УДК 517.5

В. В. Сєдунова (Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара)

НАЙКРАЩЕ ОДНОСТОРОННЄ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСУ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ АЛГЕБРАЇЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ В СЕРЕДНЬОМУ

We establish the best asymptotic one-sided approximation on the average for r-differentiable functions from the class W_∞^r where r is even, by algebraic polynomials.

Установлена асимптотически точная оценка наилучшего одностороннего приближения алгебраическими полиномами в среднем класса дифференцируемых функций W_∞^r для случая нечетного r.

1. Постановка задачі. У цій статті ми встановимо асимптотичну оцінку найкращого одностороннього наближення класу диференційовних функцій W_∞^r алгебраїчними поліномами в середньому. W_∞^r, $r = 1, 2, \ldots$, — клас функцій f, визначених на $[-1;1]$, $(r-1)$-ша похідна яких абсолютно неперервна, а для r-ї майже скрізь на $[-1;1]$ виконується нерівність $\left| f^{(r)}(t) \right| \leq 1$.

Нехай $E_n^+(f)_1$ $\left(E_n^-(f)_1 \right)$ — найкраще одностороннє наближення зверху (знизу) функції f алгебраїчними поліномами в середньому, тобто

$$E_n^+(f)_1 \;:=\; \inf_{\substack{u\in P_n\\ u\geq f}} \|u-f\|_1 \qquad \left(E_n^-(f)_1 \;:=\; \inf_{\substack{u\in P_n\\ f\geq u}} \|f-u\|_1 \right),$$

P_n — множина алгебраїчних поліномів степеня не вищого за n і

$$E_n^{\pm}\left(W_\infty^r\right)_1 \;:=\; \sup_{f\in W_\infty^r} E_n^{\pm}(f)_1.$$

Результатом даної статті є асимптотична оцінка

$$E_n^+\left(W_\infty^r\right)_1 \;=\; E_n^-\left(W_\infty^r\right)_1 \;=\; \frac{\|B_r(t)\|_1}{\pi n^r} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{r/2} dt + O\left(\frac{1}{n^{r+1/2}}\right) \tag{1}$$

для будь-якого $n \in N$ і непарного $r > 1$, $r \leq n-1$. Тут $B_r(t)$, $r = 1, 2, \ldots$, — функція Бернуллі, $B_r(t) \;:=\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{\cos\left(\nu t - \dfrac{\pi r}{2}\right)}{\nu^r}$. $B_r(t)$ є 2π-періодичною функцією, її норма обчислюється на проміжку $[0; 2\pi]$, тобто

$$\|B_r(t)\|_{[0;2\pi]} := \int_0^{2\pi} |B_r(t)|\, dt, \qquad \|B_r(\cdot)\|_\infty := \max_{t\in[0;2\pi]} |B_r(t)|.$$

В усіх інших випадках норма будь-якої функції x — це норма у просторі $L_1[-1;1]$, тобто

$$\|x(\cdot)\|_1 = \|x(\cdot)\|_{L_1[-1;1]} := \int_{-1}^{1} |x(t)|\, dt.$$

Згідно зі співвідношеннями двоїстості для односторонніх наближень [1, с. 46] маємо

$$E_n^{\pm}(f)_1 := \sup_{h_0\in W_\infty^{0,\pm}} \int_{-1}^{1} f(t)h_0(t)\, dt,$$

де $W_\infty^{0,\pm}$, $n = 0,1,2,\ldots$, — клас функцій, заданих на відрізку $[-1;1]$, обмежених майже скрізь зверху (знизу), тобто $\max\{\pm f(t), 0\} \le 1$, і ортогональних будь-якому многочлену степеня не вищого за n. Для будь-якого натурального r через $W_n^{r,\pm}$ позначимо клас функцій, у яких r-та похідна належить класу $W_n^{0,\pm}$, тобто

$$W_n^{r,\pm} = \left\{ h_r(t) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{1} (t-u)_+^{r-1} h_0(u)\, du, \;\; h_0(t)\in W_n^{0,\pm} \right\}.$$

Тоді співвідношення двоїстості для функцій f класу W_∞^r можна записати у вигляді

$$E_n^{\pm}\left(W_\infty^r\right)_1 = \sup_{f\in W_\infty^r} E_n^{\pm}(f)_1 = \sup_{f\in W_\infty^r}\sup_{h_r\in W_n^{r,\mp}} \int_{-1}^{1} \left| f^{(r)}(t)\, h_r(t)\right| dt = \sup_{h_r\in W_n^{r,\mp}} \|h_r(\cdot)\|_1. \tag{2}$$

Отже, оцінку величини $E_n^{\pm}\left(W_\infty^r\right)_1$ можна отримати, оцінивши $\sup_{h_r\in W_n^{r,\mp}} \|h_r(\cdot)\|_1$. Використовуючи описані в роботі [2] функції порівняння, отримуємо нерівність

$$E_n^{+}\left(W_\infty^r\right)_1 = \sup_{h_r\in W_n^{r,-}} \|h_r(\cdot)\|_1 \le \frac{\|B_r(\cdot)\|_{[0;2\pi]}}{\pi n^r} \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-t^2}\right)^r dt \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{3}$$

У роботі [3] описано сплайни $S_{n,r}^{\pm}$, побудовані так, що $S_{n,r}^{\pm} \in W_n^{\pm,r}$. Оцінка норми сплайна $S_{n,r}^{+}$ знизу дає нерівність

$$E_n^{-}\left(W_\infty^r\right)_1 = \sup_{h_r\in W_n^{r,+}} \|h_r(\cdot)\|_1 \ge \left\|S_{n,r}^{+}\right\|_1 \ge \frac{\|B_r(\cdot)\|_{[0;2\pi]}}{\pi n^r} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{r/2} dt \left(1 - O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \tag{4}$$

Оскільки клас W_∞^r є симетричним, то [1, с. 13] $E_n^+\left(W_\infty^r\right)_1 = E_n^-\left(W_\infty^r\right)_1$. Тому з нерівностей (3), (4) отримуємо (1).

2. Оцінка зверху величини $E_n^+\left(W_\infty^r\right)_1$. Для $h_r(t) \in W_n^{r,-}$ у кожній точці a проміжку $(-1;1)$ [2, с. 2]

$$C_{r,a}\frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{n^r}\min_{t\in[0;2\pi]}\left(D_r(t)\right) \le h_r(a) \le C_{r,a}\frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{n^r}\max_{t\in[0;2\pi]}\left(D_r(t)\right), \tag{5}$$

де $D_r(t) := 2B_r(t)$, $C_{r,a}$ визначається рівністю

$$C_{r,a} = 1 + \frac{2C_r}{n(1-a^2)}, \quad n\in N, \quad r = 1,2,\ldots,n-1, \tag{6}$$

C_r — деяка стала, залежна від r (у різних місцях може мати різне значення).

Функцією порівняння на проміжку $(a;b)$ для функції $f(t)$ називатимемо функцію $w(t)$, визначену і диференційовну на R, таку, що $\forall x\in(a;b)$, $y\in R: f(x)=w(y)$, $\operatorname{sign} f'(x) = \operatorname{sign} w'(y)$ виконується нерівність $\left|f'(x)\right| \le \left|w'(y)\right|$.

У роботі [2] (теорема 3) показано, що при непарному r функція порівняння для $h_r \in W_n^{-,r}$ на проміжку її знакосталості $(a;b)\in\left(-1+\frac{\pi}{n}; -\frac{\pi}{n}\right)$ визначається рівністю

$$w_r(t) := C_{r,a}\varphi_{r,b_*}(t),$$

де $C_{r,a}$ визначено рівністю (6), а

$$\varphi_{r,b_*}(t) = \frac{D_r\left(\frac{nt}{\sqrt{1-b_*^2}}\right)}{\left(\frac{n}{\sqrt{1-b_*^2}}\right)^r}.$$

Точка b_* визначається таким чином:

$$b_* = b + \frac{\pi}{n}\sqrt{1-b_*^2}, \quad b\in(-1;0),$$

$$b_* = b - \frac{\pi}{n}\sqrt{1-b_*^2}, \quad b\in(0;1).$$

Існування такого b_* для будь-якого b показано в роботі [4] (лема 1). Далі для спрощення позначатимемо

$$\nu(x) = \frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2},$$

тоді, зокрема, $2\nu(b_*)$ — період функції порівняння.

В роботі [2] (зауваження 3) зазначено, що для будь-якого $t_0 \in R$ функція $w_r(t-t_0)$ також є функцією порівняння для $h_r(t)$ на $(a;b)$. Тому далі $w_r(t)$ означатиме функцію

$$w_r(t) := C_{r,a}\varphi_{r,b_*}(t-\theta_{r,b}),$$

де $\theta_{r,b} \in (b;b_*)$ вибрано так, що

$$w_r(b) = h_r(b) = 0, \qquad \operatorname{sign} w_r'(b) = \operatorname{sign} h_r'(b). \tag{7}$$

На підставі оцінки (5) маємо

$$\min_{0\le u\le 2\nu(b_*)} w_r(u) \le h_r(t) \le \max_{0\le u\le 2\nu(b_*)} w_r(u), \quad t \in (-1;b), \tag{8}$$

зокрема

$$\max_{a\le t\le b}|h_r(t)| \le \max_{0\le u\le \nu(b_*)}|w_r(u)|. \tag{9}$$

Нехай тепер r є непарним, $w_r(t)$ — функція порівняння для h_r на її проміжку знакосталості $(a;b) \in \left(-1+\frac{\pi}{n}; -\frac{\pi}{n}\right)$ (нехай для визначеності $h_r(t) > 0$, $t \in (a;b)$). З огляду на визначення функції порівняння, а також (7), (9) на кожному відрізку знакосталості, що менше за півперіод функції порівняння, отримуємо

$$0 \le h_r(t) \le w_r(t), \quad t \in (a;b),$$

отже,

$$\int_a^b h_r(t)\,dt \le \int_a^b w_r(t)\,dt = \left\{u = \frac{t-a}{b-a}\nu(b_*);\ dt = \frac{b-a}{\nu(b_*)}du\right\} =$$

$$= \frac{b-a}{\nu(b_*)}\int_a^{\nu(b_*)} C_{r,a}\varphi_{r,b_*}(t)\,dt = \frac{b-a}{\nu(b_*)}\left(1+\frac{2C_r}{n(1-a^2)}\right)\int_a^{\nu(b_*)} \frac{D_r\left(\dfrac{nt}{\sqrt{1-b_*^2}}\right)}{\left(\dfrac{n}{\sqrt{1-b_*^2}}\right)^r}dt =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{1-b_*^2}}{n} \right)^{r+1} \frac{n(b-a)}{\pi\sqrt{1-b_*^2}} \left(1 + \frac{2C_r}{n(1-a^2)} \right) \int_0^{\pi} D_r(t)\,dt\,.$$

Враховуючи, що

$$\left(\sqrt{1-b_*^2} \right)^r - \left(\sqrt{1-a^2} \right)^r \le \frac{2\pi r}{n},$$

$$\sqrt{1-a^2} \le 1,$$

маємо

$$\int_a^b h_r(t)\,dt \le \left(\frac{\sqrt{1-b_*^2}}{n} \right)^r \frac{b-a}{\pi} \left(1 + \frac{2C_r}{n(1-a^2)} \right) \int_0^{\pi} D_r(t)\,dt \le$$

$$\le \frac{\|B_r(\cdot)\|_{[0;2\pi]}}{\pi n^r} \left(\sqrt{1-a^2} \right)^r (b-a) \left(1 + \frac{2C_r}{n\left(1 - \left(-1 + \frac{\pi}{n} \right)^2 \right)} \right) \left(1 + \frac{2\pi r}{n} \right) =$$

$$= \frac{\|B_r(\cdot)\|_{[0;2\pi]}}{\pi n^r} \left(\sqrt{1-a^2} \right)^r (b-a) \left(1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right).$$

Далі, нехай $(a;b)$ — відрізок знакосталості, що більший за півперіод функції порівняння. Враховуючи (8), (9), одержуємо

$$\max_{-1\le t\le b} |h_{r+1}(t)| \le \max_{0\le t\le \nu(b_*)} |w_{r+1}(t)|,$$

$$\int_a^b h_r(t)\,dt = h_{r+1}(b) - h_{r+1}(a) \le w_{r+1}\left(\nu(b_*) \right) - w_{r+1}(0) = \int_0^{\nu(b_*)} w_r(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\nu(b_*)} C_{r,a}\varphi_{r,b_*}(t)\,dt = \left(1 + \frac{2C_r}{n(1-a^2)} \right) \int_a^{\nu(b_*)} \frac{D_r\left(\frac{nt}{\sqrt{1-b_*^2}} \right)}{\left(\frac{n}{\sqrt{1-b_*^2}} \right)^r} dt =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{1-b_*^2}}{n} \right)^r \frac{\nu(b_*)}{\pi} \left(1 + \frac{2C_r}{n(1-a^2)} \right) \int_0^{\pi} D_r(t)\,dt\,.$$

Враховуючи нерівності

$$\left(\sqrt{1-b_*^2}\right)^r-\left(\sqrt{1-b_1^2}\right)^r \;\le\; \frac{2\pi r}{n}, \quad b_1=b-\nu(b_*),$$

$$\sqrt{1-b_1^2} \;\le\; 1,$$

знаходимо

$$\int\limits_a^b h_r(t)\,dt \;\le\; \left(\frac{\sqrt{1-b_*^2}}{n}\right)^r \frac{\nu(b_*)}{\pi}\left(1+\frac{2C_r}{n\left(1-a^2\right)}\right)\int\limits_0^\pi D_r(t)\,dt \;\le$$

$$\le\; \frac{\|B_r(\cdot)\|_{[0;2\pi]}}{\pi n^r}\left(\sqrt{1-b_1^2}\right)^r \nu(b_*)\left(1+\frac{2C_r}{n\left(1-\left(-1+\dfrac{\pi}{n}\right)^2\right)}\right)\left(1+\frac{2\pi r}{n}\right) \;=$$

$$=\; \frac{\|B_r(\cdot)\|_{[0;2\pi]}}{\pi n^r}\left(\sqrt{1-b_1^2}\right)^r \nu(b_*)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Так само можна оцінити інтеграл $\int_{-1+\pi/n}^{b}|h_r(t)|\,dt$ на проміжку знакосталості $\left(-1+\dfrac{\pi}{n};b\right)$ функції $h_r(t)$. Тут b — найближчий справа до точки $-1+\dfrac{\pi}{n}$ нуль функції h_r; $h_r(b)=0$, але необов'язково $h_r\left(-1+\dfrac{\pi}{n}\right)=0$. Функція порівняння $w_r(t)$ визначається рівністю $w_r(t)=C_{r,(-1+\pi/n)}\varphi_{r,b_*}\left(t-\theta_{r,b_*}\right)$.

З (5) отримуємо оцінку

$$\int\limits_{-1}^{-1+\frac{\pi}{n}}|h_r(t)|\,dt \;\le\; \frac{\pi}{n}\max_{-1\le a\le -1+\frac{\pi}{n}}|h_r(a)| \;\le\; \frac{\pi}{n}\max_{-1\le a\le -1+\frac{\pi}{n}}\left\{C_{r,a}\frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{n^r}\right\}\max_t\left(D_r(t)\right) \;=$$

$$=\; \frac{2\pi\|B_r(\cdot)\|_\infty}{n}\left(\frac{\left(\sqrt{1-\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^2}\right)^r}{n^r}+\frac{2C_r\left(\sqrt{1-\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^2}\right)^{(r-2)_+}}{n^{r+1}}\right) \;\le\; \frac{d_r}{n^{r+1}}.$$

Якщо $b \in \left(-\frac{\pi}{n}; \frac{\pi}{n} \right)$, то $w_r(t) = C_{r,0}\varphi_{r,0}(t) = \left(1 + \frac{2C_r}{n^{r+1}} \right) \frac{D_r(nt)}{n^r}$. Оцінюємо так само, як і на проміжку $(a;b) \in \left(-1 + \frac{\pi}{n}; -\frac{\pi}{n} \right)$.

На проміжку знакосталості $(a;b) \in \left(\frac{\pi}{n}; 1 - \frac{\pi}{n} \right)$ функцією порівняння для $h_r(t)$ є функція $w_r(t) = C_{r,b}\varphi_{r,a_*}\left(t + \theta_{r,a_*} \right)$, де $a_* = a + \nu(a_*)$ і θ_{r,a_*} — таке, що $w_r(t)$ є функцією порівняння для $h_r(t)$ в точці a. Інтеграл $\int_a^b |h_r(t)|\,dt$ оцінюємо зверху так само, як інтеграл по відрізку $(a;b) \in \left(-1 + \frac{\pi}{n}; -\frac{\pi}{n} \right)$.

Так само, як для $\left(-1; -1 + \frac{\pi}{n} \right)$, отримуємо оцінку

$$\int_{1-\pi/n}^{1} |h_r(t)|\,dt \le \frac{d_r}{n^{r+1}}.$$

Підсумовуючи отримані оцінки, маємо

$$\int_{-1}^{1} |h_r(t)|\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{-1+\frac{\pi}{n}} |h_r(t)|\,dt + \int_{1-\frac{\pi}{n}}^{1} |h_r(t)|\,dt + \sum_{|b-a|<\nu(b_*)} \int_a^b |h_r(t)|\,dt + \sum_{|b-a|\ge\nu(b_*)} \int_a^b |h_r(t)|\,dt \le$$

$$\le \frac{2d_r}{n^{r+1}} + \sum_{|b-a|<\nu(b_*)} \frac{\|B_r(\cdot)\|_{[0;2\pi]}}{\pi n^r} \left(\sqrt{1-a^2} \right)^r (b-a) \left(1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right) +$$

$$+ \sum_{|b-a|\ge\nu(b_*)} \frac{\|B_r(\cdot)\|_{[0;2\pi]}}{\pi n^r} \left(\sqrt{1-b_1^2} \right)^r \nu(b_*) \left(1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right) =$$

$$= \frac{\|B_r(\cdot)\|_{[0;2\pi]}}{\pi n^r} \left(1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right) \sum_{\Delta_t \in \left(-1+\frac{\pi}{n}; 1-\frac{\pi}{n} \right)} \left(\sqrt{1-t^2} \right)^r \Delta_t \le$$

$$\le \frac{\|B_r(\cdot)\|_{[0;2\pi]}}{\pi n^r} \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-t^2} \right)^r dt \left(1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right).$$

Отже, має місце нерівність (3):

$$E_n^+\left(W_\infty^r\right)_1 \le \frac{\|B_r(\cdot)\|_{[0;2\pi]}}{\pi n^r} \int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^r dt\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

3. Оцінка знизу величини $E_n^-\left(W_\infty^r\right)_1$. Розглянемо тепер сплайни $S_{n,r}^+ \in W_n^{+,r}$, побудовані й описані в роботі [3]. Для випадку $n = 2m-1$ сплайн $S_{2m-1,r}^+$ визначається рівністю

$$S_{2m-1,r}^+(t) := \frac{(x+1)^r}{r!} + \frac{1}{(r-1)!}\sum_{i=1}^{m}\gamma_{2m-1,i}^+\left(t-y_{2m-1,i}^+\right)_+^{r-1},$$

де $y_{2m-1,i}^+$, $i=1,\ldots,m$, — нулі полінома Лежандра $P_m(t)$ степеня m; коефіцієнти

$$\gamma_{2m-1,i}^+ = \frac{-2}{\left(1-\left(y_{2m-1,i}^+\right)^2\right)\left(P_m'\left(y_{2m-1,i}^+\right)\right)^2}, \quad i=1,\ldots,m.$$

Сплайн $S_{2m-1,r}^+$ побудовано так, що між кожними двома точками локального екстремуму лежить точно один нуль. Позначимо через $\left\{x_k^r\right\}_{k=1}^{m-r}$, $-1 < x_1^r < x_2^r < \ldots < x_{m-r}^r < 1$, нулі $S_{2m-1,r}^+$, занумеровані у порядку зростання. Точки локальних екстремумів $S_{2m-1,r}^+$ — $\left\{x_k^{r-1}\right\}_{k=1}^{2m-r+1}$ — одночасно є нулями сплайна $S_{2m-1,r-1}^+$. Тоді $\left(x_{k-1}^r;\, x_k^r\right)$ — проміжки знакосталості сплайна $S_{2m-1,r}^+$, $\left(x_{k-1}^{r-1};\, x_k^{r-1}\right)$ — проміжки монотонності. Зауважимо ще, що нулі сплайнів $S_{n,r}^+$ розташовані симетрично відносно точки 0. Між двома сусідніми точками локального екстремуму лежить точно один нуль сплайна [3, с. 204], тобто

$$x_k^{r-1} < x_k^r < x_{k+1}^{r-1}, \quad k = 1,\ldots,\left[\frac{n-r}{2}\right].$$

З теорем 3.1 та 7.1 роботи [3] випливає, що модуль сплайна в точці локального екстремуму тим більше, чим ближче ця точка до 0. Отже,

$$\left|S_{2m-1,r}^+\left(x_{k-1}^{r-1}\right)\right| < \left|S_{2m-1,r}^+\left(x_k^{r-1}\right)\right|, \quad k=1,\ldots,\left[\frac{n-r+1}{2}\right].$$

Сплайн $S_{2m-1,1}^+$ має n точок зміни знака всередині проміжку $(-1;1)$; вони розташовані між точками $\left\{x_k^0\right\}_{k=0}^{n+1}$, $x_k^0 = \cos\frac{k\pi}{n+1}$ [5, с. 130]. Тому

$$\sqrt{1-\left(x_k^r\right)^2} > \sqrt{1-\left(x_k^0\right)^2} = \sin\frac{k\pi}{n+1},$$

$$\Delta_{x,k} \;:=\; \left| x_k^0 - x_{k-1}^0 \right| \;\le\; \frac{\pi}{n+1}\sin\frac{k\pi}{n+1} \;=\; \frac{\pi}{n+1}\sqrt{1-\left(x_k^0\right)^2}\,.$$

Знайдемо тепер $\left\|S_{2m-1,r}^{+}\right\|_1$. Оскільки $\left|S_{2m-1,r}^{+}(t)\right|$ — парна функція, то

$$\left\|S_{2m-1,r}^{+}\right\|_1 \;=\; \int_{-1}^{1}\left|S_{2m-1,r}^{+}(t)\right|dt \;=\; 2\int_{-1}^{0}\left|S_{2m-1,r}^{+}(t)\right|dt \;\ge\; 2\sum_{k=k_0}^{[m-r+1]}\int_{x_{k-1}^r}^{x_k^r}\left|S_{2m-1,r}^{+}(t)\right|dt\,,$$

де k_0 таке, що $x_{k_0-1}^r \ge -1+\frac{\pi}{\sqrt{n}} \ge x_{k_0-2}^r$.

Нехай r є непарним, $r>1$. На кожному відрізку знакосталості $\left(x_{k-1}^r; x_k^r\right)$ сплайна $S_{2m-1,r}^{+}$ функція порівняння для $S_{2m-1,r}^{+}\in W_n^{r,+}$ визначається рівністю

$$w_{r,k}(t) \;=\; C_{r,x_{k-1}^r}\varphi_{r,x_{k,*}^r}\left(t-\theta_{r,x_k^r}\right).$$

Розглянемо $\delta_k = \dfrac{\max_{x_{k-1}^r\le t\le x_k^r}\left|w_{r,k}(t)\right|}{\max_{x_{k-1}^r\le t\le x_k^r}\left|S_{2m-1,r}^{+}(t)\right|}$. На підставі визначення функції порівняння $\delta_k\ge 1$. Далі, з теореми 3.3 [3] маємо

$$\max_{x_{k-1}^r\le t\le x_k^r}\left|S_{2m-1,r}^{+}(t)\right| \;=\; \left|S_{n,r}^{+}\left(x_k^{r-1}\right)\right| \;=\; E_n^{+}\left(\frac{\left(x_k^{r-1}-\cdot\right)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right)_1, \tag{10}$$

а з теореми 1 [6] отримуємо

$$E_n^{+}\left(\frac{\left(x_k^{r-1}-\cdot\right)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right)_1 \;\ge\; \frac{2\|B_r(\cdot)\|_\infty\left(\sqrt{1-\left(x_k^{r-1}\right)^2}\right)^r}{n^r}-\frac{C_r\left(\sqrt{1-\left(x_k^{r-1}\right)^2}\right)^{(r-2)_+}}{n^{r+1}}. \tag{11}$$

Оцінимо зверху $\max_{x_{k-1}^r\le t\le x_k^r}\left|w_{r,k}(t)\right|$:

$$\max_{x_{k-1}^r\le t\le x_k^r}\left|w_{r,k}(t)\right| \;\le\; \max_{0\le t\le \nu\left(x_{k,*}^r\right)}\left|C_{r,x_{k-1}^r}\varphi_{r,x_{k,*}^r}(t)\right| \;=$$

$$= \max_{0\le t\le \nu\left(x_{k,*}^r\right)} \left(1+\frac{2C_r}{n\left(1-\left(x_{k-1}^r\right)^2\right)}\right)\frac{\left(\sqrt{1-\left(x_{k,*}^r\right)^2}\right)^r}{n^r}\left| D_r\left(\frac{nt}{\sqrt{1-\left(x_{k,*}^r\right)^2}}\right)\right| =$$

$$= \left(1+\frac{2C_r}{n\left(1-\left(x_{k-1}^r\right)^2\right)}\right)\frac{\left(\sqrt{1-\left(x_{k,*}^r\right)^2}\right)^r}{n^r}\, 2\| B_r(\cdot)\|_\infty . \tag{12}$$

Тоді з (10) – (12) випливає оцінка

$$\delta_k \le \frac{\left(1+\frac{2C_r}{n\left(1-\left(x_{k-1}^r\right)^2\right)}\right)\frac{\left(\sqrt{1-\left(x_{k,*}^r\right)^2}\right)^r}{n^r}\, 2\| B_r(\cdot)\|_\infty}{\left(1-\frac{C_r'}{n\left(1-\left(x_{k}^{r-1}\right)^2\right)}\right)\frac{\left(\sqrt{1-\left(x_{k}^{r-1}\right)^2}\right)^r}{n^r}\, 2\| B_r(\cdot)\|_\infty} =$$

$$= \frac{\left(n\left(1-\left(x_{k-1}^r\right)^2\right)+2C_r\right)}{\left(n\left(1-\left(x_{k}^{r-1}\right)^2\right)-C_r'\right)}\,\frac{\left(1-\left(x_{k}^{r-1}\right)^2\right)\left(\sqrt{1-\left(x_{k,*}^r\right)^2}\right)^r}{\left(1-\left(x_{k-1}^r\right)^2\right)\left(\sqrt{1-\left(x_{k}^{r-1}\right)^2}\right)^r} <$$

$$< \frac{\left(n\left(1-\left(x_{k-1}^r\right)^2\right)+2C_r\right)\left(\sqrt{1-\left(x_{k,*}^r\right)^2}\right)^r}{\left(n\left(1-\left(x_{k-1}^r\right)^2\right)-C_r'\right)\left(\sqrt{1-\left(x_{k}^{r-1}\right)^2}\right)^r} =$$

$$= \left(1+\frac{2C_r+C_r'}{n\left(1-\left(x_{k-1}^r\right)^2\right)-C_r'}\right)\frac{\left(\sqrt{1-\left(x_{k,*}^r\right)^2}\right)^r}{\left(\sqrt{1-\left(x_{k-1}^r\right)^2}\right)^r} .$$

Враховуючи, що

$$\left(\sqrt{1-\left(x_{k,*}^r\right)^2}\right)^r - \left(\sqrt{1-\left(x_{k-1}^r\right)^2}\right)^r = \left(x_k^r - x_{k-1}^r + \nu\left(x_{k,*}^r\right)\right)\frac{r}{2}\,2\xi\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^{r-1} \le$$

$$\leq\ 2\nu\left(x_{k,*}^r\right) r\left(\sqrt{1-\left(x_{k,*}^r\right)^2}\right)^{r-1} \ =\ \frac{2r\pi}{n}\left(\sqrt{1-\left(x_{k,*}^r\right)^2}\right)^r \ \leq\ \frac{2r\pi}{n},$$

і той факт, що для будь-якого $k \geq k_0$

$$1+\frac{2C_r+C_r'}{n\left(1-\left(x_{k-1}^r\right)^2\right)-C_r'} \ \leq\ 1+\frac{2C_r+C_r'}{n\left(1-\left(-1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)-C_r'} \ =\ 1+\frac{2C_r+C_r'}{\sqrt{n}-(C_r'+1)},$$

маємо оцінку

$$\delta_k \ \leq\ \left(1+\frac{2C_r+C_r'}{\sqrt{n}-(C_r'+1)}\right)\left(1+\frac{2r\pi}{n}\right) \ \leq\ 1+\frac{d_r}{\sqrt{n}},$$

де d_r — стала, значення якої залежить від r.

Нехай тепер, для визначеності, $S_{2m-1,r}^+(t)>0$, $t\in\left(x_{k-1}^r; x_k^r\right)$. Функція $\frac{1}{\delta_k}w_{r,k}(\delta_k t)$ також є функцією порівняння для $S_{2m-1,r}^+$ на $\left(x_{k-1}^r; x_k^r\right)$ (див. [2], зауваження 5). Позначимо через ξ_k точку максимуму $\frac{1}{\delta_k}w_{r,k}(\delta_k t)$ на $\left(x_k^r-\frac{1}{\delta_k}\nu\left(x_{k,*}^r\right); x_k^r\right)$. Тоді функція

$$w_{r,k}^{\delta}(t) \ =\ \frac{1}{\delta_k}w_{r,k}\left(\delta_k t-\xi_k+x_k^{r-1}\right)$$

має максимум у точці x_k^{r-1}, причому

$$w_{r,k}^{\delta}\left(x_k^{r-1}\right) \ =\ \max_{x_{k-1}^r\leq t\leq x_k^r} S_{2m-1,r}^+(t) \ =\ S_{2m-1,r}^+\left(x_k^{r-1}\right). \tag{13}$$

Нехай ще $\beta_k^r = x_k^r-\xi_k+x_k^{r-1}$, $\alpha_k^r=\beta_k^r-\frac{1}{\delta_k}\nu\left(x_{k,*}^r\right)$ — нулі функції $w_{r,k}^{\delta}(t)$. Тоді, згідно з (13) і визначенням функції порівняння, проміжок $\left(\alpha_k^r;\,\beta_k^r\right)$ (півперіод функції порівняння) повністю лежить у $\left(x_{k-1}^r; x_k^r\right)$; окрім того,

$$0<w_{r,k}^{\delta}(t) \ \leq\ S_{2m-1,r}^+(t), \quad t\in\left(\alpha_k^r;\,\beta_k^r\right).$$

Отже,

$$\int\limits_{x_{k-1}^r}^{x_k^r} S_{2m-1,r}^{+}(t)\,dt \;\geq\; \int\limits_{\alpha_k^r}^{\beta_k^r} w_{r,k}^{\delta}(t)\,dt \;=\; \frac{1}{\delta_k}\int\limits_0^{\frac{1}{\delta_k}\nu\left(x_{k,*}^r\right)} C_{r,x_{k-1}^r}\varphi_{r,x_{k,*}^r}(\delta_k t)\,dt \;=$$

$$= \frac{1}{\delta_k}\int\limits_0^{\frac{1}{\delta_k}\nu\left(x_{k,*}^r\right)} \left|\left(1+\frac{2C_r}{n\left(1-\left(x_{k-1}^r\right)^2\right)}\right)\frac{D_r\left(\dfrac{n\delta_k t}{\sqrt{1-\left(x_{k,*}^r\right)^2}}\right)}{\left(\dfrac{n}{\sqrt{1-\left(x_{k,*}^r\right)^2}}\right)^r}\right|dt \;=$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1-\left(x_{k,*}^r\right)^2}\right)^r}{n^r\delta_k^2}\,\frac{\sqrt{1-\left(x_{k,*}^r\right)^2}}{n}\left(1+\frac{2C_r}{n\left(1-\left(x_{k-1}^r\right)^2\right)}\right)\int\limits_0^{\pi}|D_r(t)|\,dt \;>$$

$$> \frac{\left(\sqrt{1-\left(x_{k,*}^r\right)^2}\right)^r}{n^r\left(1+\dfrac{d_r}{\sqrt{n}}\right)^2}\,\frac{n+1}{\pi n}\,\frac{\pi}{n+1}\sin\frac{k\pi}{n+1}\left(1+\frac{2C_r}{n}\right)\int\limits_0^{\pi}|D_r(t)|\,dt \;\geq$$

$$\geq \frac{\|B_r(\cdot)\|_{[0;2\pi]}}{\pi n^r}\left(1-\left(x_{k-1}^0\right)^2\right)^{\frac{r}{2}}\Delta_{x,k}\left(1-\frac{2d_r}{\sqrt{n}}\right).$$

Таким чином,

$$\left\|S_{2m-1,r}^{+}\right\|_1 \;\geq\; 2\sum_{k=k_0}^{[m-r+1]}\int\limits_{\alpha_k^r}^{\beta_k^r}\left|w_{r,k}^{\delta}(t)\right|dt \;>$$

$$> \frac{\|B_r(\cdot)\|_{[0;2\pi]}}{\pi n^r}\,2\sum_{k=k_0}^{[m-r+1]}\left(1-\left(x_k^0\right)^2\right)^{\frac{r}{2}}\Delta_{x,k}\left(1-\frac{2d_r}{\sqrt{n}}\right) \;\geq$$

$$\geq \frac{\|B_r(\cdot)\|_{[0;2\pi]}}{\pi n^r}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\frac{r}{2}}dt\left(1-\frac{2d_r}{\sqrt{n}}\right).$$

Враховуючи (2), отримуємо нерівність (4) для випадку непарного n. Якщо n є парним, то

$$E^-_{2m-2}\left(W^r_\infty\right)_1 \ \geq\ E^-_{2m-1}\left(W^r_\infty\right)_1 \ \geq$$

$$\geq \frac{\|B_r(\cdot)\|_{[0;2\pi]}}{\pi(2m-1)^r}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\frac{r}{2}}dt\left(1-O\left(\frac{1}{\sqrt{2m-1}}\right)\right) \ \geq$$

$$\geq \frac{\|B_r(\cdot)\|_{[0;2\pi]}}{\pi(2m-2)^r}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\frac{r}{2}}dt\left(1-O\left(\frac{1}{\sqrt{2m-1}}\right)\right)\left(1-\frac{r^2}{(2m-1)^{2r}}\right) =$$

$$= \frac{\|B_r(\cdot)\|_{[0;2\pi]}}{\pi(2m-2)^r}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\frac{r}{2}}dt\left(1-O\left(\frac{1}{\sqrt{2m-2}}\right)\right).$$

Нерівність (4) доведено. Як було зазначено в п. 1, із (3) та (4) маємо рівність (1) для довільного $n \in N$ і непарного $r > 1$.

Література

1. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1984. – 250 с.
2. *Моторный В. П., Моторная О. В.* Теоремы сравнения для некоторых несимметричных классов функций // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 7. – С. 969 – 975.
3. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А.* Несимметричные приближения классов дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в среднем // Anal. Math. – 1988. – **14**. – P. 193 – 217.
4. *Моторный В. П., Моторная О. В.* Наилучшее приближение классов дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в среднем // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1995. – **210**. – С. 171 – 188.
5. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
6. *Моторный В. П., Моторная О. В.* Об одностороннем приближении усеченных степеней алгебраическими многочленами в среднем // Тр. Мат. ин-та РАН. – 2005. – **248**. – С. 185 – 193.

Одержано 22.12.14,
після доопрацювання — 07.12.16