УДК 533.72

В. Д. Гордевський (Харків. нац. ун-т ім. В. Н. Каразіна),
О. О. Гукалов (Фіз.-техн. ін-т низьких температур ім. Б. І. Вєркіна, Харків)

НЕСКІНЧЕННОМОДАЛЬНІ НАБЛИЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ БОЛЬЦМАНА*

For the nonlinear kinetic Boltzmann equation in the case of a model of hard spheres, we construct an approximate solution in the form of a series of Maxwellian distributions with coefficient functions of time and the space coordinate. We establish the sufficient conditions for the coefficient functions and the values of hydrodynamic parameters appearing in the distribution that enable us to make the analyzed deviation arbitrarily small.

Для нелинейного кинетического уравнения Больцмана в случае модели твердых шаров построено приближенное решение в виде ряда максвелловских распределений с коэффициентными функциями времени и пространственной координаты. Получены достаточные условия на коэффициентные функции и гидродинамические параметры, входящие в распределение, которые дают возможность сделать рассмотренное отклонение сколь угодно малым.

1. Вступ. Одним із основних рівнянь у кінетичній теорії газів є рівняння Больцмана [1, 2]. Для моделі твердих куль воно має вигляд

$$D(f) = Q(f, f), \tag{1}$$

де диференціальний оператор $D(f)$ аналітично виражається так:

$$D(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \tag{2}$$

а інтеграл зіткнень

$$\begin{aligned} Q(f, f) \equiv \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(V - V_1, \alpha)| \times \\ \times \Big[f(t, x, V') f(t, x, V_1') - f(t, x, V) f(t, x, V_1) \Big]. \end{aligned} \tag{3}$$

У виразах (1)–(3) шукана функція $f(t, x, V)$ є функцією розподілу частинок; параметр $t \in \mathbb{R}$ позначає час; $V = (V^1, V^2, V^3)$ — швидкість молекули; $x = (x^1, x^2, x^3)$ — просторова координата, що визначає розташування частинки; через $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ позначено градієнт функції розподілу за змінною x; $d > 0$ — діаметр частинки; вектор α належить $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, де Σ — одинична сфера; V, V_1, V', V_1' — швидкості частинок до та після зіткнення відповідно, які пов'язані таким чином:

$$\begin{aligned} V' &= V - \alpha(V - V_1, \alpha), \\ V_1' &= V_1 + \alpha(V - V_1, \alpha). \end{aligned} \tag{4}$$

---

* Виконано за часткової підтримки НАН України (проект „Лінійні еволюційні рівняння у гільбертовому просторі та рівняння Больцмана").

2. Постановка задачі. Максвеліани є єдиним, відомим на сьогоднішній час, точним розв'язком рівняння Больцмана, який вдалося отримати в явному вигляді. Найбільш загальний вигляд локальних максвеліанів (тобто таких, що залежать від t і x) було отримано у роботах [2–4]; у статті [5] його докладно досліджено з точки зору геометричної структури та фізичного сенсу.

У працях авторів (у тому числі [6, 7]) були побудовані бімодальні розподіли у вигляді суми двох максвеліанів з коефіцієнтними функціями, що залежать від t та x. У цій роботі ми побудуємо нескінченномодальні наближені розв'язки, тобто такі, які зображуються у вигляді ряду

$$f(t,x,V)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(t,x)M_i(V), \tag{5}$$

де $\varphi_i(t,x)$ (тут і скрізь далі індекс $i\in\mathbb{N}$) — невід'ємні, гладкі на $\mathbb{R}^4$ функції, а в якості максвеліанів M_i спочатку розглянемо глобальні максвеліани

$$M_i(V)=\rho_i\left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2}e^{-\beta_i\left(V-\overline{V}_i\right)^2}, \tag{6}$$

де ρ_i — додатна стала, що позначає густину потоку, β_i — величина, обернена до температури,

$$\beta_i=\frac{1}{2T_i}; \tag{7}$$

сталий вектор $\overline{V}_i\in\mathbb{R}^3$ означає масову швидкість.

У якості міри відхилення між частинами рівняння (1) будемо розглядати рівномірно інтегральний відхил, що має вигляд

$$\Delta=\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dV\Big|D(f)-Q(f,f)\Big|. \tag{8}$$

Мета роботи полягає у знаходженні вигляду коефіцієнтних функцій $\varphi_i(t,x)$ та визначенні умов на гідродинамічні параметри максвеліанів (6) таких, щоб відхил (8) можна було зробити як завгодно малим.

3. Основні результати. Сформулюємо та доведемо кілька теорем, що допоможуть досягти поставленої мети: мінімізації відхилу (8) для розподілу (5).

Теорема 1. *Нехай коефіцієнтні функції* $\varphi_i(t,x)$ *у розподілі* (5) *такі, що функціональні ряди*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_iM_i,\quad \sum_{i=1}^{\infty}|V|\varphi_iM_i,\quad \sum_{i=1}^{\infty}M_i\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\right|,\quad \sum_{i=1}^{\infty}M_i|V|\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right| \tag{9}$$

збігаються рівномірно в усьому просторі зміни $(t,x,V):\mathbb{R}^7$ *та функції*

$$\varphi_i,\quad \frac{\partial\varphi_i}{\partial t},\quad \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right| \tag{10}$$

обмежені на $\mathbb{R}^4$.

Тоді існує така величина Δ', *що*

$$\Delta\le\Delta', \tag{11}$$

та справджується рівність

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta' = \sum_{i=1}^{\infty}\rho_i \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}+\left(\overline{V}_i,\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)\right| + 2\pi d^2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\infty}\rho_i\rho_j\left|\overline{V}_i-\overline{V}_j\right| \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}(\varphi_i\varphi_j). \quad (12)$$

***Зауваження* 1.** Тут і далі мається на увазі, що $\beta_i > \overline{\beta}$, причому $\overline{\beta}\to+\infty$.

Доведення. Підставимо розподіл (5) у ліву частину рівняння (1), використавши вираз (2) з огляду на умову (9):

$$D(f) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i M_i\right) + \left(V,\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i M_i\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} M_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\frac{\partial M_i}{\partial t} + \left(V,\sum_{i=1}^{\infty}M_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right) + \left(V,\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\frac{\partial M_i}{\partial t}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} M_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(V, M_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\frac{\partial M_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(V,\varphi_i\frac{\partial M_i}{\partial t}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} M_i D(\varphi_i) + \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i D(M_i).$$

Оскільки M_i є точним розв'язком рівняння (1), який обертає обидві його частини на 0, то

$$D(f) = \sum_{i=1}^{\infty} M_i D(\varphi_i). \quad (13)$$

Далі отримаємо інтеграл зіткнень $Q(f,f)$ у випадку розподілу (5), використавши означення (3):

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int_{\Sigma} d\alpha\left|(V-V_1,\alpha)\right|\times$$

$$\times\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i M_i(V')\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i M_i(V_1')\right) - \left(\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i M_i(V)\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i M_i(V_1)\right)\right].$$

Застосовуючи відому теорему Коші про добуток рядів, завдяки умові (9) маємо

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int_{\Sigma} d\alpha\left|(V-V_1,\alpha)\right|\times$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i^2 M_i(V')M_i(V_1') + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\infty}\varphi_i\varphi_j M_i(V')M_j(V_1') - \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i^2 M_i(V)M_i(V_1) - \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\infty}\varphi_i\varphi_j M_i(V)M_j(V_1)\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i^2 Q(M_i,M_i) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\infty}\varphi_i\varphi_j Q(M_i,M_j),$$

і знову враховуючи, що $Q(M_i, M_i) = 0$, остаточно отримуємо

$$Q(f,f) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\infty} \varphi_i\varphi_j Q(M_i, M_j). \tag{14}$$

Використовуючи вирази (13), (14) для частин рівняння Больцмана при обчисленні розподілу (5), одержуємо оцінку

$$\Big|D(f) - Q(f,f)\Big| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} M_i \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)\right) - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\infty} \varphi_i\varphi_j Q(M_i, M_j)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} M_i \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)\right| + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\infty} \varphi_i\varphi_j |Q(M_i, M_j)|. \tag{15}$$

Покажемо, що другий ряд у останній нерівності рівномірно збігається в усьому просторі $\mathbb{R}^7$ завдяки умовам теореми. Має місце оцінка

$$\varphi_i\varphi_j|Q(M_i, M_j)| =$$

$$= \frac{d^2}{2}\varphi_i\varphi_j \left| \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha \Big|(V - V_1, \alpha)\Big| \left[M_i(V')M_j(V_1') - M_i(V)M_j(V_1)\right] \right| =$$

$$= \frac{d^2}{2} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha \Big|(V - V_1, \alpha)\Big| \left[M_i(V')M_j(V_1') - M_i(V)M_j(V_1)\right] \varphi_i\varphi_j \right| \leq$$

$$\leq \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha \Big|(V - V_1, \alpha)\Big| \left| \left[M_i(V')M_j(V_1') - M_i(V)M_j(V_1)\right] \varphi_i\varphi_j \right| \leq$$

$$\leq \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV_1 4\pi \left(|V| + |V_1|\right) \cdot 2M_i(V)M_j(V_1)\varphi_i\varphi_j =$$

$$= 4\pi d^2 \left(|V|\varphi_i M_i(V) \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV_1 M_j(V_1)\varphi_j + \varphi_i M_i(V) \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV_1 M_j(V_1)\varphi_j \right),$$

що є результатом множення рядів вигляду $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i M_i$, $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j M_j |V|$ та інтегрування одного з них, але використовуються лише члени з $i \neq j$. Оскільки збіжність добутку гарантована умовою (9), то очевидно, що другий ряд у (15) збігається рівномірно в усьому просторі $\mathbb{R}^7$.

Тепер зінтегруємо нерівність (15) по простору швидкостей V, що можливо завдяки умові (9), яка, як було показано вище, забезпечує рівномірну збіжність рядів у правій частині останньої нерівності:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dV \Big| D(f) - Q(f,f) \Big| \le \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV M_i \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \right| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV \varphi_i \varphi_j |Q(M_i, M_j)|. \quad (16)$$

Як було продемонстровано в [1],

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dV Q(M_i, M_j) = 0.$$

Беручи до уваги розклад $Q(M_i, M_j)$ на „прибутковий” та „витратний” члени [1, 6]

$$Q(f,g) = G(f,g) - fL(g),$$

де

$$G(f,g) = \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(V - V_1, \alpha)| f(t, x, V_1^*) g(t, x, V^*),$$

$$L(g) = \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(V - V_1, \alpha)| g(t, x, V_1),$$

маємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} G(M_i, M_j) dV = \int\limits_{\mathbb{R}^3} M_i L(M_j) dV.$$

З урахуванням наведеного продовжимо оцінку (16):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dV \Big| D(f) - Q(f,f) \Big| \le \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV M_i \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \right| + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV \varphi_i \varphi_j G(M_i, M_j). \quad (17)$$

У роботі [6] було доведено, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dV G(M_i, M_j) = \frac{d^2 \rho_i \rho_j}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_i}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_j}} + \overline{V}_i - \overline{V}_j \right|. \quad (18)$$

Із використанням рівності (18) оцінка (17) набирає вигляду

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dV \Big| D(f) - Q(f,f) \Big| \le \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV M_i \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \right| +$$
$$+ 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{d^2 \rho_i \rho_j}{\pi^2} \varphi_i \varphi_j \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_i}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_j}} + \overline{V}_i - \overline{V}_j \right|. \quad (19)$$

Далі, переходимо до супремума в нерівності (19) по всьому простору $(t, x) \in \mathbb{R}^4$. Враховуючи умову (10) та вигляд відхилу (8), переконуємося, що нерівність (11) виконується для величини Δ' вигляду

$$\Delta' = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV e^{-\beta_i (V-\overline{V}_i)^2} \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right)\right| +$$

$$+2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\infty} \frac{d^2 \rho_i \rho_j}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_i}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_j}} + \overline{V}_i - \overline{V}_j \right| \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} (\varphi_i \varphi_j).$$

В інтегралі першого функціонального ряду виконаємо заміну змінних

$$p = \sqrt{\beta_i}(V - \overline{V}_i),$$

якобіан якої $J = \beta_i^{-3/2}$ та $V = \dfrac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i$. Тоді

$$\Delta' = \pi^{-3/2} \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV e^{-p^2} \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right)\right| +$$

$$+2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\infty} \frac{d^2 \rho_i \rho_j}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_i}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_j}} + \overline{V}_i - \overline{V}_j \right| \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} (\varphi_i \varphi_j). \tag{20}$$

Виконавши перепозначення

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{\beta_i}}, \tag{21}$$

отримаємо

$$\Delta' = \pi^{-3/2} \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV e^{-p^2} \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(p\gamma_i + \overline{V}_i, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right)\right| +$$

$$+2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\infty} \frac{d^2 \rho_i \rho_j}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2} \left| q\gamma_i - q_1\gamma_j + \overline{V}_i - \overline{V}_j \right| \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} (\varphi_i \varphi_j). \tag{22}$$

Граничний перехід у (20) при $\beta_i \to +\infty$ рівносильний тому, що $\gamma_i \to +0$ у (22), для чого потрібна неперервність виразу (22) в нулі, яку забезпечує умова рівномірної збіжності (9) та очевидна оцінка $|\gamma_i| \leq \dfrac{1}{\beta}$ (див. зауваження 1). Тоді з огляду на лему з роботи [8] про неперервність супремума за параметром та теорему про неперервність інтеграла та функціонального ряду за параметром маємо

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta' = \pi^{-3/2} \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i \int\limits_{\mathbb{R}^3} dp e^{-p^2} \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\overline{V}_i, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right)\right| +$$

$$+2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\infty} \frac{d^2 \rho_i \rho_j}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2} \left| \overline{V}_i - \overline{V}_j \right| \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} (\varphi_i \varphi_j).$$

Обчислюючи інтеграли у сумах, отримуємо (12), що і доводить теорему.

***Наслідок* 1.** *Нехай функції* φ_i *мають вигляд*

$$\varphi_i(t,x) = C_i(x - \overline{V}_i t), \tag{23}$$

або

$$\varphi_i(t,x) = E_i\left(\left[x, \overline{V}_i\right]\right), \tag{24}$$

причому функції C_i, E_i *такі, що задовольняють умови* (9), (10). *Крім того, нехай виконується хоча б одна з вимог*

$$\overline{V}_i = \overline{V}_j, \tag{25}$$

$$\operatorname{supp}\varphi_i \cap \operatorname{supp}\varphi_j = \varnothing, \quad i \neq j, \tag{26}$$

$$d \to 0. \tag{27}$$

Тоді відхил (8) *для розподілу* (5) *можна зробити як завгодно малим.*

Доведення. Якщо функції φ_i мають вигляд (23), то

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = -(\overline{V}_i, C_i'), \qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = C_i'.$$

Покажемо, що у випадку функції φ_i вигляду (23) виконуються умови теореми 1, а саме рівномірна збіжність рядів (9), якщо функції C_i такі, що умова (10) виконується. Ряди $\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i M_i$ та $\sum_{i=1}^{\infty} M_i \left|\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t}\right|$ внаслідок обмеженості функцій C_i та їх похідних (завдяки умові (10)) очевидно збігаються рівномірно в усьому просторі $\mathbb{R}^7$.

Розглянемо ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i(x - \overline{V}_i t)|V|\rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta_i (V - \overline{V}_i)^2},$$

де

$$\left| C_i(x - \overline{V}_i t)|V|\rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta_i (V - \overline{V}_i)^2} \right| \leq$$

$$\leq K_i |V| \beta_i^{3/2} e^{-\beta_i (V - \overline{V}_i)^2},$$

стала $K_i > 0$. Тоді, ввівши позначення $V - \overline{V}_i = w_i$, $V = w_i + \overline{V}_i$, отримаємо

$$K_i |w_i + \overline{V}_i| \beta_i^{3/2} e^{-\beta_i w_i^2} \leq$$

$$\leq K_i |w_i| \beta_i^{3/2} e^{-\beta_i w_i^2} + K_i |\overline{V}_i| \beta_i^{3/2} e^{-\beta_i w_i^2}.$$

Звичайно, другий доданок обмежений по w_i, а обмеженість першого випливає з такого:

$$\sup_{w_i \in \mathbb{R}^3} |w_i| e^{\beta_i w_i^2} \overset{z=|w_i|}{=} \sup_{z \in \mathbb{R}_+} z e^{-\beta_i z^2} = \frac{1}{\sqrt{2e\beta_i}}.$$

Знайдені похідні обертають у нуль першу суму у (12), а виконання однієї з умов (25), (26) або (27) обертає в нуль другу суму. З урахуванням нерівності (11) та невід'ємного відхилу (8) маємо нескінченну мализну розглянутого рівномірно інтегрального відхилу (8) для розподілу (5) з коефіцієнтними функціями φ_i вигляду (23).

Якщо коефіцієнтні функції φ_i мають вигляд (24), то похідна за часом дорівнює нулю, а градієнт по x добуток $\left(\overline{V}_i, \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)$ обертає в нуль. Тоді знову з урахуванням однієї з умов (25), (26) або (27) отримуємо, що відхил (8) можна зробити як завгодно малим.

Наслідок 1 доведено.

***Зауваження* 2.** Враховуючи, що розглянутий розподіл (5) містить суму нескінченної кількості максвеліанів, бачимо, що для нескінченної мализни рівномірно інтегрального відхилу (8) можна вибирати не лише одну з умов (25), (26), а кілька одночасно для різних наборів максвеліанів.

***Зауваження* 3.** З фізичної точки зору побудований наближений розв'язок описує взаємодію нескінченного набору плинів у газі з твердих куль, кожен з яких відповідає або згустку газу (23), або циліндричному розподілу (24), причому кожні два з цих плинів або мають однакові лінійні швидкості, або не перетинаються у просторі, або всі відповідають навколокнудсенівському газу.

Тепер розглянемо стаціонарний неоднорідний максвеліан [1, 5, 6], тобто на відміну від максвеліана, який залежить лише від швидкості молекули V, з'являється залежність від просторової координати x. Структура максвеліана M_i (6) залишається без змін, але, на відміну від глобального, густина ρ_i має вигляд

$$\rho_i = \rho_{0i} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}, \tag{28}$$

де ρ_{0i} — невід'ємна скалярна стала, а квадрат відстані r_i^2 визначається виразом

$$r_i^2 = \frac{1}{\overline{\omega}_i^2}[\overline{\omega}_i, x - x_{0i}]^2, \tag{29}$$

що задає відстань від молекули до осі обертання x_{0i} у момент часу $t = 0$,

$$x_{0i} = \frac{1}{\overline{\omega}_i^2}\left[\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i\right]. \tag{30}$$

Тут $\overline{\omega}_i$ — кутова швидкість течії газу в цілому, а $\widehat{V}_i$ — довільна векторна стала. Також, на відміну від (6), масова швидкість $\overline{V}_i$ залежить від розташування молекули таким чином:

$$\overline{V}_i = \widehat{V}_i + [\overline{\omega}_i, x]. \tag{31}$$

Стаціонарний неоднорідний максвеліан описує гвинтовий рух течії газу, що обертається навколо осі x_{0i}.

Як і раніше, розв'язок рівняння (1) – (3) будемо шукати у вигляді (5), за винятком того, що максвеліани M_i залежать тепер і від x у зв'язку з новим виглядом густини (28) та масової швидкості (31).

Теорема 2. *Нехай коефіцієнтні функції $\varphi_i(t,x)$ мають вигляд*

$$\varphi_i(t,x) = e^{-\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \psi_i(t,x), \tag{32}$$

де $\psi_i(t,x)$ — невід'ємні, обмежені, гладкі в усьому просторі R^4 функції, що задовольняють умови (9), (10) *з підстановкою замість φ_i функції ψ_i, та, крім того, функції*

$$\psi_i|x|, \quad \left([\overline{\omega}_i, x], \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right) \tag{33}$$

є обмеженими, а функціональні ряди з таким загальним членом збігаються рівномірно на R^4.

Також нехай виконується умова

$$\overline{\omega}_i = \overline{\omega}_{0i}\beta_i^{-k_i}, \tag{34}$$

де $k_i \geq \dfrac{1}{2}$. *Тоді також існує така величина* Δ', *що виконується оцінка* (11), *але замість* (12) *низькотемпературна границя* Δ' *має такий вигляд*:

a) *при* $k_i > \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta' = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\widehat{V}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right) \right| + 2\pi d^2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\infty} \rho_{0i}\rho_{0j} \left|\widehat{V}_i - \widehat{V}_j\right| \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} (\psi_i\psi_j); \tag{35}$$

b) *якщо* $k_i = \dfrac{1}{2}$, *то у правій частині рівності* (35) *з'являється додатковий доданок*

$$4\pi \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{0i} \left|[\overline{\omega}_{0i}, \widehat{V}_i]\right| \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \psi_i. \tag{36}$$

Доведення. Нерівність (19), яка була отримана при доведенні попередньої теореми, залишається у силі, тому, використовуючи новий вигляд густини ρ_i та масової швидкості $\overline{V}_i$, отримуємо оцінку

$$\int_{\mathbb{R}^3} dV \left| D(f) - Q(f,f) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{0i} \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \int_{\mathbb{R}^3} dV e^{-\beta_i\left(V - \widehat{V}_i - [\overline{\omega}_i, x]\right)^2} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right) \right| +$$

$$+2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\infty} \varphi_i\varphi_j \frac{d^2 \rho_{0i}\rho_{0j}}{\pi^2} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2 + \beta_j \overline{\omega}_j^2 r_j^2} \int_{\mathbb{R}^3} dq \int_{\mathbb{R}^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_i}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_j}} + \widehat{V}_i - \widehat{V}_j + [\overline{\omega}_i - \overline{\omega}_j, x] \right|. \tag{37}$$

У першому ряду в (37) під інтегралом виконаємо заміну змінних

$$p = \sqrt{\beta_i}\left(V - \widehat{V}_i - [\overline{\omega}_i, x]\right). \tag{38}$$

Звідси випливає, що

$$V = \frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i + [\overline{\omega}_i, x],$$

а якобіан заміни $J = \beta_i^{-3/2}$. Тоді нерівність (37) з урахуванням (38) набирає вигляду

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dV \Big| D(f) - Q(f,f) \Big| \leq$$

$$\leq \pi^{-3/2} \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{0i} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dp e^{-p^2} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i + [\overline{\omega}_i, x], \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \right| +$$

$$+2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \varphi_i \varphi_j \frac{d^2 \rho_{0i} \rho_{0j}}{\pi^2} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2 + \beta_j \overline{\omega}_j^2 r_j^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_i}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_j}} + \widehat{V}_i - \widehat{V}_j + [\overline{\omega}_i - \overline{\omega}_j, x] \right|. \tag{39}$$

Використовуючи коефіцієнтні функції $\varphi_i(t,x)$ (32), знаходимо частинну похідну $\varphi_i(t,x)$ за часом t:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \tag{40}$$

та градієнт φ_i за просторовою координатою x:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + 2\beta_i \psi_i \Big[\overline{\omega}_i, [\overline{\omega}_i, x - x_{0i}] \Big] \right).$$

Як відомо,

$$\Big[a, [b,c] \Big] = b(a,c) - c(a,b). \tag{41}$$

Отже, враховуючи вигляд осі x_{0i} (30), отримуємо

$$\Big[\overline{\omega}_i, [\overline{\omega}_i, x - x_{0i}] \Big] = \overline{\omega}_i (\overline{\omega}_i, x) - \overline{\omega}_i^2 x + \Big[\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i \Big].$$

Тоді

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + 2\beta_i \psi_i \left(\overline{\omega}_i (\overline{\omega}_i, x) - \overline{\omega}_i^2 x + \Big[\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i \Big] \right) \right). \tag{42}$$

Знайдені похідні шуканих функцій φ_i (40), (42) підставимо у нерівність (39):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dV \Big| D(f) - Q(f,f) \Big| \leq \pi^{-3/2} \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{0i} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} dp e^{-p^2} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i + [\overline{\omega}_i, x], \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + 2\beta_i \psi_i \left(\overline{\omega}_i (\overline{\omega}_i, x) - \overline{\omega}_i^2 x + \Big[\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i \Big] \right) \right) \right| +$$

$$+2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{d^2 \rho_{0i} \rho_{0j}}{\pi^2} \psi_i \psi_j \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_i}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_j}} + \widehat{V}_i - \widehat{V}_j + [\overline{\omega}_i - \overline{\omega}_j, x] \right|,$$

тоді після елементарних перетворень остаточно отримаємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dV \Big| D(f) - Q(f,f) \Big| \leq \pi^{-3/2} \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{0i} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} dp e^{-p^2} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i + [\overline{\omega}_i, x], \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) + 2p\sqrt{\beta_i}\psi_i \left(\overline{\omega}_i(\overline{\omega}_i, x) - \overline{\omega}_i^2 x + \left[\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i \right] \right) \right| +$$

$$+2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{d^2 \rho_{0i} \rho_{0j}}{\pi^2} \psi_i \psi_j \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_i}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_j}} + \widehat{V}_i - \widehat{V}_j + [\overline{\omega}_i - \overline{\omega}_j, x] \right|. \tag{43}$$

Далі, в останній нерівності перейдемо до супремума по всьому простору R^4, існування якого забезпечують умови теореми та лема, що доведена у [8]. В результаті отримаємо нерівність (11) з величиною Δ', яка визначається таким чином:

$$\Delta' =$$

$$= \pi^{-3/2} \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{0i} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dp e^{-p^2} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i + [\overline{\omega}_i, x], \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) + \right.$$

$$\left. +2p\sqrt{\beta_i}\psi_i \left(\overline{\omega}_i(\overline{\omega}_i, x) - \overline{\omega}_i^2 x + \left[\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i \right] \right) \right| +$$

$$+2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{d^2 \rho_{0i} \rho_{0j}}{\pi^2} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \psi_i \psi_j \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_i}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_j}} + \widehat{V}_i - \widehat{V}_j + [\overline{\omega}_i - \overline{\omega}_j, x] \right|. \tag{44}$$

Скористаємось уповільненням кутової швидкості обертання $\overline{\omega}_i$, що забезпечує умова (34). Тоді, виконуючи низькотемпературний граничний перехід, аргументуючи його можливість аналогічно тому, як це зроблено у попередній теоремі, у випадку $k_i > \frac{1}{2}$ отримуємо рівність (35), а додатковий доданок (36) виникає як наслідок використаної нерівності трикутника, тобто

$$\Delta' \leq$$

$$\leq \pi^{-3/2} \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{0i} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dp e^{-p^2} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i + [\overline{\omega}_i, x], \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) + \right.$$

$$\left. +2p\sqrt{\beta_i}\psi_i \left(\overline{\omega}_i(\overline{\omega}_i, x) - \overline{\omega}_i^2 x \right) \right| +$$

$$+2\pi^{-3/2} \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{0i} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dp e^{-p^2} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} |p| \sqrt{\beta_i} \psi_i \left| \left[\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i \right] \right| +$$

$$+2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{d^2 \rho_{0i} \rho_{0j}}{\pi^2} 3\psi_i \psi_j \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_i}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_j}} + \widehat{V}_i - \widehat{V}_j + [\overline{\omega}_i - \overline{\omega}_j, x] \right|, \tag{45}$$

та умови

$$\overline{\omega}_i = \frac{\overline{\omega}_{0i}}{\sqrt{\beta_i}}. \tag{46}$$

Обчислюючи низькотемпературну границю (45), у випадку (46) одержуємо рівність (35) з доданком (36) після обчислення інтеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |p| e^{-p^2} dp = 2\pi,$$

що доводить теорему 2.

Наслідок 2. *Якщо в якості функцій ψ_i розглянути функції C_i, E_i із наслідку* 1, *що задаються формулами* (23), (24), *а також залишити виконання однієї із умов* (25), (26) *або* (27) *із символічною заміною φ_i на ψ_i, то при виконанні* (35) *відхил* (8) *можна зробити як завгодно малим.*

Для випадку $k_i = \dfrac{1}{2}$, крім таких же умов, що накладені, коли показник степеня k_i більший за $\dfrac{1}{2}$, необхідно накласти додаткову умову

$$\overline{\omega}_{0i} || \widehat{V}_i, \tag{47}$$

тоді відхил (8) *знову можна зробити як завгодно малим.*

Доведення цього наслідку повністю аналогічне доведенню наслідку 1.

Теорема 3. *Відмовимось від вимоги* (32), *але будемо вимагати, щоб умови, що накладені на ряди* (9) *та вирази* (10), *виконувались і після їх домноження на множник $e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}$. Крім того, нехай*

$$\overline{\omega}_i = \overline{\omega}_{0i} \beta_i^{-k_i}, \qquad k_i > \frac{1}{2}, \tag{48}$$

та виконується умова паралельності (47).

Тоді, як і раніше, існує така величина Δ', що виконується нерівність (11) *та її низькотемпературна границя збігається з* (35), *де ψ_i замінено на φ_i.*

Доведення. Оцінка (39) із доведення теореми 2 залишається правильною. Переходячи до супремума від обох частин нерівності (39), що дозволяють накладені умови в цій теоремі, отримуємо нерівність (11) та

$$\Delta' =$$

$$= \pi^{-3/2} \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dp e^{-p^2} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i + [\overline{\omega}_i, x], \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \right| +$$

$$+2 \sum_{i,j=1 i\neq j}^{\infty} \frac{d^2 \rho_{0i} \rho_{0j}}{\pi^2} \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \varphi_i \varphi_j e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2 + \beta_j \overline{\omega}_j^2 r_j^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq \int\limits_{\mathbb{R}^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \times$$

$$\times \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_i}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_j}} + \widehat{V}_i - \widehat{V}_j + [\overline{\omega}_i - \overline{\omega}_j, x] \right|. \tag{49}$$

Перетворимо показник експоненти $\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2$, використавши (29):

$$\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2 = \beta_i \Big[\overline{\omega}_i, x - x_{0i} \Big]^2.$$

Далі, використовуючи ще одну формулу векторної алгебри

$$([a,b],[c,d]) = (a,c)(b,d) - (a,d)(b,c),$$

отримуємо

$$\beta_i\left[\overline{\omega}_i, x - x_{0i}\right]^2 = \beta_i\overline{\omega}_i^2(x - x_{0i})^2 - \beta_i(\overline{\omega}_i, x)^2,$$

враховуючи, що з (30) випливає $\overline{\omega}_i \perp x_{0i}$. Тоді на підставі (30) та умови (47) остаточно маємо

$$\beta_i\overline{\omega}_i^2 r_i^2 = \beta_i\overline{\omega}_i^2 x^2 - \beta_i(\overline{\omega}_i, x)^2. \tag{50}$$

Використовуючи умову (48), переконуємось, що

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\beta_i\overline{\omega}_i^2 r_i^2 = 0. \tag{51}$$

Тоді, виконуючи низькотемпературний граничний перехід у (49), аргументуючи повністю аналогічно тому, як це було зроблено в теоремі 1 з урахуванням умови (48) та границі (50), завершуємо доведення теореми.

***Зауваження* 4.** Оскільки теорема 3 з накладеними умовами зберігає рівність (35), де функції ψ_i замінено функціями φ_i (тут мається на увазі, що $\psi_i \equiv \varphi_i$), то ми фактично отримуємо теорему 1, а саме, границю (12), де $\overline{V}_i \equiv \widehat{V}_i$, що дозволяє використати наслідки 1 та 2, врахувавши умови теореми 3.

***Зауваження* 5.** Теореми 2, 3 та наслідок 2 мають фізичний сенс, що аналогічний до описаного у зауваженні 3, але плини, що тепер розглядаються, мають ще й обертальну швидкість, яка паралельна (47) до лінійної, або з тим чи іншим ступенем уповільнюють своє обертання при низьких температурах (див. (46), (48)).

4. Висновки. Побудовано деякі наближені розв'язки рівняння Больцмана для моделі твердих куль, для чого уперше розглянуто нескінченну сумму максвеліанів з коефіцієнтними функціями від часу t та просторової координати x. Розглянуто два випадки максвеллівських мод: глобальний максвеліан та один із локальних — гвинт, аналітичний вираз для якого, на відміну від глобального, залежить не лише від лінійної швидкості молекули, а ще й від її просторової координати. Отримано деякі достатні умови на гідродинамічні параметри розподілу, що дозволяють рівномірно інтегральну похибку (8) між частинами рівняння (1) – (3) зробити нескінченно малою.

Література

1. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. – М.: Мир, 1978. – 495 с.
2. *Карлеман Т.* Математические задачи кинетической теории газов. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 118 с.
3. *Grad H.* On the kinetic theory of rarefield gases // Communs Pure and Appl. Math. – 1949. – **2**, № 4. – P. 331 – 407.
4. *Фридлендер О. Г.* Локально-максвелловские решения уравнения Больцмана // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 5. – С. 973 – 977.
5. *Gordevskyy V. D.* On the non-stationary Maxwellians // Math. Meth. Appl. Sci. – 2004. – **27**, № 2. – P. 231 – 247.
6. *Гордевский В. Д.* Двухпотоковое распределение с винтовыми модами // Теор. и мат. физика. – 2001. – **126**, № 2. – С. 283 – 300.
7. *Gukalov A. A.* Interaction between "accelarating-packing" flows for the Bryan – Pidduck model // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2003. – **9**, № 3. – P. 316 – 331.
8. *Gordevskyy V. D.* Approximate biflow solutions of the kinetic Bryan – Pidduck equation // Math. Meth. Appl. Sci. – 2003. – **23**. – P. 1121 – 1137.

Одержано 26.09.16