УДК 517.951.2

**А. И. Исмоилов, А. О. Маманазаров, А. К. Уринов** (Ферган. гос. ун-т, Узбекистан)

# ЗАДАЧА ДАРБУ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА – ПУАССОНА – ДАРБУ

In the article Euler – Poisson – Darboux equation was considered in the characteristic triangle and Darboux problem was investigated. The solution of the problem was found by Riemann's method. Theorems on the existence and uniqueness of the solution were proved.

Розглянуто узагальнене рівняння Ейлера – Пуассона – Дарбу в характеристичному трикутнику та досліджено задачу Дарбу. Методом Рімана знайдено формулу для розв'язку задачі і доведено теорему про існування єдиного розв'язку.

**1. Введение.** Известно, что многие вырождающиеся дифференциальные уравнения гиперболического типа и уравнения такого типа с сингулярным коэффициентом заменой независимых переменных приводятся к так называемому уравнению Эйлера – Пуассона – Дарбу

$$E_{\alpha,\beta}(u) \equiv u_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\xi-\eta}\,u_\xi + \frac{\alpha}{\xi-\eta}\,u_\eta = 0.$$

Это уравнение и более общее уравнение $E_{\alpha,\beta}(u) + \gamma(\xi-\eta)^{-2}u = 0$ первым изучал Эйлер при $\alpha = \beta = m,\ \gamma = n,\ m,n \in N$ [1], а также Дарбу [2], Пуассон [3], Риман [4] и многие другие исследователи XX века (см., например, [5 – 9]).

Следующим представителем дифференциальных уравнений типа $E_{\alpha,\beta}(u) = 0$ является уравнение

$$L^{\gamma}_{\alpha,\beta}(u) \equiv u_{\xi\eta} + \left(\frac{\alpha}{\eta+\xi} + \frac{\beta}{\eta-\xi}\right)u_\xi + \left(\frac{\alpha}{\eta+\xi} - \frac{\beta}{\eta-\xi}\right)u_\eta + \gamma u = 0. \qquad (1)$$

Из этого уравнения при $\alpha = 0$ следует уравнение $E_{\beta,\beta}(u) = 0$, а при $\alpha = \beta \neq 0$ замена $t = \sqrt{\xi}$, $z = \sqrt{\eta}$ сводит уравнение $L^{\gamma}_{\alpha,\beta}(u) = 0$ к уравнению $E_{\beta,\beta}(v) = 0$, где $v(t,z) = u\left(\sqrt{\xi}, \sqrt{\eta}\right)$. Поэтому уравнение $L^{\gamma}_{\alpha,\beta}(u) = 0$ в настоящее время называют обобщенным уравнением Эйлера – Пуассона – Дарбу.

В данной статье, рассматривая уравнение (1) в области $\Delta = \{(\xi,\eta)\colon 0 < \xi < \eta < 1\}$, мы исследуем следующую задачу.

**Задача Дарбу.** Найти регулярное в области $\Delta$ решение $u(\xi,\eta) \in C(\bar{\Delta})$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{\eta-\xi\to+0} u(\xi,\eta) = \tau(\xi), \quad 0 \le \xi \le 1, \qquad (2)$$

$$u(0,\eta) = \psi_1(\eta), \quad 0 \le \eta \le 1, \qquad (3)$$

где $\tau(\xi)$ и $\psi_1(\eta)$ — заданные непрерывные функции, причем выполняется условие согласования $\tau(0) = \psi_1(0)$.

Задача Дарбу для уравнения $E_{\alpha,\beta}(u) = 0$ при $0 < \alpha = \beta < \dfrac{1}{2}$ изучена Геллерстедтом [5]. Им построена функция Римана – Адамара этой задачи, что дало возможность ее решения записать в явном виде. В работе [10], где рассматривалось уравнение $E_{\alpha,\beta}(u)=0$ при $0<\alpha$, $\beta$, $\alpha+\beta<1$, построена функция Римана – Адамара задачи Дарбу, методом Римана найдена формула решения этой задачи, а также доказана теорема существования решения задачи. Задача Дарбу для уравнения $(-y)^m u_{xx} - x^m u_{yy} = 0$, где $x>0$, $y<0$, $m>0$, в характеристическом треугольнике исследована в [11], построена функция Римана – Адамара, найдена формула для решения и доказано существование единственного решения. В [13, 14] формально получена формула решения задачи Дарбу для уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} + (2p/x)u_x - (2q/y)u_y + \lambda^2 u = 0 \tag{4}$$

при $\psi_1(\eta)\equiv 0$, но эта формула не исследована, т. е. не доказана теорема существования решения задачи с указанием гладкости функции $\tau(\xi)$.

В настоящей статье методом Римана найдена формула решения задачи Дарбу для уравнения $L^{\gamma}_{\alpha,\beta}(u)=0$ при $0<\alpha\le\beta<\dfrac{1}{2}$ для любого $\gamma\in R$ и доказана теорема о существовании единственного решения.

**2. Исследование задачи Дарбу {(1), (2), (3)}.** Эту задачу будем решать методом Римана. При этом существенно используем так называемую функцию Римана – Адамара $W(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$1^0$) по переменным $\xi_0$, $\eta_0$ она удовлетворяет уравнению (1), а по переменным $\xi$, $\eta$ — сопряженному уравнению

$$M^{\gamma}_{\alpha,\beta}(W)\equiv W_{\xi\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)W\right] - \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)W\right] + \gamma W = 0;$$

$2^0$) $W_\xi - \left(\dfrac{\alpha}{\eta+\xi}-\dfrac{\beta}{\eta-\xi}\right)W = 0$ при $\eta=\eta_0$, $W_\eta - \left(\dfrac{\alpha}{\eta+\xi}+\dfrac{\beta}{\eta-\xi}\right)W = 0$ при $\xi=\xi_0$;

$3^0$) $W(\xi_0,\eta_0;\xi_0,\eta_0;\gamma)=1$;

$4^0$) $\lim\limits_{\eta-\xi\to+0} W(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)=0$;

$5^0$) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left\{\left[W_\xi - \left(\dfrac{\alpha}{\eta+\xi}-\dfrac{\beta}{\eta-\xi}\right)W\right]\Bigg|_{\eta=\xi_0+\varepsilon} - \left[W_\xi - \left(\dfrac{\alpha}{\eta+\xi}-\dfrac{\beta}{\eta-\xi}\right)W\right]\Bigg|_{\eta=\xi_0-\varepsilon}\right\}=0$, $\varepsilon>0$.

Используя функции Римана и Грина – Адамара, построенные М. Капилевичем в работе [13] для уравнения (4), нетрудно убедиться, что функция $W(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)$ со свойствами $1^0$ – $5^0$ существует и определяется равенством

$$W(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma) = \begin{cases} R_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma) & \text{при} \quad \eta>\xi_0, \\ R_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma) & \text{при} \quad \eta<\xi_0, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$R_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma) = \left(\frac{\eta+\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^{\alpha}\left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\beta}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma_3^k}{(k!)^2}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(\alpha)_m(1-\alpha)_m}{m!(1+k)_m}\,\sigma_1^m F(\beta,1-\beta;1+k+m;\sigma_2), \tag{6}$$

$$R_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)=\chi\left(\frac{\eta+\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^{\alpha}\frac{(\eta-\xi)^{2\beta}\sigma_2^{2\beta-1}}{[(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)]^{\beta}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma_3^k}{k!(\beta)_k}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(\alpha)_m(1-\alpha)_m}{m!(\beta+k)_m}\,\sigma_1^m F\left(1-\beta-k-m;1-\beta;2-2\beta;\frac{1}{\sigma_2}\right), \tag{7}$$

$$\sigma_1=-\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\eta+\xi)(\eta_0+\xi_0)},\quad \sigma_2=\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)},$$

$$\sigma_3=-\gamma(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0),\quad \chi=\Gamma(1-\beta)/[\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)],$$

$(z)_n=z(z+1)\ldots(z+n-1)=\Gamma(z+n)/\Gamma(z)$ — символ Похгаммера,

$$F(a,b;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}\,x^n$$

— гипергеометрическая функция Гаусса; $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера [14].

Пусть $u(\xi,\eta)$ — решение задачи Дарбу для уравнения (1), а $P(\xi_0,\eta_0)$ — произвольная точка области $\Delta$. Найдем $u(\xi_0,\eta_0)$.

В треугольнике $O'A'B'$, ограниченном отрезками $O'A'$, $A'B'$, $O'B'$ прямых $\eta=\xi+\varepsilon$, $\eta=\xi_0-\varepsilon$, $\xi=0$ соответственно, и в прямоугольнике $B''A''P''P'$, ограниченном отрезками $B''A''$, $A''P''$, $P''P'$, $P'B''$ прямых $\eta=\xi_0+\varepsilon$, $\xi=\xi_0-2\varepsilon$, $\eta=\eta_0$, $\xi=0$ соответственно, справедливо тождество

$$2\left[WL_{\alpha,\beta}^{\gamma}(u)-uM_{\alpha,\beta}^{\gamma}(W)\right]\equiv\frac{\partial}{\partial\eta}\left[Wu_\xi-uW_\xi+\left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}-\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uW\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\xi}\left[Wu_\eta-uW_\eta+\left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}+\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uW\right]\equiv 0,$$

где $\varepsilon$ — достаточно малое положительное число.

Интегрируя это тождество по треугольнику $O'A'B'$ и прямоугольнику $B''A''P''P'$, а затем применяя формулу Грина к полученным интегралам, получаем

$$\left(\int\limits_{\partial O'A'B'}+\int\limits_{\partial B''A''P''P'}\right)\left[Wu_\eta-uW_\eta+\left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}+\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uW\right]d\eta-$$

$$-\left[Wu_\xi-uW_\xi+\left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}-\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uW\right]d\xi=0.$$

Вычисляя интегралы по контурам $\partial O'A'B'$ и $\partial B''A''P''P'$, имеем

$$\int\limits_0^{\xi_0-2\varepsilon}\left[W\left(u_\eta-u_\xi\right)+u\left(W_\xi-W_\eta+\frac{4\beta}{\eta-\xi}W\right)\right]\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi+$$

$$+\int\limits_0^{\xi_0-2\varepsilon}\left[Wu_\xi-uW_\xi+\left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}-\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uW\right]\Big|_{\eta=\xi_0-\varepsilon}d\xi+$$

$$
+\int\limits_{0}^{\xi_0-\varepsilon}\left[uW_\eta - Wu_\eta - \left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}+\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uW\right]\Bigg|_{\xi=0} d\eta -
$$

$$
-\int\limits_{0}^{\xi_0-2\varepsilon}\left[Wu_\xi - uW_\xi + \left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}-\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uW\right]\Bigg|_{\eta=\xi_0+\varepsilon} d\xi +
$$

$$
+\int\limits_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0}\left[Wu_\eta - uW_\eta + \left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}+\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uW\right]\Bigg|_{\xi=\xi_0-2\varepsilon} d\eta +
$$

$$
+\int\limits_{0}^{\xi_0-2\varepsilon}\left[Wu_\xi - uW_\xi + \left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}-\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uW\right]\Bigg|_{\eta=\eta_0} d\xi +
$$

$$
+\int\limits_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0}\left[uW_\eta - Wu_\eta - \left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}+\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uW\right]\Bigg|_{\xi=0} d\eta = 0.
$$

Отсюда, применяя формулу интегрирования по частям к первым слагаемым выражений, стоящих под интегралами (кроме первого), находим

$$
u\left(\xi_0-2\varepsilon,\eta_0\right)W\left(\xi_0-2\varepsilon,\eta_0;\xi_0,\eta_0;\gamma\right) = u\left(\xi_0-2\varepsilon,\xi_0+\varepsilon\right)W\left(\xi_0-2\varepsilon,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0;\gamma\right)+
$$

$$
+\frac{1}{2}\,u(0,\varepsilon)W(0,\varepsilon;\xi_0,\eta_0;\gamma)-\frac{1}{2}\,u\left(\xi_0-2\varepsilon,\xi_0-\varepsilon\right)W\left(\xi_0-2\varepsilon,\xi_0-\varepsilon;\xi_0,\eta_0;\gamma\right)+
$$

$$
+\int\limits_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0} u\left[W_\eta - \left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)W\right]\Bigg|_{\xi=\xi_0-2\varepsilon} d\eta +
$$

$$
+\int\limits_{0}^{\xi_0-2\varepsilon} u\left[W_\xi - \left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)W\right]\Bigg|_{\eta=\eta_0} d\xi -
$$

$$
-\int\limits_{0}^{\xi_0-2\varepsilon}\Bigg\{u\left[W_\xi - \left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)W\right]\Bigg|_{\eta=\xi_0+\varepsilon} -
$$

$$
-u\left[W_\xi - \left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)W\right]\Bigg|_{\eta=\xi_0-\varepsilon}\Bigg\} d\xi +
$$

$$
+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\xi_0-2\varepsilon}\left[W\left(u_\xi-u_\eta\right)+u\left(W_\eta - W_\xi - \frac{4\beta}{\eta-\xi}W\right)\right]\Bigg|_{\eta=\xi+\varepsilon} d\xi +
$$

$$+\left(\int\limits_{0}^{\xi_0-\varepsilon}+\int\limits_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0}\right)W\left[u_\eta+\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)u\right]\Bigg|_{\xi=0}d\eta. \qquad (8)$$

Исследуем выражения, содержащиеся в равенстве (8), при $\varepsilon\to 0$. При этом в силу свойства $3^0$ функции $W(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)$ левая часть равенства (8) стремится к $u(\xi_0,\eta_0)$. На основании свойств $4^0$, $2^0$ и $5^0$ функции $W(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)$ соответственно первое — шестое слагаемые в правой части равенства (8) стремятся к нулю. Кроме того, в силу свойства $4^0$ функции $W(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}W(u_\xi-u_\eta)\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}=0.$$

Далее, используя краевое условие (2) и разложение (7) функции $R_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)$, нетрудно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u\left(W_\eta-W_\xi-\frac{4\beta}{\eta-\xi}\,W\right)\Bigg|_{\eta=\xi+\varepsilon}=$$

$$=(1-2\beta)\chi(\eta-\xi)^{1-2\beta}\left(\frac{2\xi}{\xi_0+\eta_0}\right)^{\alpha}\frac{\tau(\xi)\,\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;\beta;\sigma_1,\sigma_3\right)|_{\eta=\xi}}{\left[\left(\xi_0-\xi\right)\left(\eta_0-\xi\right)\right]^{1-\beta}},$$

где $\Xi_2(a,b;c;x,y)$ — гипергеометрическая функция Гумберта [14]:

$$\Xi_2(a,b,c;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_{m+n}m!n!}\,x^my^n,\quad |x|<1.$$

Наконец, в силу краевого условия (3) восьмое слагаемое в правой части равенства (8) стремится к

$$\int\limits_0^{\eta_0}\left[\psi'{}_1(\eta)+\frac{\alpha+\beta}{\eta}\psi_1(\eta)\right]W\left(0,\eta;\xi_0,\eta_{0,};\gamma\right)d\eta.$$

Теперь из равенства (8), переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ и учитывая доказанное выше, получаем формулу для решения задачи Коши – Гурса {(1), (2), (3)}:

$$u(\xi_0,\eta_0)=(1-2\beta)(\eta_0-\xi_0)^{1-2\beta}\int\limits_0^{\xi_0}\left(\frac{2\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^{\alpha}\frac{\tau(\xi)}{[(\xi_0-\xi)(\eta_0-\xi)]^{1-\beta}}\times$$

$$\times\Xi_2(\alpha,1-\alpha;\beta;\sigma_1,\sigma_3)|_{\eta=\xi}\,d\xi+\int\limits_0^{\eta_0}\left[\psi_1'(\eta)+\frac{\alpha+\beta}{\eta}\,\psi_1(\eta)\right]W(0,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)d\eta. \qquad (9)$$

Из самого способа получения формулы (9) следует, что если задача Дарбу {(1), (2), (3)} имеет решение, то оно единственно.

**Теорема 1.** *Если $\tau(\xi)$ принадлежит $C[0,1]$ и удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\delta>1-\beta$ на $[0,1)$, то функция*

$$I(\xi,\eta)=\tilde{\chi}\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{(\eta-\xi)^{1-2\beta}\tau(t)}{[(\xi-t)(\eta-t)]^{1-\beta}}\,\Xi_2(\alpha,1-\alpha;\beta;y_1,y_2)dt,$$

*где* $y_1 = -(\xi - t)(\eta - t)/[2t(\xi + \eta)]$, $y_2 = -\gamma(\xi - t)(\eta - t)$, $\tilde{\chi} = (1 - 2\beta)\chi$, *удовлетворяет уравнению* (1) *и краевым условиям*

$$\lim_{\eta - \xi \to +0} I(\xi, \eta) = \tau(\xi), \quad 0 \le \xi \le 1, \tag{10}$$

$$I(0, \eta) = 0, \quad 0 \le \eta \le 1. \tag{11}$$

При доказательстве теоремы 1 нам понадобятся следующие леммы.

**Лемма 1.** *Если функция* $v(\xi, \eta)$ *удовлетворяет уравнению* $L^{\gamma}_{\alpha, 1-\beta}(u) = 0$, *то функция* $(\eta - \xi)^{1-2\beta} v(\xi, \eta)$ *удовлетворяет уравнению* (1).

Эта лемма доказывается непосредственной проверкой.

**Лемма 2.** *Если* $\tau(\xi)$ *принадлежит* $C[0,1]$ *и удовлетворяет условию Гельдера с показателем* $\delta > 1 - \beta$ *на* $[0, 1)$, *то функция*

$$I_1(\xi, \eta) = \int\limits_0^{\xi} \left(\frac{2t}{\xi + \eta}\right)^{\alpha} \frac{\tau(t) \Xi_2(\alpha, 1 - \alpha; \beta; y_1, y_2)}{[(\xi - t)(\eta - t)]^{1-\beta}} dt$$

*удовлетворяет уравнению* $L^{\gamma}_{\alpha, 1-\beta}(u) = 0$.

***Доказательство.*** Рассмотрим функцию

$$I_1^{\varepsilon}(\xi, \eta) = \int\limits_0^{\xi - \varepsilon} \left(\frac{2t}{\xi + \eta}\right)^{\alpha} \frac{\tau(t) \Xi_2(\alpha, 1 - \alpha; \beta; y_1, y_2)}{[(\xi - t)(\eta - t)]^{1-\beta}} dt,$$

где $\varepsilon$ — достаточно малое положительное число. Очевидно, что $\lim_{\varepsilon \to 0} I_1^{\varepsilon}(\xi, \eta) = I_1(\xi, \eta)$.

Непосредственным дифференцированием получаем

$$\frac{\partial}{\partial \xi} I_1^{\varepsilon}(\xi, \eta) = -\frac{\alpha}{\xi + \eta} I_1^{\varepsilon}(\xi, \eta) + \tau(\xi - \varepsilon)[\varepsilon(\eta - \xi + \varepsilon)]^{\beta - 1} \times$$
$$\times \left(\frac{2\xi - 2\varepsilon}{\xi + \eta}\right)^{\alpha} \Xi_2\left(\alpha, 1 - \alpha, \beta; y_1, y_2\right)\Big|_{t = \xi - \varepsilon} +$$
$$+(1 - \beta) \int\limits_0^{\xi - \varepsilon} \left(\frac{2t}{\xi + \eta}\right)^{\alpha} \frac{\tau(\xi) - \tau(t) \Xi_2(\alpha, 1 - \alpha; \beta; y_1, y_2)}{(\xi - t)^{2-\beta} (\eta - t)^{1-\beta}} dt +$$
$$+ \int\limits_0^{\xi - \varepsilon} \left(\frac{2t}{\xi + \eta}\right)^{\alpha} \frac{\tau(t)}{[(\xi - t)(\eta - t)]^{1-\beta}} \frac{\partial}{\partial \xi} \Xi_2(\alpha, 1 - \alpha; \beta; y_1, y_2) dt -$$
$$-(1 - \beta)\tau(\xi) \int\limits_0^{\xi - \varepsilon} \left(\frac{2t}{\xi + \eta}\right)^{\alpha} (\xi - t)^{\beta - 2} (\eta - t)^{\beta - 1} dt. \tag{12}$$

Справедливы следущие равенства:

$$\int\limits_0^{\xi-\varepsilon} \frac{(\beta-1)t^\alpha dt}{(\xi-t)^{2-\beta}(\eta-t)^{1-\beta}} = -\int\limits_0^{\xi-\varepsilon} \frac{(\partial/\partial t)(\xi-t)^{\beta-1}dt}{t^{-\alpha}(\eta-t)^{1-\beta}} =$$

$$= -(\xi-\varepsilon)^\alpha(\eta-\xi+\varepsilon)^{\beta-1}\varepsilon^{\beta-1}+$$

$$+\int\limits_0^{\xi-\varepsilon} \frac{\alpha t^{\alpha-1}dt}{(\xi-t)^{1-\beta}(\eta-t)^{1-\beta}} + \int\limits_0^{\xi-\varepsilon} \frac{(1-\beta)t^\alpha dt}{(\xi-t)^{1-\beta}(\eta-t)^{2-\beta}}.$$

Учитывая это, равенство (12) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial\xi} I_1^\varepsilon(\xi,\eta) = -\frac{\alpha}{\xi+\eta} I_1^\varepsilon(\xi,\eta) + \left(\frac{2\xi-2\varepsilon}{\xi+\eta}\right)^\alpha (\eta-\xi+\varepsilon)^{\beta-1}\times$$

$$\times\varepsilon^{\beta-1}\left[\tau(\xi-\varepsilon)\,\Xi_2(\alpha,1-\alpha;\beta;y_1,y_2)\big|_{t=\xi-\varepsilon} - \tau(\xi)\right]+$$

$$+(1-\beta)\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^\alpha \frac{\tau(\xi)-\tau(t)\Xi_2(\alpha,1-\alpha;\beta;y_1,y_2)}{(\xi-t)^{2-\beta}(\eta-t)^{1-\beta}}dt+$$

$$+\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^\alpha \frac{\tau(t)}{[(\xi-t)(\eta-t)]^{1-\beta}}\frac{\partial}{\partial\xi}\,\Xi_2(\alpha,1-\alpha;\beta;y_1,y_2)dt+$$

$$+\tau(\xi)\left(\frac{2}{\xi+\eta}\right)^\alpha\left[\alpha\int\limits_0^{\xi-\varepsilon} t^{\alpha-1}(\xi-t)^{\beta-1}(\eta-t)^{\beta-1}dt+\right.$$

$$\left.+(1-\beta)\int\limits_0^{\xi-\varepsilon} t^\alpha(\xi-t)^{\beta-1}(\eta-t)^{\beta-2}dt\right]. \tag{13}$$

Рассмотрим выражение

$$l = \alpha\int\limits_0^\xi t^{\alpha-1}(\xi-t)^{\beta-1}(\eta-t)^{\beta-1}dt + (1-\beta)\int\limits_0^\xi t^\alpha(\xi-t)^{\beta-1}(\eta-t)^{\beta-2}dt.$$

Заменяя переменную интегрирования по формуле $t=\xi s$ и принимая во внимание интегральное представление гипергеометрической функции Гаусса [14]

$$F(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b}dt,$$

можно показать, что

$$l = \frac{\xi^{\alpha+\beta-1}}{\eta^{1-\beta}}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}\left[(\alpha+\beta)F\left(\alpha,1-\beta;\alpha+\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)+\right.$$

$$+ (1-\beta)\,\frac{\xi}{\eta}\,F\left(1+\alpha, 2-\beta; 1+\alpha+\beta; \frac{\xi}{\eta}\right)\bigg].$$

Отсюда, используя равенства [14, 15]

$$cF(a,b;c;z) - cF(a+1,b;c;z) + bzF(a+1,b+1;c+1;z) = 0,$$

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;z),$$

находим

$$l = \frac{\xi^{\alpha+\beta-1}\eta^{1-\beta}}{(\eta-\xi)^{2-2\beta}}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,F\left(\beta-1, \alpha+2\beta-1; \alpha+\beta; \frac{\xi}{\eta}\right). \tag{14}$$

Теперь из (13), переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и учитывая равенства (14) и

$$\Xi_2(\alpha, 1-\alpha; \beta; y_1, y_2)|_{t=\xi-\varepsilon} = 1 + \varepsilon O(1),$$

а также свойства функции $\tau(\xi)$, получаем равенство

$$\frac{\partial I_1(\xi,\eta)}{\partial \xi} = -\frac{\alpha I_1(\xi,\eta)}{\eta+\xi} +$$

$$+(1-\beta)\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\tau(\xi)-\tau(t)\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;\beta;y_1,y_2\right)}{(\xi-t)^{2-\beta}(\eta-t)^{1-\beta}}\,dt +$$

$$+\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\tau(t)}{[(\xi-t)(\eta-t)]^{1-\beta}}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;\beta;y_1,y_2\right)dt +$$

$$+\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,\tau(\xi)\left(\frac{2\xi}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\times$$

$$\times\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\beta-1}(\eta-\xi)^{2\beta-2}F\left(\beta-1,\alpha+2\beta-1;\alpha+\beta;\frac{\xi}{\eta}\right). \tag{15}$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{\partial I_1(\xi,\eta)}{\partial \eta} = -\frac{\alpha I_1(\xi,\eta)}{\eta+\xi} +$$

$$+(1-\beta)\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\tau(\xi)-\tau(t)\Xi_2(\alpha,1-\alpha;\beta;y_1,y_2)}{(\xi-t)^{1-\beta}(\eta-t)^{2-\beta}}\,dt +$$

$$+\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\tau(t)}{[(\xi-t)(\eta-t)]^{1-\beta}}\,\frac{\partial}{\partial\eta}\,\Xi_2(\alpha,1-\alpha;\beta;y_1,y_2)dt -$$

$$-(1-\beta)\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}\,\tau(\xi)\left(\frac{2\xi}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\times$$

$$\times\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\beta}(\eta-\xi)^{2\beta-2}F\left(\beta,\alpha+2\beta-1;1+\alpha+\beta;\frac{\xi}{\eta}\right). \tag{16}$$

Теперь, принимая во внимание (15), (16) и равенство [15]

$$c\,F(a,b+1;c;z)-a\,z\,F(a+1,b+1;c+1;z)=c\,F(a,b;c;z), \tag{17}$$

находим

$$\frac{\partial I_1(\xi,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial I_1(\xi,\eta)}{\partial\eta}=$$

$$=(1-\beta)\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{(\eta-\xi)\left[\tau(\xi)-\tau(t)\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;\beta;y_1,y_2\right)\right]}{\left[(\xi-t)(\eta-t)\right]^{2-\beta}}dt-$$

$$-\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\tau(t)}{\left[(\xi-t)(\eta-t)\right]^{1-\beta}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\Xi_2(\alpha,1-\alpha;\beta;y_1,y_2)dt+$$

$$+\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,\tau(\xi)(\eta-\xi)^{2\beta-2}\times$$

$$\times\left(\frac{2\xi}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\beta-1}F\left(\beta-1,\alpha+2\beta-2;\alpha+\beta;\frac{\xi}{\eta}\right). \tag{18}$$

Далее, из (15) следует, что

$$\frac{\partial^2 I_1(\xi,\eta)}{\partial\xi\,\partial\eta}=\frac{\alpha(1-\alpha)}{(\eta+\xi)^2}\,I_1(\xi,\eta)-\frac{\alpha}{\eta+\xi}\left[\frac{\partial I_1(\xi,\eta)}{\partial\xi}+\frac{\partial I_1(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right]-$$

$$-(1-\beta)^2\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\tau(\xi)-\tau(t)\Xi_2(\alpha,1-\alpha;\beta;y_1,y_2)}{\left[(\xi-t)(\eta-t)\right]^{2-\beta}}dt-$$

$$-\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\tau(t)}{\left[(\xi-t)(\eta-t)\right]^{1-\beta}}\times$$

$$\times\left[\frac{1-\beta}{\xi-t}\,\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{1-\beta}{\eta-t}\,\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\right]\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;\beta;y_1,y_2\right)dt+$$

$$+\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\tau(\xi)\left(\frac{2\xi}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\beta-1}(\eta-\xi)^{2\beta-2}F\left(\beta-1,\alpha+2\beta-1;\alpha+\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)\right]. \tag{19}$$

Принимая во внимание (18), (19) и вид функции $I_1$, имеем

$$L^{\gamma}_{\alpha,1-\beta}(I_1)=\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\tau(t)}{[(\xi-t)(\eta-t)]^{1-\beta}}\times$$

$$\times\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{1-\beta}{\xi-t}\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{1-\beta}{\eta-t}\,\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{1-\beta}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha(1-\alpha)}{(\eta+\xi)^2}+\gamma\right]\Xi_2(\alpha,1-\alpha;\beta;y_1,y_2)dt+$$

$$+\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,\tau(\xi)\left(\frac{2\xi}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}l_1, \tag{20}$$

где

$$l_1=(1-\beta)\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\beta-1}(\eta-\xi)^{2\beta-3}F\left(\beta-1,\alpha+2\beta-2;\alpha+\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\beta-1}(\eta-\xi)^{2\beta-2}F\left(\beta-1,\alpha+2\beta-1;\alpha+\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)\right]. \tag{21}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{1-\beta}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)=-\frac{1-\beta}{2t(\xi+\eta)}\,\frac{\partial}{\partial y_1}-(1-\beta)\gamma\,\frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$\frac{1-\beta}{\xi-t}\,\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{1-\beta}{\eta-t}\,\frac{\partial}{\partial\xi}=-\left[\frac{1-\beta}{2t(\xi+\eta)}+\frac{1-\beta}{(\eta+\xi)^2}\right]\frac{\partial}{\partial y_1}-2(1-\beta)\gamma\,\frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}=\frac{1}{(\xi+\eta)^2}\left[y_1(y_1-1)\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-y_2\,\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}+(2y_1-1)\frac{\partial}{\partial y_1}\right]+$$

$$+(-\gamma)\left[y_2\,\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+y_1\,\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_2}\right].$$

Тогда

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{1-\beta}{\xi-t}\,\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{1-\beta}{\eta-t}\,\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{1-\beta}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+\frac{\alpha(1-\alpha)}{(\eta+\xi)^2}+\gamma\right]\times$$

$$\times\Xi_2(\alpha,1-\alpha;\beta;y_1,y_2)=$$

$$=-\frac{1}{(\eta+\xi)^2}\left[y_1(1-y_1)\,\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+y_2\,\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}+(\beta-2y_1)\,\frac{\partial}{\partial y_1}-\alpha(1-\alpha)\right]\times$$

$$\times\Xi_2(\alpha,1-\alpha\beta;y_1,y_2)-\gamma\left[y_2\,\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+y_1\,\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}+\beta\frac{\partial}{\partial y_2}-1\right]\times$$

$$\times\Xi_2(\alpha,1-\alpha;\beta;y_1,y_2)=0, \tag{22}$$

так как функция $\Xi_2(a,b;c;x,y)$ удовлетворяет системе уравнений [14]

$$\left[x(1-x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + [c-(a+b+1)x]\,\frac{\partial}{\partial x} - ab\right]\Xi_2 = 0,$$

$$\left[y\frac{\partial^2}{\partial y^2} + x\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial}{\partial y} - 1\right]\Xi_2 = 0.$$

Теперь рассмотрим выражение $l_1$, определяемое равенством (21). Применяя формулу [14]

$$\frac{d}{dz}\, z^a F(a,b;c;z) = az^{a-1}F(a+1,b;c;z)$$

и выполняя некоторые преобразования, получаем

$$l_1 = (1-\beta)(\eta-\xi)^{2\beta-3}(\xi/\eta)^{\beta-1}\times$$
$$\times\left[F\left(\beta-1,\alpha+2\beta-2;\alpha+\beta;\frac{\xi}{\eta}\right) - F\left(\beta-1,\alpha+2\beta-1;\alpha+\beta;\frac{\xi}{\eta}\right) + \right.$$
$$+\left(1-\frac{\xi}{\eta}\right)F\left(\beta,\alpha+2\beta-1;\alpha+\beta;\frac{\xi}{\eta}\right) -$$
$$\left. -F\left(\beta-1,\alpha+2\beta-1;\alpha+\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)\right].$$

В силу равенства [14]

$$c(1-z)F(a,b;c;z) - cF(a-1,b;c;z) = (b-c)zF(a,b;c+1;z)$$

сумма последних двух слагаемых в квадратной скобке равна

$$-[(1-\beta)/(\alpha+\beta)]\frac{\xi}{\eta}\,F\left(\beta,\alpha+2\beta-1;1+\alpha+\beta;\frac{\xi}{\eta}\right).$$

Принимая это во внимание, находим

$$l_1 = (1-\beta)(\eta-\xi)^{2\beta-3}(\xi/\eta)^{\beta-1}\times$$
$$\times\left[F\left(\beta-1,\alpha+2\beta-2;\alpha+\beta;\frac{\xi}{\eta}\right) - F\left(\beta-1,\alpha+2\beta-1;\alpha+\beta;\frac{\xi}{\eta}\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{1-\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{\xi}{\eta}F\left(\beta,\alpha+2\beta-1;1+\alpha+\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)\right].$$

В силу равенства (17) выражение в квадратной скобке равно нулю. Следовательно, $l_1 = 0$.

Если учесть это и (22), то из (20) следует, что $L^{\gamma}_{\alpha,1-\beta}(I_1) = 0$.

Лемма 2 доказана.

**Лемма 3.** *Если* $0 < \alpha \le \beta < \dfrac{1}{2}$, *то для любых* $(\xi,\eta) \in \bar{\Delta}$ *и* $n = 0,1,2,\ldots$ *выполняется неравенство*

$$0 \le F(a,1-\alpha;\beta+n;y_1) \le 1. \tag{23}$$

***Доказательство.*** Применяя формулу [14]

$$F(a,b;c;x) = (1-x)^{-b} F\left[c-a, b; c; \frac{x}{x-1}\right],$$

имеем

$$F(a, 1-\alpha; \beta+n; y_1) = (1-z)^{1-\alpha} F(\beta-\alpha+n, 1-\alpha; \beta+n; z), \tag{24}$$

где $z = (\xi - t)(\eta - t)/(\xi + t)(\eta + t)$, причем $0 \le z \le 1$.

Введем обозначение

$$f(z) = (1-z)^{1-\alpha} F(\beta-\alpha+n, 1-\alpha; \beta+n; z).$$

Учитывая неравенства $0 < \alpha \le \beta < \dfrac{1}{2}$, $0 \le z \le 1$ и разложение функции Гаусса в ряд, заключаем, что $f(z) \ge 0$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Далее, дифференцируя функцию $f(z)$ по формуле [14]

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^b F(a,b;c;x)\right] = \frac{b(a-c)}{c}\,(1-x)^{b-1} F(a, b+1; c+1; x),$$

получаем

$$f'(z) = -\frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta+n}\,(1-z)^{-\alpha} F(\beta-\alpha+n, 2-\alpha; \beta+n+1; z),$$

откуда следует, что $f'(z) \le 0$. Следовательно, $f(z)$ — невозрастающая функция. Тогда $0 \le \le f(z) \le f(0) = 1$ для любого $z \in [0,1]$. Отсюда и из (24) следует неравенство (23).

Лемма 3 доказана.

**Лемма 4.** *Если $0 < \alpha \le \beta < \dfrac{1}{2}$ и $\gamma \in R$, то для любых $(\xi, \eta) \in \bar{\Delta}$ имеет место неравенство*

$$|\Xi_2(\alpha, 1-\alpha; \beta; y_1, y_2)| \le \bar{I}_{\beta-1}\left[2\sqrt{|\gamma|(\xi-t)(\eta-t)}\right], \tag{25}$$

*где $\overline{I}_{\beta-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n [(\beta)_n n!]^{-1}$ — модифицированная функция Бесселя – Клиффорда.*

***Доказательство.*** Пусть $\gamma \ne 0$. Тогда нетрудно убедиться, что

$$\Xi_2(\alpha, 1-\alpha; \beta; y_1, y_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_2^n}{(\beta)_n n!}\, F(\alpha, 1-\alpha; \beta+n; y_1). \tag{26}$$

В силу леммы 3 выполняется неравенство (23). С учетом этого из (26) следует, что

$$|\Xi_2(\alpha, 1-\alpha; \beta; y_1, y_2)| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|y_2|^n}{(\beta)_n n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sqrt{|\gamma|(\xi-t)(\eta-t)}\right]^{2n} [(\beta)_n n!]^{-1} = \bar{I}_{\beta-1}\left[2\sqrt{|\gamma|(\xi-t)(\eta-t)}\right].$$

Выполнение неравенства (25) при $\gamma = 0$ непосредственно следует из равенства $\Xi_2(\alpha, 1- -\alpha; \beta, y_1, 0) = F(\alpha, 1-\alpha; \beta; y_1)$ и неравенства (23).

Лемма 4 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Согласно лемме 2, функция $I_1(\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению $L^{\gamma}_{\alpha,1-\beta}(u)=0$. Тогда в силу леммы 1 функция $I(\xi,\eta)$ является решением уравнения (1), т. е. $L^{\gamma}_{\alpha,\beta}(u)=0$.

Докажем равенство (10). Рассмотрим выражение

$$l_2=\lim_{\eta-\xi\to+0}I(\xi,\eta)=\lim_{\eta-\xi\to+0}\tilde{\chi}\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\times$$

$$\times\frac{(\eta-\xi)^{1-2\beta}\tau(t)}{[(\xi-t)(\eta-t)]^{1-\beta}}\Xi_2(\alpha,1-\alpha;\beta;y_1,y_2)dt.$$

Заменяя переменную интегрирования по формуле $t=\xi-(\eta-\xi)s$, получаем

$$l_2=\tilde{\chi}\lim_{\eta-\xi\to+0}\int\limits_0^{\xi/(\eta-\xi)}s^{\beta-1}(1+s)^{\beta-1}\tau[\xi-(\eta-\xi)s]\left[\frac{2\xi-2(\eta-\xi)s}{\xi+\eta}\right]^{\alpha}\times$$

$$\times\Xi_2\left[\alpha,1-\alpha;\beta;-\frac{2^{-1}(\eta-\xi)^2s(1+s)}{[\xi-(\eta-\xi)s](\xi+\eta)},-\gamma(\eta-\xi)^2s(1+s)\right]ds.$$

Отсюда, учитывая равенства

$$\lim_{\eta-\xi\to+0}\left[\frac{2\xi-2(\eta-\xi)s}{\xi+\eta}\right]^{\alpha}=1,\quad \lim_{\eta-\xi\to+0}\frac{2^{-1}(\eta-\xi)^2s(1+s)}{[\xi-(\eta-\xi)s](\xi+\eta)}=0,$$

$$\lim_{\eta-\xi\to+0}\gamma(\eta-\xi)^2s(1+s)=0,\quad \Xi_2(\alpha,1-\alpha;\beta;0,0)=1,$$

имеем

$$l_2=\tilde{\chi}\tau(\xi)\int\limits_0^{+\infty}s^{\beta-1}(1+s)^{\beta-1}ds,$$

откуда в силу равенства [16]

$$\int\limits_0^{+\infty}s^{\beta-1}(1+s)^{\beta-1}ds=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}$$

следует, что $l_2=\tau(\xi),\ 0\le\xi\le1$, т. е. $\lim_{\eta-\xi\to+0}I(\xi,\eta)=\tau(\xi),\ 0\le\xi\le1$.

Теперь докажем равенство (11). Заменяя переменную интегрирования по формуле $t=\xi z$, находим

$$I(\xi,\eta)=\tilde{\chi}\left(1-\frac{\xi}{\eta}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{2\xi}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\beta}\int\limits_0^1 z^{\alpha}(1-z)^{\beta-1}\times$$

$$\times\left(1-\frac{\xi}{\eta}z\right)^{\beta-1}\Xi_2(\alpha,1-\alpha,\beta;y_1,y_2)|_{t=\xi z}\,dz. \qquad (27)$$

Согласно лемме 4, выполняется неравенство

$$|\Xi_2(\alpha,1-\alpha,\beta;y_1,y_2)|_{t=\xi z} \le \bar{I}_{\beta-1}\left[2\sqrt{|\gamma|\xi(1-z)(\eta-\xi z)}\right],$$

откуда в силу равенства $\bar{I}_{\beta-1}(0)=1$ следует, что

$$\lim_{\xi\to 0}|\Xi_2(\alpha,1-\alpha;\beta;y_1,y_2)|_{t=\xi z}\le 1.$$

Учитывая это, из (27) при $\xi\to 0$ имеем $\lim_{\xi\to 0} I(\xi,\eta)=0,\ 0\le\eta\le 1,$ что и требовалось доказать.

Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** *Если $\psi_1(\eta)$ принадлежит $C^2[0,1]$, то функция*

$$\Phi(\xi,\eta)=\int\limits_0^\eta\left[\psi_1'(t)+(\alpha+\beta)t^{-1}\psi_1(t)\right]W(0,t;\xi,\eta;\gamma)dt$$

*имеет следующие свойства:*

1) $\Phi(\xi,\eta)$ *и ее производные представимы в виде*

$$\Phi(\xi,\eta)=\varphi(\xi)\int\limits_0^\eta\frac{W(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}ds-\int\limits_0^\xi\varphi'(t)dt\int\limits_0^t\frac{R_2(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}ds+$$

$$+\int\limits_\xi^\eta\varphi'(t)dt\int\limits_t^\eta\frac{R_1(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}ds, \tag{28}$$

$$\Phi_\xi(\xi,\eta)=-\varphi(\xi)\cos(\beta\pi)\xi^{\alpha+\beta-1}(\eta+\xi)^{-\alpha}(\eta-\xi)^{-\beta}+$$

$$+\varphi(\xi)\int\limits_0^\eta\frac{W_\xi(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}ds-\int\limits_0^\xi\varphi'(t)dt\int\limits_0^t\frac{R_{2\xi}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}ds+$$

$$+\int\limits_\xi^\eta\varphi'(t)dt\int\limits_t^\eta\frac{R_{1\xi}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}ds, \tag{29}$$

$$\Phi_\eta(\xi,\eta)=\varphi(\eta)\eta^{\alpha+\beta-1}(\eta+\xi)^{-\alpha}(\eta-\xi)^{-\beta}+$$

$$+\varphi(\xi)\int\limits_0^\eta\frac{W_\eta(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}ds-\int\limits_0^\xi\varphi'(t)dt\int\limits_0^t\frac{R_{2\eta}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}ds+$$

$$+\int\limits_\xi^\eta\varphi'(t)dt\int\limits_t^\eta\frac{R_{1\eta}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}ds, \tag{30}$$

*где* $\varphi(t)=t{\psi_1}'(t)+(\alpha+\beta)\psi_1(t)$;

2) $\Phi(\xi,\eta)$ *удовлетворяет уравнению* (1) *и краевым условиям*

$$\lim_{\eta-\xi\to+0}\Phi(\xi,\eta)=0,\quad 0\le\xi\le1, \tag{31}$$

$$\Phi(0,\eta)=\psi_1(\eta),\quad 0\le\eta\le1. \tag{32}$$

***Доказательство.*** Принимая во внимание процесс получения формулы (9) и обозначение $\varphi(t)$, функцию $\Phi(\xi,\eta)$ записываем в виде

$$\Phi(\xi,\eta)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\right)\varphi(t)t^{-1}W(0,t;\xi,\eta;\gamma)\,dt.$$

Отсюда, полагая $u=\varphi(t),\ dv=t^{-1}W(0,t,\xi,\eta;\gamma)dt$ и применяя правило интегрирования по частям, имеем

$$\Phi(\xi,\eta)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{[\varphi(\xi-\varepsilon)\mu_2(\xi-\varepsilon;\xi,\eta)-\varphi(\xi+\varepsilon)\mu_1(\xi+\varepsilon;\xi,\eta)]\;-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\varphi'(t)\mu_2(t,\xi,\eta)dt-\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\varphi'(t)\mu_1(t,\xi,\eta)dt\right\},$$

где

$$\mu_1(t,\xi,\eta)=-\int\limits_t^{\eta}s^{-1}R_1(0,s;\xi,\eta;\gamma)ds,\quad \mu_2(t,\xi,\eta)=\int\limits_0^{t}s^{-1}R_2(0,s;\xi,\eta;\gamma)ds.$$

Подставляя выражения функций $\mu_1(t,\xi,\eta)$ и $\mu_2(t,\xi,\eta)$, а затем переходя к пределу, получаем равенство (28).

Теперь равенство (28) запишем в виде

$$\Phi(\xi,\eta)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\varphi(\xi)\left(\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\right)s^{-1}W(0,s;\xi,\eta;\gamma)\,ds\;-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\varphi'(t)\,dt\int\limits_0^{t}\frac{R_2(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\varphi'(t)\,dt\int\limits_t^{\eta}\frac{R_1(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds\right]. \tag{33}$$

Дифференцируя это равенство по $\xi$, находим

$$\Phi_\xi(\xi,\eta)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\;\varphi(\xi)\left[s^{-1}W(0,s;\xi,\eta;\gamma)\right]\Big|_{s=\xi+\varepsilon}^{s=\xi-\varepsilon}\;+\right.$$

$$+\varphi'(\xi)\left(\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\right)\frac{W(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds+\varphi(\xi)\left(\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\right)\frac{W_\xi(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds-$$

$$-\varphi'(\xi-\varepsilon)\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\frac{R_2(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds\;-\varphi'(\xi+\varepsilon)\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\frac{R_1(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds-$$

$$\left.-\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\varphi'(t)dt\int\limits_0^{t}\frac{R_{2\xi}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\varphi'(t)dt\int\limits_t^{\eta}\frac{R_{1\xi}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds\right\}.$$

Отсюда, переходя к пределу, получаем

$$\Phi_\xi(\xi,\eta)=\varphi(\xi)\lim_{\varepsilon\to+0}\left[s^{-1}W(0,s;\xi,\eta;\gamma)\right]\Big|_{s=\xi+\varepsilon}^{s=\xi-\varepsilon}+$$

$$+\varphi(\xi)\int\limits_0^{\eta}\frac{W_\xi(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds-\int\limits_0^{\xi}\varphi'(t)dt\int\limits_0^{t}\frac{R_{2\xi}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds+$$

$$+\int\limits_\xi^{\eta}\varphi'(t)dt\int\limits_t^{\eta}\frac{R_{1\xi}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds. \tag{34}$$

Используя разложения (6) и (7) функций $R_1$ и $R_2$, а также формулу [14]

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\quad c-a-b>0,$$

$$F(a,b;c;1-x)=-\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\,F(a,b;1;x)lnx+\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{(k!)^2}\left[\frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)}-\frac{\Gamma'(a+k)}{\Gamma(a+k)}-\frac{\Gamma'(b+k)}{\Gamma(b+k)}\right]x^k,$$

нетрудно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{s^{-1}W(0,s,\xi,\eta;\gamma)\right\}\Big|_{s=\xi+\varepsilon}^{s=\xi-\varepsilon}=-\frac{\cos(\pi\beta)\xi^{\alpha+\beta-1}}{(\eta+\xi)^\alpha(\eta-\xi)^\beta}. \tag{35}$$

Подставляя (35) в (34), получаем равенство (29).

Далее, дифференцируя равенство (33) по $\eta$, находим

$$\Phi_\eta(\xi,\eta)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\varphi(\xi)\eta^{-1}R_1(0,\eta;\xi,\eta;\gamma)+\varphi(\xi)\left(\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\right)\frac{W_\eta(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds+\right.$$

$$+\eta^{-1}R_1(0,\eta;\xi,\eta;\gamma)[\varphi(\eta)-\varphi(\xi+\varepsilon)]-$$

$$-\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\varphi'(t)dt\int\limits_0^t \frac{R_{2\eta}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\varphi'(t)dt\int\limits_0^t \frac{R_{1\eta}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds\Bigg\}.$$

Отсюда, переходя к пределу и учитывая, что

$$\eta^{-1}R_1(0,\eta;\xi,\eta;\gamma)=\eta^{\alpha+\beta-1}(\eta+\xi)^{-\alpha}(\eta-\xi)^{-\beta},$$

получаем равенство (30).

Аналогично, дифференцируя равенство (30) по $\xi$, находим

$$\Phi_{\xi\eta}(\xi,\eta)=-\varphi(\eta)\eta^{\alpha+\beta-1}(\eta+\xi)^{-\alpha}(\eta-\xi)^{-\beta}\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to+0}\Bigg\{\varphi(\xi)\left[s^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}W(0,s;\xi,\eta;\gamma)\right]\Bigg|_{s=\xi+\varepsilon}^{s=\xi-\varepsilon}+$$

$$+\varphi'(\xi)\left(\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\right)\frac{W_{\eta}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds+\varphi(\xi)\left(\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\right)\frac{W_{\xi\eta}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds-$$

$$-\varphi'(\xi-\varepsilon)\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\frac{R_{2\eta}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds-\varphi'(\xi+\varepsilon)\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\frac{R_{1\eta}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds-$$

$$-\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\varphi'(t)dt\int\limits_0^t \frac{R_{2\xi\eta}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\varphi'(t)dt\int\limits_0^t \frac{R_{1\xi\eta}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds\Bigg\}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ и учитывая равенство (35), получаем

$$\Phi_{\xi\eta}(\xi,\eta)=-\frac{\varphi(\eta)\eta^{\alpha+\beta-1}}{(\eta+\xi)^{\alpha}(\eta-\xi)^{\beta}}\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)+$$

$$+\frac{\cos(\pi\beta)\varphi(\xi)\xi^{\alpha+\beta-1}}{(\eta+\xi)^{\alpha}(\eta-\xi)^{\beta}}\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)+\varphi(\xi)\int\limits_0^{\eta}\frac{W_{\xi\eta}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds-$$

$$-\int\limits_0^{\xi}\varphi'(t)dt\int\limits_0^t \frac{R_{2\xi\eta}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds+\int\limits_{\xi}^{\eta}\varphi'(t)dt\int\limits_0^t \frac{R_{1\xi\eta}(0,s;\xi,\eta;\gamma)}{s}\,ds. \tag{36}$$

Из (28) – (30) и (36) следует, что

$$L_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\Phi)=\varphi(\xi)\int\limits_0^{\eta}\frac{L_{\alpha,\beta}^{\gamma}[W(0,s;\xi,\eta;\gamma)]}{s}\,ds-$$

$$-\int\limits_0^{\xi}\varphi'(t)dt\int\limits_0^t \frac{L_{\alpha,\beta}^{\gamma}[R_2(0,s;\xi,\eta;\gamma)]}{s}\,ds+\int\limits_{\xi}^{\eta}\varphi'(t)dt\int\limits_t^{\eta}\frac{L_{\alpha,\beta}^{\gamma}[R_1(0,s;\xi,\eta;\gamma)]}{s}\,ds,$$

откуда в силу свойств функций $W$ и $R_1,\ R_2$ следует, что $L^{\gamma}_{\alpha,\beta}(\Phi)\equiv 0$, т. е. функция $\Phi(\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению (1).

Теперь докажем равенство (31). Из равенства (28) следует, что

$$\lim_{\eta-\xi\to+0}\Phi(\xi,\eta)=\varphi(\xi)\int\limits_0^{\xi}s^{-1}\lim_{\eta-\xi\to+0}R_2(0,s;\xi,\eta;\gamma)ds-$$

$$-\int\limits_0^{\xi}\varphi'(t)dt\int\limits_0^{t}s^{-1}\lim_{\eta-\xi\to0}R_2(0,s;\xi,\eta;\gamma)ds.$$

Отсюда в силу легко проверяемого равенства

$$\lim_{\eta-\xi\to+0}R_2(0,s;\xi,\eta;\gamma)=0$$

следует справедливость равенства (31).

Докажем равенство (32). В силу $\sigma_0=(\eta/\eta_0)^{\alpha+\beta}$, $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=0$ при $\xi=\xi_0=0$ из (5) и (6) следует, что $W(0,t;0,\eta;\gamma)=(t/\eta)^{\alpha+\beta}$. Учитывая это и очевидное равенство

$$\left[\psi_1'(t)+(\alpha+\beta)t^{-1}\psi_1(t)\right]t^{\alpha+\beta}=\left[t^{\alpha+\beta}\psi_1(t)\right]',$$

получаем

$$\Phi(0,\eta)=\int\limits_0^{\eta}\left[\psi_1'(t)+(\alpha+\beta)t^{-1}\psi_1(t)\right]W(0,t;0,\eta;\gamma)dt=$$

$$=\int\limits_0^{\eta}\left[\psi_1'(t)+(\alpha+\beta)t^{-1}\psi_1(t)\right](t/\eta)^{\alpha+\beta}dt=\psi_1(\eta),\quad 0\le\eta\le1.$$

Теорема 2 доказана.

На основании доказанного выше справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** *Если* $\tau(\xi)$ *принадлежит* $C[0,1]$ *и удовлетворяет условию Гельдера с показателем* $\delta>1-\beta$ *на* $[0,1)$, *а* $\psi_1(\eta)$ *принадлежит* $C^2[0,1]$, *то функция, определяемая равенством* (9), *является единственным решением задачи Дарбу* $\{$(1), (2), (3)$\}$.

Теперь рассмотрим задачу Дарбу для уравнения (1) в следующей постановке: найти регулярное в области $\Delta$ решение $u(\xi,\eta)\in C(\bar{\Delta})$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2) и

$$u(\xi,1)=\psi_2(\xi),\quad 0\le\xi\le1, \tag{37}$$

где $\tau(\xi)$ и $\psi_2(\xi)$ — заданные непрерывные функции, причем $\tau(1)=\psi_2(1)$.

Функция Римана – Адамара $\tilde{W}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)$ для этой задачи определяется равенством

$$\tilde{W}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)=\begin{cases}R_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma) & \text{при}\quad \xi<\eta_0,\\ R_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma) & \text{при}\quad \xi>\eta_0,\end{cases}$$

где $R_1$ и $R_2$ — функции, определяемые равенствами (6) и (7).

Функция $\tilde{W}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)$ имеет свойства $1^0-4^0$ функции $W(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)$ и свойство

$5^0{}'$) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left\{\left[\tilde{W}_\eta-\left(\dfrac{\alpha}{\eta+\xi}+\dfrac{\beta}{\eta-\xi}\right)\tilde{W}\right]\Bigg|_{\xi=\eta_0+\varepsilon}-\left[\tilde{W}_\eta-\left(\dfrac{\alpha}{\eta+\xi}+\dfrac{\beta}{\eta-\xi}\right)\tilde{W}\right]\Bigg|_{\xi=\eta_0-\varepsilon}\right\}=$ $=0$, $\varepsilon>0$.

Методом, примененным выше, можно доказать, что справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.** *Если* $\tau(\xi)$ *принадлежит* $C[0,1]$ *и удовлетворяет условию Гельдера с показателем* $\delta>1-\beta$ *на* $(0,1]$, *а* $\psi_2(\xi)$ *принадлежит* $C^2[0,1]$, *то функция, определяемая формулой*

$$u(\xi_0,\eta_0)=(1-2\beta)\chi(\eta_0-\xi_0)^{1-2\beta}\times$$

$$\times\int\limits_{\eta_0}^{1}\left(\frac{2\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^{\alpha}\frac{\tau(\xi)}{[(\xi_0-\xi)(\eta_0-\xi)]^{1-\beta}}\,\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;\beta;\sigma_1,\sigma_3\right)\big|_{\eta=\xi}\,d\xi-$$

$$-\int\limits_{\xi_0}^{1}\left[\psi_2'(\xi)+\left(\frac{\alpha}{1+\xi}-\frac{\beta}{1-\xi}\right)\psi_2(\xi)\right]\tilde{W}(\xi,1;\xi_0,\eta_0;\gamma)d\xi,$$

*является единственным решением задачи* $\{$(1), (3), (37)$\}$.

## Литература


1. *Эйлер Л.* Интегральное исчисление. – М.: Физматгиз, 1958. – Т. 3.
2. *Darbux G.* Lecons sur la theorie generale des surfaces. – Paris, 1915. – **IV**.
3. *Poisson S. D.* Memoire sur l'integration des equations lineaires aux derivees partieeles // J. l'Ecole Roy. Polytechnique. – 1823. – **12**, № 19. – P. 215 – 248.
4. *Риман Б.* О распространении волн конечной амплитуды. Сочинения. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
5. *Gellerstedt S.* Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de tipe mixte: Thesis. – Uppsala, 1935.
6. *Волкодавов В. Ф., Николаев Н. Я.* Краевые задачи для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу. – Куйбышев, 1984. – 80 с.
7. *Хайруллин Р. С.* К теории уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 11(378). – С. 69 – 76.
8. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* К спектральной теории уравнений смешанного типа. – Ташкент, 2010. – 355 с.
9. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
10. *Уринов А. К., Исмоилов А. И.* Задача Дарбу и принцип абсолютного экстремума для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу // Докл. АН Республики Узбекистан. – 2011. – № 5. – С. 20 – 23.
11. *Сабитов К. Б., Шарафутдинова Г. Г.* Задача Коши – Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 5. – С. 21 – 29.
12. *Капилевич М. Б.* О сингулярных задачах Коши и Трикоми // Докл. АН СССР. – 1967. – **177**, № 6. – С. 1265 – 1268.
13. *Капилевич М. Б.* Об одном классе гипергеометрических функций Горна // Дифференц. уравнения. – 1968. – **4**, № 8. – С. 1465 – 1483.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1965. – 296 с.
15. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.
16. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.


Получено 16.03.16