УДК 519.21

Я. А. Кореновская (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СВОЙСТВА СИЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПОСТРОЕННЫХ ПО ПОТОКУ АРРАТЬЯ

We study the properties of strong random operators T_t in $L_2(\mathbb{R})$ used to describe the shifts of the functions along an Arratia flow. We prove the formula of change of variables for the Arratia flow. As a consequence of this formula, we establish sufficient conditions for compact sets $K \subset L_2(\mathbb{R})$ under which T_t has a continuous modification on K. We also present necessary and sufficient conditions for the convergent sequences in $L_2(\mathbb{R})$ under which the operator T_t preserves their convergence.

Вивчаються властивості сильних випадкових операторів T_t у $L_2(\mathbb{R})$, що описують зсуви функцій уздовж потоку Арратья. Доведено формулу заміни змінних для потоку Арратья. Як наслідок отримано достатні умови на компактні множини $K \subset L_2(\mathbb{R})$, на яких T_t має неперервну модифікацію. Наведено необхідні та достатні умови на збіжні послідовності у $L_2(\mathbb{R})$, за яких оператор T_t зберігає їх збіжність.

1. Введение. В данной статье рассматриваются случайные операторы в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, описывающие сдвиги функций вдоль потока Арратья [1].

Определение 1 [1]. *Потоком Арратья называется набор случайных процессов* $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$, *которые удовлетворяют следующим свойствам*:

1) *для любого* $u \in \mathbb{R}$ $x(u,\cdot)$ — *винеровский процесс относительно общей фильтрации, стартующий из точки* u;

2) *для произвольных* $u_1 \leq u_2$ *и* $t \geq 0$

$$x(u_1,t) \leq x(u_2,t) \quad \text{п. н.};$$

3) *для любых* $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$

$$d\langle x(u_1,\cdot), x(u_2,\cdot)\rangle_t = \mathbb{1}\{x(u_1,t) = x(u_2,t)\}dt.$$

Таким образом, поток Арратья — это семейство независимых до момента встречи винеровских процессов, которые стартуют из каждой точки действительной прямой, а в момент встречи склеиваются и дальше движутся вместе.

Впервые поток Арратья был введен в работе [1], где он строился как слабый предел шкалированных случайных блужданий со склеиванием. В дальнейшем в работах [2, 3] было доказано, что под действием потока Арратья образ любого интервала конечен. А именно, для любого $t > 0$ и произвольного $C > 0$

$$\mathrm{P}\left\{x([-C;C],t)\,\text{конечно}\right\} = 1. \tag{1}$$

Поскольку поток Арратья имеет непрерывную справа модификацию, как случайный процесс, заданный на $\mathbb{R}$ и принимающий значения в $C([0;1])$ [4], то в силу (1) и того, что $x(\cdot,t)$ — монотонно неубывающая функция, $x(\cdot,t)$ — ступенчатая функция. Тем самым в отличие от стохастических потоков, порожденных стохастическими дифференциальными уравнениями с гладкими коэффициентами [5], отображение $x(\cdot,t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не является диффеоморфизмом. Таким образом, для изучения геометрических свойств потока Арратья и стохастических потоков со склеиванием методы дифференциальной геометрии не подходят. Именно это обстоятельство привело к тому, что в [6, 7] было предложено изучать изменение геометрических свойств компактных множеств под действием случайных отображений, описывающих сдвиги функций вдоль стохастических потоков.

В данной статье будут изучаться случайные операторы $\{T_t\}_{t>0}$, которые задаются с помощью потока Арратья $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$ следующим образом: для фиксированного $t > 0$ и произвольных $f \in L_2(\mathbb{R}),\ u \in \mathbb{R}$

$$(T_t f)(u) = f(x(u,t)).$$

Отметим, что случайный оператор T_t является сильным случайным оператором (ССО) в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ [8] в смысле определения, предложенного А. В. Скороходом [9]. Напомним определение ССО.

Определение 2 [9]. *Оператор A, действующий из сепарабельного гильбертова пространства H во множество H-значных случайных элементов, называется ССО в H, если*:

1) *для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $f, g \in H$*

$$\mathrm{P}\left\{A(\alpha f + \beta g) = \alpha A f + \beta A g\right\} = 1;$$

2) *для произвольного $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{f_n \to f} \mathrm{P}\left\{\|Af_n - Af\|_H > \varepsilon\right\} = 0.$$

В качестве примера такого объекта в [9] рассматривался интеграл Ито от функций из пространства $L_2([0;1])$:

$$(A_1 f)(r) = \int\limits_0^r f(s)dw(s),$$

где $r \in [0;1],\ f \in L_2([0;1]),\ \big\{w(s),\ s \in [0;1]\big\}$ — винеровский процесс.

В дальнейшем в работе [10] более подробно изучался класс сильных случайных операторов, обладающих тем свойством, что под действием ССО образ любого элемента $f \in H$ имеет гауссовское распределение в H. Такие операторы называются гауссовскими сильными случайными операторами (ГССО) [10].

Примером ГССО в сепарабельном гильбертовом пространстве H является оператор A_2, который задается следующим образом:

$$A_2 f = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (f, e_n) e_n, \quad f \in H,$$

где $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H, $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины.

В [7] было показано, что не для любого компактного множества $K \subset H$ можно корректно определить образ $A_2(K)$. Причина этого заключается в том, что A_2 не является ограниченным ССО [6].

Определение 3 [6, 9]. *ССО A в сепарабельном гильбертовом пространстве H называется ограниченным, если существует семейство $\{\widetilde{A}_\omega,\ \omega \in \Omega\}$ детерминированных линейных ограниченных операторов в H такое, что для любого $f \in H$*

$$(Af)_\omega = \widetilde{A}_\omega f \quad \textit{п. н.}$$

Для оператора T_t имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого $t > 0$ T_t не является ограниченным ССО в $L_2(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $t > 0$ и предположим, что существует семейство $\{\widetilde{T}_{t,\omega},\ \omega \in \Omega\}$ линейных ограниченных операторов в $L_2(\mathbb{R})$ такое, что для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ существует множество Ω_f полной вероятности, на котором

$$(T_t f)_\omega = \widetilde{T}_{t,\omega} f.$$

Поскольку $\widetilde{T}_{t,\omega}$ — линейный ограниченный оператор в $L_2(\mathbb{R})$, то на множестве $\widetilde{\Omega} := := \cap_{r_1,r_2\in\mathbb{Q}}\Omega_{\mathbb{1}_{[r_1;r_2]}}$ полной вероятности

$$\sup_{\{(p,r)\in\mathbb{Q}^2 \,:\, r<p\ ,\ p-r<\delta\}} \|\widetilde{T}_{t,\omega}\mathbb{1}_{[r;p]}\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{2}$$

В силу вышеупомянутых свойств потока Арратья существует Ω' такое, что $P(\Omega') = 1$ и для каждого $\omega \in \Omega'$ найдется $y_\omega \in \mathbb{R}$, для которого

$$\lambda\{u \in [0;1] : x(u,t,\omega) = y_\omega\} > 0,$$

где λ — мера Лебега на $\mathbb{R}$.

Таким образом, для произвольных $\omega \in \Omega' \cap \widetilde{\Omega}$ и $\delta > 0$

$$\sup_{\{(p,r)\in\mathbb{Q}^2 \,:\, r<p,\ p-r<\delta\}} \|\widetilde{T}_{t,\omega}\mathbb{1}_{[r;p]}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \geq$$

$$\geq \sup_{\{(p,r)\in\mathbb{Q}^2 \,:\, r<p,\ p-r<\delta,\ y_\omega\in[r;p]\}} \|\widetilde{T}_{t,\omega}\mathbb{1}_{[r;p]}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \geq$$

$$\geq \sup_{\{(p,r)\in\mathbb{Q}^2 \,:\, r<p,\ p-r<\delta,\ y_\omega\in[r;p]\}} \int_0^1 \mathbb{1}_{[r;p]}(x(u,t,\omega))du \geq$$

$$\geq \lambda\big\{u \in [0;1] : x(u,t,\omega) = y_\omega\big\} > 0.$$

Поскольку для $\omega \in \Omega' \cap \widetilde{\Omega}$ и $\delta > 0$

$$\sup_{\{(p,r)\in\mathbb{Q}^2 \,:\, r<p,\ p-r<\delta\}} \|\widetilde{T}_{t,\omega}\mathbb{1}_{[r;p]}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \geq \lambda\big\{u \in [0;1] : x(u,t,\omega) = y_\omega\big\},$$

то получено противоречие с (2), что и доказывает теорему.

Из приведенной теоремы следует, что для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ найдется множество Ω_f, $\mathrm{P}(\Omega_f) = 1$, на котором $T_t f(\omega) \in L_2(\mathbb{R})$. Однако не для каждого компакта $K \subset L_2(\mathbb{R})$ существует образ $T_t(K)$, так как множество $\bigcap_{f\in K} \Omega_f$ не обязательно должно быть множеством полной вероятности. Таким образом, чтобы изучать образы $T_t(K)$, нужно гарантировать их существование. Цель данной статьи — найти условия на компакты $K \subset L_2(\mathbb{R})$, при которых $T_t(K)$ существует и является компактом. Условия на семейство функций, на котором T_t ограничен, приведены в пункте 3. Чтобы их получить, используется формула замены переменных под действием отображения $x(\cdot,t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, доказанная в пункте 2. В пункте 4 приведен пример класса компактных множеств, которые T_t переводит в компакты. Последняя часть статьи посвящена исследованию образов сходящихся в $L_2(\mathbb{R})$ последовательностей функций. А именно, доказаны необходимое и достаточное условия сохранения сходимости при действии оператора T_t.

2. Формула замены переменных при отображении $x(\cdot,t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Наряду с потоком Арратья $\{x(u,s), u \in \mathbb{R}, s \in [0;t]\}$ рассмотрим двойственный к нему поток Арратья $\{y(u,s), u \in \mathbb{R}, s \in [0;t]\}$, движущийся в обратном времени и такой, что его траектории не пересекаются с траекториями потока $\{x(u,s), u \in \mathbb{R}, s \in [0;t]\}$.

В [1] доказано, что поток Арратья и двойственный к нему существуют как слабые пределы шкалированных случайных блужданий в прямом и обратном времени, траектории которых не пересекаются. Позже была предложена формула для представления двойственного потока Арратья, в которой используется такой объект, как броуновская сеть [11]. Приведем соответствующие определения.

Пусть $\{w_j, j = \overline{1,n}\}$ — независимые винеровские процессы, $w(u_j,\cdot)$ — винеровский процесс, стартующий из точки $u_j \in \mathbb{R}$ в момент времени $t_j > 0$,

$$w(u_j,t) = u_j + w_j(t - t_j), \qquad t \ge t_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Положим $\widetilde{w}(u_1,\cdot) = w(u_1,\cdot)$ и для каждого $j = \overline{2,n}$

$$\widetilde{w}(u_j,t) = w(u_j,t)\mathbb{1}\{t_j \le t < \tau_{j_*,j}\} + \widetilde{w}(u_{j_*},t)\mathbb{1}\{t \ge \tau_{j_*,j}\},$$

где $\tau_{k,j} = \inf\{s > 0 \mid w(u_j,s) = \widetilde{w}(u_k,s)\}$ — момент первой встречи $w(u_j,\cdot)$ и $\widetilde{w}(u_k,\cdot), k = \overline{1,j-1}$, и номер j_* такой, что $\tau_{j_*,j} = \min_{k=\overline{1,j-1}} \tau_{k,j}$.

Определение 4 [12]. *Набор $\{\widetilde{w}(u_j,\cdot),\ j = \overline{1,n}\}$ называется семейством склеивающихся винеровских процессов, стартующих из точек $u_1,\ldots,u_n \in \mathbb{R}$ в моменты времени $t_1,\ldots,t_n \in \mathbb{R}_+$ соответственно.*

Определение 5 [12]. *Броуновской сетью называется семейство $\{x_r(u,t), u \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}, t \ge r\}$ склеивающихся винеровских процессов, стартующих из каждой точки в каждый момент времени.*

Термин „броуновская сеть” был введен в [11], но сам объект изучался ранее в [12, 13].

Рассмотрим броуновскую сеть $\{x_r(u,t), u \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}, t \ge r\}$. Для фиксированного $t > 0$ зададим двойственный поток к потоку Арратья $\{x_0(u,s), u \in \mathbb{R}, s \in [0;t]\}$ следующим образом: для любого $s \in [0;t]$

$$y(u,t-s) = \inf\{x_r(v,s)\colon x_r(v,t) > u, \text{ где } v \in \mathbb{Q},\ r \in \mathbb{Q} \cap [0;t]\} \quad \text{п. н.} \tag{3}$$

Можно проверить, что y — поток Арратья в обратном времени.

***Замечание* 1.** Заметим, что траектории x и y не пересекаются, тем самым

$$\mathrm{P}\{x(\mathbb{R},t) \cap (a;b) \ne \varnothing\} = \mathrm{P}\{y(a,t) \ne y(b,t)\}. \tag{4}$$

***Замечание* 2.** Поскольку для любого $t > 0$ $y(\cdot, t)$ — монотонно неубывающая непрерывная справа функция [4], то можно рассматривать меру Лебега–Стилтьеса ν_t, построенную по $y(\cdot, t)$. Интеграл Лебега по мере ν_t обозначаем через $\int_{\mathbb{R}} f(u)dy(u,t)$.

В следующей теореме предполагается, что x и двойственный к нему поток y такие, как описано выше.

Теорема 2. *Пусть $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неотрицательная измеримая функция, $\int_{\mathbb{R}} h(u)du < +\infty$. Тогда для любого $t > 0$ с вероятностью 1 существует интеграл $\int_{\mathbb{R}} h(x(u,t))du$ и справедливо равенство*

$$\int_{\mathbb{R}} h(x(u,t))du = \int_{\mathbb{R}} h(u)dy(u,t) \quad \textit{п. н.} \tag{5}$$

Доказательство. В [8] доказано, что для неотрицательной функции $h \in L_1(\mathbb{R})$ и произвольного $t > 0$

$$\mathrm{E}\int_{\mathbb{R}} h(x(u,t))du = \int_{\mathbb{R}} h(u)du.$$

Следовательно, с вероятностью 1 существует интеграл $\int_{\mathbb{R}} h(x(u,t))du$.

В силу теоремы о замене переменной в интеграле Лебега для доказательства (5) достаточно показать, что для любого $t > 0$

$$\nu_t = \lambda \circ x(\cdot, t)^{-1} \text{ п. н.}$$

Из (3) следует, что для произвольных $t > 0$ и $u \in \mathbb{R}$

$$y(u,t) = \inf\{v \in \mathbb{Q}\colon x(v,t) > u\} \quad \text{п. н.}$$

Тогда для каждого $b \in \mathbb{R}$ и $v' := \inf\{v \in \mathbb{Q}\colon x(v,t) > b\}$ существует множество Ω_b полной вероятности такое, что для любого $\omega \in \Omega_b$ и произвольной последовательности рациональных чисел $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящейся к $v'(\omega)$ слева, имеет место $x(v_n, t, \omega) \le b$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Таким образом,

$$v'(\omega) = \sup\{v \in \mathbb{Q}\colon x(v,t,\omega) \le b\}.$$

Следовательно, для всех $a, b \in \mathbb{R}$ существует множество $\Omega_{a,b} := \Omega_a \cap \Omega_b$ с $\mathrm{P}(\Omega_{a,b}) = 1$, на котором

$$y(b,t) - y(a,t) = \sup\big\{v \in \mathbb{Q}\colon x(v,t) \le b\big\} -$$

$$- \sup\big\{v \in \mathbb{Q}\colon x(v,t) \le a\big\} = \lambda\big\{u \in \mathbb{R}\colon x(u,t) \in (a;b]\big\}.$$

В силу последнего равенства для каждого множества Δ вида

$$\Delta = \cup_{k=1}^{n}(a_k; b_k], \quad \text{где} \quad (a_k;b_k] \cap (a_j;b_j] = \varnothing \quad \text{при} \quad k \ne j, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

на $\Omega_\Delta := \cap_{k=1}^{n}\Omega_{a_k,b_k}$ с $\mathrm{P}(\Omega_\Delta) = 1$

$$\nu_t(\Delta) = \sum_{k=1}^{n}(y(b_k,t) - y(a_k,t)) = \lambda\{u \in \mathbb{R}\colon x(u,t) \in \Delta\}.$$

Докажем, что с вероятностью 1 меры ν_t и $\lambda\circ x(\cdot,t)^{-1}$ совпадают на кольце $\mathcal{A}$, порожденном множествами вида (6).

Рассмотрим множества $\widetilde{\Omega}$, Ω'_x, Ω'_y:

$$\widetilde{\Omega} := \cap_{r_1,r_1\in\mathbb{Q}}\Omega_{r_1,r_2},$$

$$\Omega'_x := \{\omega\in\Omega\colon x(\cdot,t) \text{ монотонно не убывает и непрерывна справа}\},$$

$$\Omega'_y := \{\omega\in\Omega\colon y(\cdot,t) \text{ монотонно не убывает и непрерывна справа}\}.$$

Тогда для произвольных $r\in\mathbb{Q},\ p\in\mathbb{R},\ \omega\in\widetilde{\Omega}\cap\Omega'_x\cap\Omega'_y$ и последовательности $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{Q}$ такой, что $r_n\to p+0,\ n\to\infty$, в силу непрерывности справа функции $y(\cdot,t,\omega)$

$$\nu_t\big((r;p],\omega\big) = \lim_{n\to\infty}\nu_t\big((r;r_n],\omega\big) = \lim_{n\to\infty}\lambda\big\{u\in\mathbb{R}\colon x(u,t,\omega)\in(r;r_n]\big\} =$$

$$= \lambda\big\{u\in\mathbb{R}\colon x(u,t,\omega)\in(r;p]\big\}. \tag{7}$$

Аналогично, для произвольных $q\in\mathbb{Q},\ v\in\mathbb{R},\ \omega\in\widetilde{\Omega}\cap\Omega'_x\cap\Omega'_y$

$$\nu_t\big((v;q],\omega\big) = \lambda\big\{u\in\mathbb{R}\colon x(u,t,\omega)\in(v;q]\big\}. \tag{8}$$

Поскольку для любых $a,b\in\mathbb{R}$ существует такое $q\in\mathbb{Q}$, что $(a;b]=(a;q]\cup(q;b]$, то из (7), (8) следует, что для любого $\omega\in\widetilde{\Omega}\cap\Omega'_x\cap\Omega'_y$

$$\nu_t\big((a;b],\omega\big) = \lambda\big\{u\in\mathbb{R}\colon x(u,t,\omega)\in(a;b]\big\}.$$

Таким образом, на множестве полной вероятности $\widetilde{\Omega}\cap\Omega'_x\cap\Omega'_y$

$$\nu_t(\Delta) = \lambda\circ x(\cdot,t)^{-1}(\Delta)\quad\forall\Delta\in\mathcal{A}.$$

Поскольку для каждого $\omega\in\widetilde{\Omega}\cap\Omega'_x\cap\Omega'_y$ меры $\nu_t(\cdot,\omega)$ и $\lambda\circ x(\cdot,t,\omega)^{-1}(\cdot)$ совпадают на кольце $\mathcal{A}$, то в силу теоремы Каратеодори [14] они совпадают и на σ-алгебре $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Следовательно,

$$\mathrm{P}\left\{\nu_t(\Delta) = \lambda\circ x(\cdot,t,\omega)^{-1}(\Delta)\ \forall\Delta\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\right\} = 1, \tag{9}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2 доказана.

3. Существование образа семейства функций под действием оператора T_t. Рассмотрим пространство Соболева $W_2^1(\mathbb{R})$ [15].

Теорема 3. *Пусть семейство функций $\Phi\subset W_2^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{f\in\Phi}\|f'\|_{L_2(\mathbb{R},(|u|+1)^3du)} < +\infty. \tag{10}$$

Тогда для любого $t>0$

$$\mathrm{P}\left\{\exists C_\omega>0\ \ \forall f\in\Phi\colon \|T_tf\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega)\le C_\omega\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}\right\} = 1. \tag{11}$$

Доказательство. Из условия (10) следует, что для каждой функции $f \in \Phi$ справедливо соотношение

$$\lim_{C\to+\infty} \int\limits_C^{+\infty} (f'(u))^2 (u+1)^3 du = 0.$$

Тогда для произвольного $\beta \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$ имеет место сходимость

$$\lim_{C\to+\infty} C^\beta \int\limits_C^{+\infty} (f'(u))^2 (u+1)^{3-\beta} du = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим класс эквивалентности $f \in \Phi$ и зафиксируем произвольную функцию $\widetilde{f} \in f$. Поскольку $\int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}^2(u)du < +\infty$, то существует такая последовательность $\{v_n\}_{n=1}^\infty$, что $v_n \to \to +\infty$ и $\widetilde{f}(v_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Для каждого $u \in \mathbb{R}_+$ выберем номер $n(u)$ так, чтобы $\lim_{u\to+\infty} u^{\frac{1}{2}} \widetilde{f}(v_{n(u)}) = 0$. В силу (12) справедливы соотношения

$$\left|u^{\frac{1}{2}}(\widetilde{f}(u) - \widetilde{f}(v_{n(u)}))\right| \le u^{\frac{1}{2}} \int\limits_u^{v_{n(u)}} |f'(s)| ds \le$$

$$\le u^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_u^{v_{n(u)}} (f'(s))^2 (s+1)^{3-\beta} ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_u^{v_{n(u)}} \frac{ds}{(s+1)^{3-\beta}} \right)^{\frac{1}{2}} \le C_\beta u^{\frac{1-\beta}{2}},$$

где $C_\beta = \left(\int_1^{+\infty} \frac{ds}{(s+1)^{3-\beta}}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ для $\beta \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$. Следовательно, имеет место сходимость $\lim_{u\to+\infty} u^{\frac{1}{2}} |\widetilde{f}(u)| = 0$. Аналогично доказывается, что $\lim_{u\to-\infty} (-u)^{\frac{1}{2}} |\widetilde{f}(u)| = 0$. Таким образом, если выполнено условие (10), то для любого класса эквивалентности $f \in \Phi$ и для каждой функции $\widetilde{f} \in f$

$$\lim_{|u|\to+\infty} |u|^{\frac{1}{2}} |\widetilde{f}(u)| = 0. \tag{13}$$

В силу последнего соотношения и формулы замены переменной для потока Арратья для произвольной функции $f \in \Phi$ и фиксированного $t > 0$ справедливы равенства

$$\|T_t f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} f^2(x(u,t)) du = \int\limits_{\mathbb{R}} f^2(u) dy(u,t).$$

Поскольку

$$\lim_{|u|\to+\infty} \frac{|y(u,t)|}{|u|} = 1 \quad \text{п. н.}, \tag{14}$$

то для любого $\omega \in \Omega' := \left\{\omega' \in \Omega \colon \lim_{|u|\to+\infty} \frac{|y(u,t,\omega')|}{|u|} = 1\right\}$ в силу (13)

$$\lim_{|u|\to+\infty} f^2(u) |y(u,t,\omega)| = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f^2(u)dy(u,t) = -2\int\limits_{\mathbb{R}} f(u)f'(u)y(u,t)du \quad \text{п. н.}$$

Поскольку выполнено (14), то для каждого $\omega \in \Omega'$ существует такое $\widetilde{C}_\omega > 0$, что

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \frac{|y(u,t,\omega)|}{(|u|+1)^{\frac{3}{2}}} \le \widetilde{C}_\omega$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f(u)f'(u)y(u,t,\omega)|du \le \widetilde{C}_\omega \int\limits_{\mathbb{R}} (|u|+1)^{\frac{3}{2}}|f(u)f'(u)|du.$$

Из условия (10) и неравенства Гельдера следует, что на множестве Ω' для каждой $f \in \Phi$ выполнено неравенство

$$\|T_t f\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) \le C_\omega \|f\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где $C_\omega = \widetilde{C}_\omega \sup_{f\in\Phi} \|f'\|_{L_2(\mathbb{R},(|u|+1)^3du)}$.

Теорема 3 доказана.

4. Существование непрерывной модификации оператора $\boldsymbol{T_t}$ на подмножествах $\boldsymbol{L_2}(\mathbb{R})$. Найдем условия на множество $K \subset L_2(\mathbb{R})$, при которых T_t имеет непрерывную модификацию на K.

Теорема 4. *Пусть $K \subseteq W_2^1(\mathbb{R})$ — такое множество в $L_2(\mathbb{R})$, что*

$$\sup_{f,g\in K} \int\limits_{\mathbb{R}} (f'(u)-g'(u))^2(|u|+1)^3du < \infty. \tag{15}$$

Тогда для любого $t > 0$ T_t на K имеет непрерывную модификацию.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $t > 0$. Поскольку T_t — ССО в $L_2(\mathbb{R})$, то для любых $f, g \in L_2(\mathbb{R}),\ \alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ существует такое множество $\Omega_{f,g,\alpha,\beta}$, что $\mathrm{P}(\Omega_{f,g,\alpha,\beta}) = 1$ и для каждого $\omega \in \Omega_{f,g,\alpha,\beta}$ имеет место равенство

$$\big(T_t(\alpha f + \beta g)\big)(\omega) = \alpha(T_t f)(\omega) + \beta(T_t g)(\omega).$$

Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — счетное всюду плотное в K множество. Положим

$$\widetilde{\Omega} := \bigcap_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}^2} \; \bigcap_{f,g\in\{f_n\}_{n=1}^\infty} \Omega_{f,g,\alpha,\beta}.$$

Поскольку для любого $f \in K$ существует такая подпоследовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, что $f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{L_2(\mathbb{R})} f$, то в силу (15) и теоремы 3

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{k\to\infty} \|T_t(f_{n_k} - f)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0\right\} = 1.$$

Таким образом, на множестве $\widetilde{\Omega}$ существует предел $\lim_{k\to\infty}(T_t f_{n_k})(\omega)$, который не зависит от выбора подпоследовательности. Действительно, пусть $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty, \{f_{m_k}\}_{k=1}^\infty$ — различные последовательности, сходящиеся к функции f. Тогда в силу (15) и теоремы 3

$$\|(T_t f_{n_k})(\omega) - (T_t f_{m_k})(\omega)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C_\omega \|f_{n_k} - f_{m_k}\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Следовательно, $\lim_{k\to\infty}(T_t f_{n_k})(\omega) = \lim_{k\to\infty}(T_t f_{m_k})(\omega)$.

Зададим на $\widetilde{\Omega}$ оператор $\widetilde{T_t}$ следующим образом:

$$(\widetilde{T}_t f)(\omega) = \lim_{k\to\infty}(T_t f_{n_k})(\omega), \quad \text{если} \quad f \in K.$$

Тогда $\widetilde{T}_t$ — модификация T_t на K. Чтобы это показать, рассмотрим произвольную функцию $f \in K$ и множество $\widetilde{\Omega}_f := \cap_{n=1}^{\infty}\Omega_{f,f_n,1,-1}$, $\mathrm{P}(\widetilde{\Omega}_f) = 1$. В силу (15) и теоремы 3 существует такое Ω'_f, $\mathrm{P}(\Omega'_f) = 1$, что для каждого $\omega \in \Omega'_f$ выполнено неравенство

$$\|T_t(f - f_n)\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) \leq C_\omega \|f - f_n\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где константа $C_\omega > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Для сходящейся последовательности $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $f_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{L_2(\mathbb{R})} f$, на множестве $\Omega_f := \widetilde{\Omega}_f \cap \Omega'_f$ имеют место соотношения

$$\|T_t f - T_t f_{n_k}\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) = \|T_t(f - f_{n_k})\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) \leq C_\omega \|f - f_{n_k}\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Следовательно, для произвольного $\omega \in \Omega_f$ справедливо

$$(T_t f)(\omega) = \lim_{k\to\infty}(T_t f_{n_k})(\omega),$$

что влечет равенство $T_t f$ и $\widetilde{T}_t f$ на множестве Ω_f, $\mathrm{P}(\Omega_f) = 1$. Таким образом, для любой функции $f \in K$

$$\mathrm{P}\{T_t f = \widetilde{T}_t f\} = 1.$$

Заметим, что для каждого $\omega \in \widetilde{\Omega}$ и произвольных $n, m \in \mathbb{N}$ имеют место соотношения

$$\|\widetilde{T}_t f_n - \widetilde{T}_t f_m\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) = \|T_t f_n - T_t f_m\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) \leq C_\omega \|f_n - f_m\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Тогда для любых $k \in \mathbb{N}$ и $f, g \in K$, $f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{L_2(\mathbb{R})} f$, $f_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{L_2(\mathbb{R})} g$, выполнено неравенство

$$\|\widetilde{T}_t f - \widetilde{T}_t g\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) \leq \|\widetilde{T}_t f - \widetilde{T}_t f_{n_k}\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) + \|\widetilde{T}_t g - \widetilde{T}_t f_{m_k}\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) +$$

$$+ C_\omega(\|f - f_{n_k}\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|g - f_{m_k}\|_{L_2(\mathbb{R})}) + C_\omega \|f - g\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Следовательно, на множестве $\widetilde{\Omega}$ существует такая константа $C_\omega > 0$, что для всех $f, g \in K$ справедливо

$$\|\widetilde{T}_t f - \widetilde{T}_t g\|_{L_2(\mathbb{R})}(\omega) \leq C_\omega \|f - g\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

что равносильно непрерывности отображения $\widetilde{T}_t(\omega)\colon K \to L_2(\mathbb{R})$ при каждом $\omega \in \widetilde{\Omega}$.

Теорема 4 доказана.

5. Сохранение сходимости для произвольных функций. В предыдущем пункте рассматривались множества, содержащие функции из узкого класса. Каждый элемент множества из теоремы 4 не только является непрерывной функцией, но и удовлетворяет условию Гельдера с показателем $1/2$. Настоящий пункт посвящен более широкому классу функций $L_2(\mathbb{R})$, для которых изучается сохранение сходимости под действием оператора T_t.

Поскольку оператор T_t не является ограниченным ССО в $L_2(\mathbb{R})$, то не для каждой сходящейся последовательности функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ее образ $\{T_t f_n\}_{n=1}^{\infty}$ под действием T_t будет сходящейся последовательностью.

***Пример* 1.** Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ рассмотрим функцию $f_{n,k} = 1\!\!1_{[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}]}$. Занумеруем последовательность $\{f_{n,k},\ n \in \mathbb{N},\ k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}\}$ в одну $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящуюся к 0 в $L_2(\mathbb{R})$. Если бы T_t сохранял сходимость этой последовательности, то

$$\mathrm{P}\left\{\|T_t f_n\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0,\ n \to \infty\right\} = 1. \tag{16}$$

Отметим, что справедливы следующие соотношения:

$$\mathrm{P}\left\{\text{б. ч. } \|T_t f_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = 1\right\} \geq$$

$$\geq \mathrm{P}\left\{\text{б. ч. } \|T_t f_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = 1,\ x(0,t) = x(1,t),\ x(0,t) \in [0;1]\right\} \geq$$

$$\geq \mathrm{P}\left\{\text{б. ч. } f_n(x(0,t)) = 1,\ x(0,t) = x(1,t),\ x(0,t) \in [0;1]\right\} =$$

$$= \mathrm{P}\left\{x(0,t) = x(1,t),\ x(0,t) \in [0;1]\right\},$$

где б. ч. означает бесконечно часто. Противоречие с (16) дает следующая лемма.

Лемма 1. *Для потока Арратья* $\{x(u,t), u \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ *и множества* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *с положительной мерой Лебега* $\lambda(\Delta) > 0$

$$\mathrm{P}\{x(0,t) = x(1,t), x(0,t) \in \Delta\} > 0.$$

Доказательство. Пусть w_1, w_2 — независимые винеровские процессы, стартующие из 0 и 1 соответственно,

$$0 = w_1(0) < w_2(0) = 1.$$

Рассмотрим их первый момент встречи $\sigma := \inf\{s \geq 0 \colon w_1(s) = w_2(s)\}$ и зададим новые винеровские процессы

$$z_1(s) := w_1(s),$$

$$z_2(s) := w_2(s) 1\!\!1\{s < \sigma\} + w_1(s) 1\!\!1\{s \geq \sigma\}.$$

Поскольку $(x(0,t), x(1,t)) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (z_1(t), z_2(t))$ [1], то

$$\mathrm{P}\{x(0,t) = x(1,t),\ x(0,t) \in \Delta\} = \mathrm{P}\{\sigma \leq t,\ z_1(t) \in \Delta\} =$$

$$= \mathrm{M}(1\!\!1\{\sigma \leq t\}\, \mathrm{M}(1\!\!1\{w_1(t) \in \Delta,\ w_2(t) \in \mathbb{R}\}/\mathcal{F}_\sigma)).$$

Рассмотрим поток σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, где $\mathcal{F}_t = \sigma(w_1(s), w_2(s), s \leq t)$. В силу строго марковского свойства для двумерного винеровского процесса $(w_1(t), w_2(t))$ и того, что σ — марковский момент относительно $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, справедливо равенство

$$\mathrm{M}(1\!\!1\{\sigma \leq t\}\, \mathrm{M}(1\!\!1\{w_1(t) \in \Delta,\ w_2(t) \in \mathbb{R}\}/\mathcal{F}_\sigma)) = \mathrm{M}\, F(\sigma, w_1(\sigma)),$$

где функция F задается соотношением

$$F(y_1, y_2) = 1\!\!1\{y_1 \leq t\} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t - y_1)}} \int\limits_{\Delta} e^{-\frac{(u-y_2)^2}{2(t-y_1)}}\, du.$$

Совместная плотность распределения для $(\sigma, w_1(\sigma))$ имеет вид

$$f_{(\sigma,w_1(\sigma))}(y_1,y_2) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi y_1^2} e^{-\frac{2y_2^2+1}{4y_1}}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{P}\{x(0,t) = x(1,t),\ x(0,t) \in \Delta\} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_0^t \frac{1}{2\sqrt{2}\pi y_1^2} e^{-\frac{2y_2^2+1}{4y_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-y_1)}} \int\limits_{\Delta} e^{-\frac{(v-y_2)^2}{2(t-y_1)}} dv dy_1 dy_2 > 0.$$

Лемма 1 доказана.

Таким образом, для последовательности функций из примера 1

$$\mathrm{P}\{\text{б. ч. } \|T_t f_{n,k}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = 1\} > 0,$$

что противоречит (16).

Оказывается, что необходимым условием сохранения сходимости под действием оператора T_t является сходимость почти всюду по мере Лебега λ на $\mathbb{R}$.

Теорема 5. *Пусть последовательность* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_2(\mathbb{R})$ *такова, что* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2(\mathbb{R})} 0$. *Если*

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \|T_t f_n\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0\right\} = 1, \tag{17}$$

то $f_n \to 0$ *почти всюду по мере Лебега* λ *на* $\mathbb{R}$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Заметим, что $f_n \to 0$ почти всюду по λ на $\mathbb{R}$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда для любого $C > 0$

$$\lambda\left\{u \in \mathbb{R}\colon \overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(u)| \geq C\right\} = 0.$$

Предположим, что для некоторого $C > 0$ множество $\Delta_C := \{v \in \mathbb{R}\colon \overline{\lim}_{n\to\infty} |f_n(v)| > C\}$ имеет положительную меру Лебега $\lambda(\Delta_C) > 0$.

В силу леммы 1 и предположения для произвольного $t > 0$

$$\mathrm{P}\{\text{б. ч. } \|T_t f_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \geq C^2\} \geq$$

$$\geq \mathrm{P}\{\text{б. ч. } f_n^2(x(0,t)) \geq C^2,\ x(0,t) = x(1,t),\ x(0,t) \in \Delta_C\} =$$

$$= \mathrm{P}\{x(0,t) = x(1,t),\ x(0,t) \in \Delta_C\} > 0,$$

что противоречит (17).

Теорема 5 доказана.

Необходимое условие сохранения сходимости из теоремы не является достаточным. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 2. Пусть $f_n = \dfrac{1}{c_n} \mathbb{1}_{(a_n;a_{n+1}]}$, где $c_0 := 1,\ a_0 := 0$ и для любого $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = (\ln n)^{1/4}, \qquad a_n = a_{n-1} + 1 + 2n(t \ln 2)^{1/2}. \tag{18}$$

Очевидно, что $f_n \to 0,\ n \to \infty$, почти всюду. Для заданной последовательности функций справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Для фиксированного* $t>0$ *и произвольного* $\delta\in(0;2\sqrt{t})$

$$\mathrm{P}\{\textit{б. ч.}\ \|T_tf_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\ge\delta\}=1.$$

Доказательство. Рассмотрим такие независимые винеровские процессы $\{w_j\}_{j\ge0}$ на $[0;t]$, что для любого $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ $w_{2n}(0)=a_n$ и $w_{2n+1}(0)=a_n+1$. По заданному семейству $\{w_j,\ j\ge0\}$ построим новые случайные процессы $\{\widetilde{y}(u_k,\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$, где $u_{2n}=a_n$ и $u_{2n+1}=a_n+1$.

Для функций $g_1,g_2\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ введем обозначение

$$\tau[g_1,g_2]:=\inf\{s\ge0\colon g_1(s)=g_2(s)\}.$$

Для каждого $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ положим

$$\widetilde{y}(a_n,s):=w_{2n}(s)\mathbb{1}\big\{s<\tau[w_{2n},\widetilde{y}(a_{n-1}+1,\cdot)]\big\}+$$
$$+\widetilde{y}(a_{n-1}+1,s)\mathbb{1}\big\{s\ge\tau[w_{2n},\widetilde{y}(a_{n-1}+1,\cdot)]\big\},$$
$$\widetilde{y}(a_n+1,s):=w_{2n+1}(s)\mathbb{1}\big\{s<\tau[w_{2n+1},\widetilde{y}(a_n,\cdot)]\big\}+$$
$$+\widetilde{y}(a_n+1,s)\mathbb{1}\big\{s\ge\tau[w_{2n+1},\widetilde{y}(a_n,\cdot)]\big\},$$

где $\widetilde{y}(0,s):=w_0(s)$.

В [3] отмечено, что для потока Арратья $\{y(u,s),\ u\in\mathbb{R},\ s\ge0\}$ в пространстве $\mathcal{C}([0;t])^\infty$ $\{y(u_k,\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\widetilde{y}(u_k,\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ имеют одинаковые распределения. Следовательно, для любого $\delta>0$

$$\mathrm{P}\left\{\varlimsup_{n\to\infty}\ \frac{y(a_n+1,t)-y(a_n,t)}{c_n^2}\ge\delta\right\}=\mathrm{P}\left\{\varlimsup_{n\to\infty}\ \frac{\widetilde{y}(a_n+1,t)-\widetilde{y}(a_n,t)}{c_n^2}\ge\delta\right\}.\qquad(19)$$

Таким образом,

$$\mathrm{P}\{\text{б. ч. }\|T_tf_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\ge\delta\}=$$
$$=\mathrm{P}\left\{\text{б. ч. }\frac{1}{c_n^2}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{(a_n;a_n+1]}(x(u,t))du\ge\delta\right\}\overset{(9)}{=}$$
$$\overset{(9)}{=}\mathrm{P}\left\{\text{б. ч. }\frac{y(a_n+1,t)-y(a_n,t)}{c_n^2}\ge\delta\right\},$$

где $\{y(u,r),\ u\in\mathbb{R},\ r\in[0;t]\}$ — двойственный поток к потоку Арратья $\big\{x(u,r),\ u\in\mathbb{R},\ r\in\in[0;t]\big\}$.

Значит, согласно (19), достаточно показать, что

$$\mathrm{P}\left\{\varlimsup_{n\to\infty}\ \frac{\widetilde{y}(a_n+1,t)-\widetilde{y}(a_n,t)}{c_n^2}\ge\delta\right\}=1.$$

Доказательство последнего равенства базируется на следующей лемме.

Лемма 3. *Пусть* $\{w_j, j \geq 0\}$ — *семейство независимых винеровских процессов на* $[0;t]$ *таких, что для любого* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $w_{2n}(0) = a_n$ *и* $w_{2n+1}(0) = a_n + 1$. *Тогда для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство*

$$\mathrm{P}\Big\{ \max_{s\in[0;t]} \max_{j=\overline{0,2n-1}} w_j(s) \geq \min_{s\in[0;t]} w_{2n}(s) \Big\} < \frac{1}{2^n t\sqrt{\pi \ln 2}}. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{w}_1$, $\widetilde{w}_2$ — независимые винеровские процессы на $[0;t]$ такие, что $\widetilde{w}_1(0) = \widetilde{w}_2(0) = 0$. Заметим, что

$$\mathrm{P}\Big\{ \max_{s\in[0;t]} \max_{j=\overline{0,2n-1}} w_j(s) \geq \min_{s\in[0;t]} w_{2n}(s) \Big\} =$$

$$= \mathrm{P}\Big\{ \exists j = \overline{0,2n-1} \colon \max_{s\in[0;t]} w_j(s) - \min_{s\in[0;t]} w_{2n}(s) \geq 0 \Big\} \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\mathrm{P}\Big\{ \max_{s\in[0;t]} \widetilde{w}_1(s) - \min_{s\in[0;t]} \widetilde{w}_2(s) \geq a_n - a_j \Big\} +$$

$$+ \mathrm{P}\Big\{ \max_{s\in[0;t]} \widetilde{w}_1(s) - \min_{s\in[0;t]} \widetilde{w}_2(s) \geq a_n - a_j - 1 \Big\} \Big).$$

Поскольку $\{a_n\}_{n\geq 0}$ — возрастающая последовательность, то для произвольного $n \in \mathbb{N}$ выполнены следующие соотношения:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \Big(\mathrm{P}\Big\{ \max_{s\in[0;t]} \widetilde{w}_1(s) - \min_{s\in[0;t]} \widetilde{w}_2(s) \geq a_n - a_j \Big\} +$$

$$+ \mathrm{P}\Big\{ \max_{s\in[0;t]} \widetilde{w}_1(s) - \min_{s\in[0;t]} \widetilde{w}_2(s) \geq a_n - a_j - 1 \Big\} \Big) \leq$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{a_n - a_j - 1} e^{-\frac{(a_n - a_j - 1)^2}{4t}} \leq$$

$$\leq \frac{2(n-1)}{\sqrt{\pi t}} \frac{1}{a_n - a_{n-1} - 1} e^{-\frac{(a_n - a_{n-1} - 1)^2}{4t}} \leq \frac{1}{2^n t\sqrt{\pi \ln 2}},$$

где последнее неравенство следует из выбора последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Лемма 3 доказана.

***Следствие* 1.** *Для семейства* $\{w_j,\ j \geq 0\}$ *независимых винеровских процессов, удовлетворяющих условиям леммы* 3, *справедливо*

$$\mathrm{P}\Big\{ \textit{б. ч.} \max_{s\in[0;t]} \max_{j=\overline{0,2n-1}} w_j(s) \geq \min_{s\in[0;t]} w_{2n}(s) \Big\} = 0.$$

Согласно построению процессов $\{\widetilde{y}(u_k, \cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ и следствию 1

$$\mathrm{P}\big\{ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N \colon \widetilde{y}(a_n, t) = w_{2n}(t), \widetilde{y}(a_n + 1, t) =$$

$$= w_{2n+1}(t)\mathbb{1}\big\{t < \tau[w_{2n}, w_{2n+1}]\big\} + w_{2n}(t)\mathbb{1}\big\{t \geq \tau[w_{2n}, w_{2n+1}]\big\}\big\} = 1.$$

Таким образом,

$$\mathrm{P}\left\{\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \widetilde{y}(a_n+1,t) - \widetilde{y}(a_n,t) = w_{2n+1}(t) - w_{2n}(t)\right\} = 1. \tag{21}$$

Поскольку $\mathrm{P}\left\{w_{2n+1}(t) - w_{2n}(t) \geq c_n^2\delta\right\} \geq \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{1}{4t}(c_n^2\delta+1)^2}$, то в силу выбора последовательности $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ для произвольного $\delta \in (0; 2\sqrt{t})$ и некоторого $N_0 \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{P}\left\{w_{2n+1}(t) - w_{2n}(t) \geq c_n^2\delta\right\} \geq \frac{1}{n} \quad \text{для всех} \quad n \geq N_0.$$

Следовательно, согласно лемме Бореля – Кантелли

$$\mathrm{P}\left\{\text{б. ч.}\ \ w_{2n+1}(t) - w_{2n}(t) \geq c_n^2\delta\right\} = 1,$$

что с учетом (21) эквивалентно следующему:

$$\mathrm{P}\{\text{б. ч.}\ \ \widetilde{y}(a_n+1,t) - \widetilde{y}(a_n,t) \geq c_n^2\delta\} = 1.$$

Лемма 2 доказана.

Пример 2 иллюстрирует, что из сходимостей последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_2(\mathbb{R})$ к нулю в $L_2(\mathbb{R})$ и почти всюду по мере Лебега на $\mathbb{R}$, вообще говоря, не следует сходимость $\{T_t f_n\}_{n=1}^{\infty}$ к нулю. Однако при дополнительном условии на носители функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходимости к нулю почти всюду достаточно для того, чтобы $\mathrm{P}\{\lim_{n\to\infty} \|T_t f_n\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0\} = 1$. А именно, имеет место следующая теорема, которая дает достаточное условие сохранения сходимости.

Теорема 6. *Пусть последовательность функций* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_2(\mathbb{R})$ *удовлетворяет следующим условиям*:

1) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2(\mathbb{R})} 0$;

2) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *почти всюду по* λ *на* $\mathbb{R}$;

3) $\exists C > 0\ \forall n \geq 1 : \mathrm{supp} f_n \subset [-C; C]$.

Тогда $\mathrm{P}\{\lim_{n\to\infty} \|T_t f_n\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0\} = 1$ *для любого* $t > 0$.

Доказательство. Основной идеей доказательства является следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* 1 – 3 *теоремы* 6. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует открытое множество* $\Delta^{\varepsilon} \subseteq [-C; C]$ *такое, что*:

а) $\lambda(\Delta^{\varepsilon}) < \varepsilon$;

б) $\sup_{u\in[-C;C]\setminus\Delta^{\varepsilon}} |f_n(u)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

в) $\mathrm{P}\{x(\mathbb{R},t) \cap \Delta^{\varepsilon} \neq \varnothing\} < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi t}}$ *для любого* $t > 0$.

Доказательство. Из условий 2, 3 в силу теоремы Егорова следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $G^{\varepsilon} \subseteq [-C; C]$ такое, что $\lambda(G^{\varepsilon}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\sup_{u\in[-C;C]\setminus G^{\varepsilon}} |f_n(u)| \to \to 0,\ n \to \infty$. Поскольку $G^{\varepsilon} \subseteq [-C; C]$ измеримо, то можно найти открытое множество $\Delta^{\varepsilon} = \cup_k (a_k^{\varepsilon}; b_k^{\varepsilon})$, где объединение не более чем счетно, для которого $\lambda(\Delta^{\varepsilon}) < \varepsilon$ и $G^{\varepsilon} \subseteq \Delta^{\varepsilon}$. Таким образом, в силу (4) справедливы соотношения

$$\mathrm{P}\{x(\mathbb{R},t)\cap\Delta^{\varepsilon}\neq\varnothing\}\leq\sum_k \mathrm{P}\{x(\mathbb{R},t)\cap(a_k^{\varepsilon};b_k^{\varepsilon})\neq\varnothing\}=$$

$$=\sum_k \mathrm{P}\{y(b_k^{\varepsilon};t)\neq y(a_k^{\varepsilon};t)\}\leq\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sum_k\int\limits_0^{\frac{b_k^{\varepsilon}-a_k^{\varepsilon}}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{u^2}{2t}}du\leq$$

$$\leq\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_k(b_k^{\varepsilon}-a_k^{\varepsilon})\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi t}}\,,$$

что и требовалось доказать.

Зафиксируем произвольное $t>0$. Согласно условию б) для каждого $\varepsilon>0$ на множестве

$$\Omega^{\varepsilon}:=\{\omega\in\Omega\colon x(\mathbb{R},t,\omega)\cap\Delta^{\varepsilon}=\varnothing\}$$

имеет место сходимость $\|(T_tf_n)(\omega)\|_{L_2(\mathbb{R})}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Следовательно, для каждого $\varepsilon>0$

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{n\to\infty}\|T_tf_n\|_{L_2(\mathbb{R})}=0\right\}\geq\mathrm{P}(\Omega^{\varepsilon})>1-\varepsilon,$$

что в силу произвольности выбора $\varepsilon>0$ влечет

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{n\to\infty}\|T_tf_n\|_{L_2(\mathbb{R})}=0\right\}=1.$$

Теорема 6 доказана.

Используя достаточное условие сохранения сходимости, приведем пример класса компактов K в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, для которых из условия $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{L_2(\mathbb{R})}f$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq K$, следует, что $\mathrm{P}\left\{\lim_{n\to\infty}\|T_t(f_n-f)\|_{L_2(\mathbb{R})}=0\right\}=1$.

***Пример* 3.** Пусть K — компакт в $\mathcal{C}([0;1])$. Тогда на его естественном вложении в пространство $L_2([0;1])$ в силу предыдущей теоремы достаточно показать, что из сходимости в $L_2(\mathbb{R})$ последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq K$ к функции $f\in K$ следует сходимость почти всюду по мере Лебега на $[0;1]$.

В силу теоремы Арцела – Асколи для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для любых точек $u,v\in[0,1]$, удовлетворяющих условию $|u-v|<\delta$, выполняется неравенство

$$\sup_{f\in K}|f(u)-f(v)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{22}$$

Для последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq K$, сходящейся в $L_2(\mathbb{R})$ к f, $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{L_2(\mathbb{R})}f$, существует такой номер $n(\delta)$, что для всех $n\geq n(\delta)$

$$\lambda\left\{u\in[0;1]\colon|f_n(u)-f(u)|\geq\frac{\varepsilon}{3}\right\}<\delta.$$

Рассмотрим разбиение $\left\{x_k,\ k=\overline{0,\left[\frac{1}{\delta}\right]+1}\right\}$ отрезка $[0;1]$ вида

$$x_{\left[\frac{1}{\delta}\right]+1} = 1 \quad \text{и} \quad x_k = k\delta \quad \text{для каждого} \quad k = \overline{0, \left[\frac{1}{\delta}\right]}.$$

Из (22) следует, что для любого $n \geq n(\delta)$ и произвольного $k = \overline{0, \left[\frac{1}{\delta} - 1\right]}$ существует $u_k^n \in$ $\in [x_k; x_{k+1})$ такой, что

$$\left| f_n(u_k^n) - f(u_k^n) \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

и для каждой точки $v \in [x_{\left[\frac{1}{\delta}\right]}; 1]$ существует такой $u^n_{\left[\frac{1}{\delta}\right]} \in [1 - \delta; 1]$, что

$$|f(u^n_{\left[\frac{1}{\delta}\right]}) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \; |f_n(u^n_{\left[\frac{1}{\delta}\right]}) - f_n(v)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, доказана равномерная сходимость на $[0; 1]$ последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ к f, что влечет сходимость почти всюду на $[0; 1]$.

Литература

1. *Arratia R.* Coalescing Brownian motions on the line: PhD Thesis. – Madison, 1979.
2. *Harris T. E.* Coalescing and noncoalescing stochastic flows in $\mathbb{R}_1$ // Stochast. Process. and Appl. – 1984. – **17**. – P. 187–210.
3. *Дороговцев А. А.* Мерозначные процессы и стохастические потоки. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 289 с.
4. *Дороговцев А. А.* Некоторые замечания о винеровском потоке со склеиванием // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 10. – С. 1327–1333.
5. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations. – Cambridge Univ. Press, 1997. – 346 p.
6. *Dorogovtsev A. A.* Semigroups of finite-dimensional random projections // Lith. Math. J. – 2011. – **51**, № 3. – P. 330–341.
7. *Korenovska I. A.* Random maps and Kolmogorov widths // Theory Stochast. Process. – 2015. – **20(36)**, № 1. – P. 78–83.
8. *Dorogovtsev A. A.* Krylov–Veretennikov expansion for coalescing stochastic flows // Commun. Stochast. Anal. – 2012. – **6**, № 3. – P. 421–435.
9. *Скороход А. В* Случайные линейные операторы. – Киев: Наук. думка, 1978. – 200 с.
10. *Дороговцев А. А.* Стохастический анализ и случайные отображения в гильбертовом пространстве. – Киев: Наук. думка, 1992. – 120 с.
11. *Fontes L. R. G., Isopi M., Newman C. M., Ravishankar K.* The Brownian web // Proc. Nat. Acad. Sci. – 2002. – **99**. – P. 15888–15893.
12. *Tóth B., Werner W.* The true self-repelling motion // Probab. Theory Relat. Fields. – 1998. – **111**. – P. 375–452.
13. *Arratia R.* Coalescing Brownian motions and the voter model on $\mathbb{Z}$ // Unpublished Partial Manuscript. – 1981 / available from rarratia@math.usc.edu.
14. *Халмош П.* Теория меры. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 291 с.
15. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 333 с.

Получено 14.07.16,
после доработки — 03.10.16