h^{(1-\theta_0)\gamma_0}).$$

При $\gamma_0 \to 1-$ та $1-\theta_0 \to 1/2+$ матимемо $(1-\theta_0)\gamma_0 > 1/2$ та $\theta_0 \to 1/2-$.

Використовуючи припущення A_6 та (6), можемо записати

$$|J_{11}| \le L_\sigma h^{\beta(\sigma)} \int_0^{t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial p(\tau,x;s,y+h)}{\partial \tau} \right| d\tau\, ds \le Ch^{\beta(\sigma)} \int_0^{t_1} \int_{t_1}^{t_2} (\tau-s)^{-3/2} e^{-\frac{\lambda|x-y-h|^2}{\tau-s}} d\tau\, ds \le$$

$$\leq Ch^{\beta(\sigma)} \int_0^{t_1} \int_{t_1}^{t_2} (\tau - s)^{-3/2} d\tau \, ds \leq Ch^{\beta(\sigma)} (t_2 - t_1)^{1/2}. \tag{18}$$

Аналогічно, за припущенням A_5 маємо

$$|J_{12} - J_{13}| = \left| \int_0^{t_1} \left(p(t_2, x; s, y+h) - p(t_1, x; s, y+h) \right) \sigma(s,y) ds - \right.$$

$$\left. - \int_0^{t_1} \left(p(t_2, x; s, y) - p(t_1, x; s, y) \right) \sigma(s,y) ds \right| \leq$$

$$\leq C \int_0^{t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial p(\tau, x; s, y+h)}{\partial \tau} \right| d\tau \, ds + C \int_0^{t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial p(\tau, x; s, y)}{\partial \tau} \right| d\tau \, ds \leq C (t_2 - t_1)^{1/2}. \tag{19}$$

З іншого боку, такі ж міркування, як і при отриманні (17), приводять до оцінки

$$|J_{12} - J_{13}| \leq |J_{12}| + |J_{13}| \leq Ch^{\gamma_0}. \tag{20}$$

Отже, перемноживши (19) та (20) у степенях θ_0 та $1 - \theta_0$ відповідно, з урахуванням (18) отримаємо

$$|J_1| \leq Ch^{\beta(\sigma)} (t_2 - t_1)^{1/2} + Ch^{(1-\theta_0)\gamma_0} (t_2 - t_1)^{\theta_0/2} \leq C (t_2 - t_1)^{\theta_0/2} (h^{\beta(\sigma)} + h^{(1-\theta_0)\gamma_0}).$$

Таким чином, маємо

$$|\hat{q}(z, y+h) - \hat{q}(z, y)| \leq C (t_2 - t_1)^{\theta_0/2} (h^{\beta(\sigma)} + h^{(1-\theta_0)\gamma_0}),$$

і тоді

$$\left(\int_0^1 (w_2(g,r))^2 r^{-2\alpha-1} \, dr \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C (t_2 - t_1)^{\theta_0/2} \left(\int_0^1 r^{2\beta(\sigma) - 2\alpha - 1} dr - \int_0^1 r^{2(1-\theta_0)\gamma_0 - 2\alpha - 1} dr \right) \leq$$

$$\leq C (t_2 - t_1)^{\theta_0/2}$$

для відповідного $1/2 < \alpha < (1 - \theta_0)\gamma_0$.

Крім того, для $y \in \mathbb{R}$ за (16) та (19)

$$|\hat{q}(z, y)| = \left| \int_0^{t_1} (p(t_2, x; s, y) - p(t_1, x; s, y)) \sigma(s, \ y) \, ds + \int_{t_1}^{t_2} p(t_2, x; s, y) \sigma(s, \ y) \, ds \right| \leq$$

$$\leq C (t_2 - t_1)^{1/2},$$

а тому

$$\|\hat{q}(z,\cdot)\|_{L_2([j,j+1])} \le C(t_2-t_1)^{1/2}, \qquad |\hat{q}(z,j)| \le C(t_2-t_1)^{1/2} \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Завершення даного доведення повторює завершення доведення леми 1 з використанням умови про інтегровність функції $|y|^\tau$ для деякого $\tau > 1/2$.

6. Висновки. Досліджено стохастичне диференціальне рівняння параболічного типу на множині $[0,T]\times\mathbb{R}$, породжене загальною стохастичною мірою $\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Доведено існування, єдиність та неперервність за Гельдером м'якого розв'язку.

Порівнявши одержані результати з результатами роботи [1], зазначимо, що ми отримали умову Гельдера з показниками $\gamma_1 < 1/2$ та $\gamma_2 < 1/4$ за просторовою та часовою змінними відповідно. Для випадку рівняння теплопровідності в [1] одержано показники $\gamma_1 < 1/6$ та $\gamma_2 < 1/18$. Таким чином, нам вдалося зробити узагальнення та покращити показники неперервності за Гельдером.

Автор висловлює щиру подяку професору В. М. Радченку за постановку задачі та постійну увагу до даної роботи.

Література

1. *Radchenko V.* Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure // Stud. Math. – 2009. – **194**, № 3. – P. 231 – 251.
2. *Walsh J. B.* An introduction to stochastic partial differential equations // Lect. Notes Math. – 1986. – **1180**. – P. 231 – 251.
3. *Millet A., Morien P. L.* On implicit and explicit discretization schemes for parabolic SPDEs in any dimension // Stochast. Process. and Appl. – 2005. – **115**. – P. 1073 – 1106.
4. *Printems J.* On the discretization in time of parabolic stochastic partial differential equations // Math. Model. Numer. Anal. – 2001. – **35**, № 6. – P. 1055 – 1078.
5. *Sanz-Solé M., Süss A.* Absolute continuity for SPDEs with irregular fundamental solution // Electron. Commun. Probab. – 2015. – **20**, № 14. – P. 1 – 11. DOI 10.1214/ECP.v20-3831; arXiv:1409.8031.
6. *Da Prato G., Zabczyk J.* Stochastic equations in infinite dimentions // Encycl. Math. Appl. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. – Vol. 45. – 454 p.
7. *Zhang X.* Stochastic Volterra equations in Banach spaces and stochastic partial differential equation // J. Funct. Anal. – 2010. – **258**. – P. 1361 – 1425.
8. *Radchenko V.* Heat equation with general stochastic measure colored in time // Modern Stochastics: Theory and Appl. – 2014. – **1**. – P. 129 – 138.
9. *Боднарчук І.* М'який розв'язок хвильового рівняння із загальною випадковою мірою // Вісн. Київ. ун-ту. Математика і механіка. – 2010. – **24**. – С. 28 – 33.
10. *Kwapień S., Woyczyński W. A.* Random series and stochastic integrals: single and multiple. – Boston: Birkhäuser, 1992. – 360 p.
11. *Радченко В. Н.* Интегралы по общим случайным мерам // Труды Ин-та математики НАН Украины. – 1999. – **27**. – 196 с.
12. *Radchenko V.* On a definition of the integral of a random function // Theory Probab. and Appl. – 1996. – **41**, № 3. – P. 597 – 601.
13. *Ilyin A. M., Kalashnikov A. S., Oleynik O. A.* Linear second-order partial differential equations of the parabolic type // J. Math. Sci. – 2002. – **108**, № 4. – P. 435 – 542.
14. *Радченко В. Н.* Эволюционные уравнения с общими стохастическими мерами в гильбертовом пространстве // Теория вероятностей и ее применения. – 2014. – **59**, № 2. – С. 375 – 386.
15. *Kamont A.* A discrete characterization of Besov spaces // Approxim. Theory Appl. – 1997. – **13**, № 2. – P. 63 – 77.

Одержано 01.10.15,
після доопрацювання — 21.10.16