К О Р О Т К І   П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 517.5

О. К. Бахтін, Я. В. Заболотний, І. Я. Дворак (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ ДОБУТКУ ВНУТРІШНІХ РАДІУСІВ П'ЯТИ ВЗАЄМНО НЕПЕРЕТИННИХ ОБЛАСТЕЙ

We study the extremal V. N. Dubinin problem in the geometric theory of functions of complex variables connected with the estimates of a functional defined on a system of nonoverlapping domains. A particular solution of this problem is obtained.

Рассматривается экстремальная проблема В. Н. Дубинина в геометрической теории функций комплексной переменной, связанная с оценкой некоторого функционала, заданного на системе неналегающих областей, и найдено ее частное решение.

У геометричній теорії функцій комплексної змінної значне місце займають екстремальні задачі на класах областей, що не перетинаються, або, іншими словами, задачі про екстремальне розбиття. З історією розвитку даного напрямку можна ознайомитися, наприклад, в [1 – 4]. Було отримано багато вагомих результатів, але водночас значна кількість задач не розв'язана і досі. Одній із таких задач і присвячено дану роботу. Дана задача була сформульована в роботі [1, с. 68].

Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ — множини натуральних і комплексних чисел відповідно, G_j — область в $\overline{\mathbb{C}}$, $r(G_j, g_j)$ — внутрішній радіус області G_j у точці g_j (див., наприклад, [1 – 4]).

Задача 1. Знайти максимум виразу

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(G_0, g_0) \prod_{k=1}^{n} r(G_k, g_k), \tag{1}$$

де $G_0,\ G_1,\ G_2,\ \ldots, G_n,\ n \geq 2,$ — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $g_0 = 0,\ |g_k| = 1,\ k = \overline{1,n}$, $r(G_j, g_j)$ — внутрішній радіус області G_j у точці g_j, $g_j \in G_j$, $j = \overline{0,n}$ і $\gamma \leq n$, і описати екстремальні конфігурації областей.

У роботі [2] було розв'язано дану задачу при $n \geq 2$ і $\gamma = 1$. Л. В. Ковальов у 1996 р. в роботі [5] отримав розв'язок задачі 1 при певних суттєвих обмеженнях на геометрію розташування систем точок на одиничному колі і при $n \geq 5$. У роботі [3] задачу 1 було розв'язано для $\gamma > 1$, але починаючи з деякого, заздалегідь невідомого номера n.

Зауважимо, що випадки $n = 2, 3, 4$ при $\gamma > 1$ є одними з найскладніших у даній проблемі. Деякі конкретні результати при даних значеннях n були отримані в роботах [6, 7]. У статті [8] для випадку $n = 4$ було розповсюджено результат роботи [5] при $\gamma \in (1; 4]$. Однак найкращим результатом при $n = 4$ без додаткових умов на розташування точок g_k при $k = \overline{1,4}$ на момент написання даної роботи була теорема 2 з роботи [6], де задачу 1 було розв'язано для $\gamma \in (1; 1,7]$. Вивченню випадку $n = 4$ і присвячено дану роботу.

Зауважимо, що для опису екстремальних конфігурацій областей ми будемо використовувати квадратичний диференціал (див., наприклад, [3, с. 63 – 70]).

У даній роботі встановлено такі результати.

Теорема 1. *Для* $n = 4$ *і* $\gamma \in (1; 2,09]$ *виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(G_0, g_0) \prod_{k=1}^{4} r(G_k, g_k) \leq r^{\gamma}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{4} r(D_k, d_k),$$

причому $d_k = (i)^{k-1}$, $0 \in D_0$, $d_k \in D_k$, $k = \overline{1,4}$, *де* D_k, d_k — *відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(16-\gamma)w^4 + \gamma}{w^2(w^4-1)^2} dw^2.$$

Теорема 2. *Для* $n = 4$ *і довільного* $2,09 < \gamma \leq 4$ *при додатковій умові* $r(G_0, g_0) \leq \dfrac{1}{2}$ *виконується нерівність*

$$I_4(\gamma) < \frac{\left(\dfrac{\gamma}{4}\right)^{\frac{\gamma}{4}}}{\left(1 - \dfrac{\gamma}{16}\right)^{4+\frac{\gamma}{4}}} \left(\frac{1 - \dfrac{\sqrt{\gamma}}{4}}{1 + \dfrac{\sqrt{\gamma}}{4}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{2}$$

Зауважимо, що теорема 2 доповнює теорему 1, але на значно вужчому класі областей.

***Доведення теореми* 1** розіб'ємо на 2 частини.

1. *Випадок* $\gamma \in (1,7; 2]$. Для $\gamma = 1$ задачу повністю розв'язано в роботі [2]. З методу цієї роботи також випливає, що цей результат є правильним і для $0 < \gamma < 1$. В роботі [6] задачу розв'язано для $\gamma \in (1; 1,7]$.

Згідно з умовою задачі, $g_0 = 0$, $|g_k| = 1$, $k = \overline{1,4}$. Припустимо для конкретності, що

$$0 = \arg g_1 < \arg g_2 < \arg g_3 < \arg g_4 < 2\pi.$$

Далі, означимо числа α_k таким чином:

$$\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg g_2 - \arg g_1), \qquad \alpha_2 := \frac{1}{\pi}(\arg g_3 - \arg g_2),$$
$$\alpha_3 := \frac{1}{\pi}(\arg g_4 - \arg g_3), \qquad \alpha_4 := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg g_4).$$

Доведемо, що області, які можуть бути екстремальними, задовольняють умову $\alpha_0 \leq \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$, де $\alpha_0 = \max\{\alpha_k\}$, $k = \overline{1,4}$. Припустимо протилежне, а саме $\alpha_0 > \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Обчислимо значення функціонала

$$I_4^0(\gamma) = r^{\gamma}(D_0, d_0) \prod_{k=1}^{4} r(D_k, d_k).$$

Згідно з теоремою 5.2.3 з роботи [3],

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Врахувавши, що $n = 4$, отримаємо

$$I_4^0(\gamma) = \frac{\left(\frac{\gamma}{4}\right)^{\frac{\gamma}{4}}}{\left(1-\frac{\gamma}{16}\right)^{4+\frac{\gamma}{4}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{4}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{4}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{3}$$

Виконаємо в (1) такі перетворення:

$$I_4(\gamma) = r^{\gamma}(G_0, g_0) \prod_{k=1}^{4} r(G_k, g_k) =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{4} \left(r(G_0, g_0) r(G_k, g_k) r(G_{k+1}, g_{k+1})\right)\right)^{\frac{\gamma}{4}} \left(\prod_{k=1}^{4} r(G_k, g_k)\right)^{1-\frac{\gamma}{2}},$$

де $G_5 = G_1, g_5 = g_1$.

Згідно з теоремою Голузіна [9, с. 165], виконуються нерівності

$$r(G_0, g_0) r(G_k, g_k) r(G_{k+1}, g_{k+1}) \leq \frac{64}{81\sqrt{3}} |g_k - g_0| \, |g_{k+1} - g_0| \, |g_{k+1} - g_k| =$$

$$= \frac{64}{81\sqrt{3}} |g_{k+1} - g_k|$$

для кожного $k = \overline{1, 4}$. Звідси отримуємо

$$\prod_{k=1}^{4} \left(r(G_0, g_0) r(G_k, g_k) r(G_{k+1}, g_{k+1})\right)^{\frac{\gamma}{4}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{64}{81\sqrt{3}}\right)^{\gamma} \left(|g_2 - g_1||g_3 - g_2||g_4 - g_3||g_1 - g_4|\right)^{\frac{\gamma}{4}}.$$

Враховуючи, що $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, і досліджуючи добуток $(|g_2 - g_1||g_3 - g_2||g_4 - g_3||g_1 - g_4|)$ на екстремум при даній умові на α_0, переконуємося, що його максимальне значення досягається у випадку, коли

$$|g_2 - g_1| = |g_3 - g_2| = |g_4 - g_3| = 2\sin\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\frac{\pi}{3}.$$

Тоді $|g_1 - g_4| = 2\sin\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)$.

Нехай $\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) = \mu(\gamma)$. У цьому випадку маємо

$$\prod_{k=1}^{4}\left(r^{\gamma}(G_0, g_0) r(G_k, g_k) r(G_{k+1}, g_{k+1})\right)^{\frac{\gamma}{4}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{128}{81\sqrt{3}}\right)^{\gamma}\left(\sin^3\left(\frac{\mu(\gamma)}{3}\right)\sin\mu(\gamma)\right)^{\frac{\gamma}{4}} \leq$$

$$\leq (0,912356)^{1,7}\left(\sin^3\left(\frac{\mu(\gamma)}{3}\right)\sin\mu(\gamma)\right)^{\frac{\gamma}{4}}.$$

Далі, згідно з теоремою Кузьміної [4, с. 25], отримуємо

$$\prod_{k=1}^{4} r(G_k, g_k) \leq \frac{9}{4^{\frac{8}{3}}}\left(|g_1 - g_2|\,|g_1 - g_3|\,|g_2 - g_3|\,|g_1 - g_4|\,|g_2 - g_4|\,|g_3 - g_4|\right)^{\frac{2}{3}} \leq$$

$$\leq 16\frac{9}{4^{\frac{8}{3}}}\sin^2\left(\frac{\mu(\gamma)}{3}\right)\sin^{\frac{4}{3}}\left(\frac{2\mu(\gamma)}{3}\right)\sin^{\frac{2}{3}}\mu(\gamma) < 1$$

для $\gamma \in (1,7; 2]$.

Підсумовуючи викладене, одержуємо

$$I_4(\gamma) \leq (0,912356)^{1,7}\left(\sin^3\left(\frac{\mu(\gamma)}{3}\right)\sin\mu(\gamma)\right)^{\frac{\gamma}{4}}.$$

Для $\gamma = 2$ маємо $I_4(\gamma) \leq 0,126623$. Водночас $I_4^0(\gamma) = 0,15947244$ при $\gamma = 2$ (див. (3)), тобто $I_4(\gamma) < I_4^0(\gamma)$ при $\gamma = 2$. Якщо ж $\gamma \in (1,7; 2)$, то

$$(0,912356)^{1,7}\left(\sin^3\left(\frac{\mu(\gamma)}{3}\right)\sin\mu(\gamma)\right)^{\frac{\gamma}{4}} < I_4(2),$$

водночас $I_4^0(\gamma) > I_4^0(2)$, тобто $I_4(\gamma) < I_4^0(\gamma)$ для $\gamma \in (1,7; 2)$.

Таким чином, для $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ конфігурації областей не можуть бути екстремальними.

Звідси $\alpha_0 \leq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, і за теоремою 1 з роботи [8] екстремальною є конфігурація, вказана в умові даної теореми. Для $\gamma \in (1,7; 2]$ теорему доведено.

2. *Випадок* $\gamma \in (2; 2,09]$. Виконаємо такі перетворення:

$$I_4(\gamma) = r^{\gamma}(G_0, g_0) \prod_{k=1}^{4} r(G_k, g_k) = r^{\gamma-2}(G_0, g_0) \left(r^2(G_0, g_0) \prod_{k=1}^{4} r(G_k, g_k) \right) =$$

$$= r^{\gamma-2}(G_0, g_0) \left(\prod_{k=1}^{4} \left(r(G_0, g_0) r(G_k, g_k) r(G_{k+1}, g_{k+1}) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq r^{\gamma-2}(G_0, g_0) \left(\frac{64}{81\sqrt{3}} \right)^2 \left(|g_2 - g_1||g_3 - g_2||g_4 - g_3||g_1 - g_4| \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq r^{\gamma-2}(G_0, g_0) \left(\frac{128}{81\sqrt{3}} \right)^2 \left(\sin^3 \left(\frac{\mu(\gamma)}{3} \right) \sin \mu(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Згідно з лемою 1 із роботи [6],

$$r(G_0, g_0) \leq \left(I_4^0(\gamma) \right)^{\frac{1}{\gamma-4}}.$$

Для $\gamma = 2,09$ отримуємо

$$I_4(\gamma) \leq \left(I_4^0(2,09) \right)^{\frac{1}{2,09-4}} \left(\frac{128}{81\sqrt{3}} \right)^2 \left(\sin^3 \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2,09}} \right) \frac{\pi}{3} \right) \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2,09}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 0,147638.$$

Водночас $I_4^0(2,09) \approx 0,150321$, тобто для $\gamma = 2,09$ виконується нерівність $I_4(\gamma) < I_4^0(\gamma)$. Для $\gamma \in (2; 2,09)$ виконуються такі нерівності: $I_4(\gamma) \leq I_4(2,09)$, $I_4^0(2,09) \leq I_4^0(\gamma)$, тобто $I_4(\gamma) < I_4^0(\gamma)$ для $\gamma \in (2; 2,09)$. Таким чином, для $\alpha_0 > \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$ конфігурації областей не можуть бути екстремальними.

Звідси $\alpha_0 \leq \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$, і за теоремою 1 з роботи [8] екстремальною є конфігурація, вказана в умові даної теореми. Для випадку $\gamma \in (2; 2,09]$ теорему доведено.

Таким чином, теорему 1 доведено повністю.

Доведення теореми **2.** Зауважимо, що вираз, який міститься у правій частині нерівності (2), дорівнює значенню функціонала $I_4^0(\gamma)$.

За умовою

$$I_4(\gamma) = r^{\gamma}(G_0, g_0) \prod_{k=1}^{4} r(G_k, g_k) \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{\gamma} \prod_{k=1}^{4} r(G_k, g_k) \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} \right)^{\gamma} \frac{9}{4^{\frac{8}{3}}} \left(|g_1 - g_2| \, |g_1 - g_3| \, |g_2 - g_3| \, |g_1 - g_4| \, |g_2 - g_4| \, |g_3 - g_4| \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Остання нерівність виконується за вищезгаданою теоремою Кузьміної [4]. Далі, враховуючи, що $\alpha_0 > \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$, і досліджуючи останній вираз на екстремум при даній умові на α_0, отримуємо нерівність

$$I_4(\gamma) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma} 16\frac{9}{4^{\frac{8}{3}}} \sin^2\left(\frac{\mu(\gamma)}{3}\right) \sin^{\frac{4}{3}}\left(\frac{2\mu(\gamma)}{3}\right) \sin^{\frac{2}{3}}\mu(\gamma).$$

Нехай $16\frac{9}{4^{\frac{8}{3}}} \sin^2\left(\frac{\mu(\gamma)}{3}\right) \sin^{\frac{4}{3}}\left(\frac{2\mu(\gamma)}{3}\right) \sin^{\frac{2}{3}}\mu(\gamma) = \Phi(\gamma)$. Розіб'ємо проміжок $\gamma \in (2,09;4]$ на кілька менших проміжків.

Нехай спочатку $\gamma \in (2,09;2,8]$. Тоді, враховуючи, що $\Phi(\gamma)$ зростає, одержуємо

$$I_4(\gamma) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2,09} \Phi(2,8) = 0,092058.$$

Водночас

$$I_4^0(2,8) = 0,097443,$$

тобто для $\gamma \in (2,09;2,8]$

$$I_4(\gamma) < 0,092058 < I_4^0(2,8) < I_4^0(\gamma),$$

а отже, для $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ і $\gamma \in (2,09;2,8]$ конфігурації областей не можуть бути екстремальними.

Нехай тепер $\gamma \in (2,8;3,2]$. Тоді

$$I_4(\gamma) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2,8} \Phi(3,2) = 0,074467 < 0,078027 \approx I_4^0(3,2),$$

тобто для $\gamma \in (2,8;3,2]$

$$I_4(\gamma) < 0,074467 < I_4^0(3,2) < I_4^0(\gamma),$$

а отже, для $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ і $\gamma \in (2,8;3,2]$ конфігурації областей не можуть бути екстремальними.

Аналогічно для $\gamma \in (3,2;3,5]$

$$I_4(\gamma) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3,2} \Phi(3,5) \approx 0,065995 < 0,066642 < I_4^0(3,5) \leq I_4^0(\gamma).$$

Для $\gamma \in (3,5;3,7]$

$$I_4(\gamma) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3,5} \Phi(3,7) \approx 0,058435 < 0,060225 < I_4^0(3,7) \leq I_4^0(\gamma).$$

Для $\gamma \in (3,7;3,85]$

$$I_4(\gamma) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3,7} \Phi(3,85) \approx 0,053862 < 0,05593 < I_4^0(3,85) \leq I_4^0(\gamma).$$

Для $\gamma \in (3,85;4]$

$$I_4(\gamma) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3,85} \Phi(4) \approx 0,051116 < 0,052025 < I_4^0(4) \leq I_4^0(\gamma),$$

звідки випливає, що для $\gamma \in (2,09;4]$ і $\alpha_0 > \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$

$$I_4(\gamma) < I_4^0(\gamma) = \frac{\left(\frac{\gamma}{4}\right)^{\frac{\gamma}{4}}}{\left(1-\frac{\gamma}{16}\right)^{4+\frac{\gamma}{4}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{4}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{4}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Звідси $\alpha_0 \leq \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$ і за теоремою 1 із роботи [8] випливає нерівність, вказана в умові даної теореми.

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1(295). – С. 3 – 76.
2. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48 – 66.
3. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **73**. – 308 с.
4. *Кузьмина Г. В.* Методы геометрической теории функций // Алгебра и анализ. – 1997. – **9**, № 5. – С. 1 – 50.
5. *Ковалев Л. В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневост. мат. сб. – 1996. – **2**. – С. 96 – 98.
6. *Заболотний Я. В.* Про одну екстремальну задачу В. М. Дубініна // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 1. – С. 24 – 31.
7. *Бахтін О. К., Заболотний Я. В.* Оцінки добутку внутрішніх радіусів трьох неперетинних областей // Доп. НАН України. – 2013. – № 10. – С. 7 – 10.
8. *Бахтин А. К., Денега И. В.* Метод разделяющего преобразования в задачах о максимуме произведения степеней внутренних радиусов неналегающих областей // Аналіз і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 32 – 44.
9. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

Одержано 22.12.15