УДК 517.956.4

В. М. Лось (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ)

ПАРАБОЛІЧНІ ЗА ПЕТРОВСЬКИМ СИСТЕМИ У ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА

We study a general parabolic initial-boundary-value problem for systems parabolic in Petrovskii's sense with zero initial Cauchy data in some anisotropic Hörmander inner-product spaces. We prove that the operators corresponding to this problem are isomorphisms between the appropriate Hörmander spaces. As an application of this result, we establish a theorem on the local increase in regularity of solutions of the problem. We also obtain new sufficient conditions of continuity for the generalized partial derivatives of a given order of a chosen component of the solution.

Исследуется общая начально-краевая задача для параболических по Петровскому систем с нулевыми начальными данными Коши в некоторых анизотропных пространствах Хермандера. Доказано, что операторы, соответствующие этой задаче, являются изоморфизмами между подходящими пространствами Хермандера. Как применение этого результата доказана теорема о локальном повышении регулярности решения задачи и получены новые достаточные условия непрерывности обобщенных частных производных заданного порядка выбранной компоненты вектор-функции решения.

1. Вступ. Сучасна теорія загальних параболічних початково-крайових задач розроблена для класичних шкал функціональних просторів Гельдера – Зигмунда і Соболєва [1 – 8]. Основний результат цієї теорії — теореми про коректну розв'язність (за Адамаром) цих задач у придатних парах вказаних просторів. Ці теореми мають важливі застосування до дослідження властивостей регулярності розв'язків параболічної задачі, властивостей її функції Гріна тощо.

Останнім часом знаходять важливі застосування у теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними функціональні простори узагальненої гладкості [9 – 17]. Для них показником регулярності розподілів є не числовий, а досить загальний функціональний параметр, залежний від частотних змінних (дуальних до просторових відносно перетворення Фур'є). Теорія цих просторів була започаткована Л. Хермандером у монографії [9], де було введено нормовані простори

$$\mathcal{B}_{p,\mu} := \big\{ w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k) \colon \mu(\xi)\widehat{w}(\xi) \in L_p(\mathbb{R}^k,\, d\xi) \big\}.$$

Тут $1 \leq p \leq \infty,\ \mu \colon \mathbb{R}^k \to (0,\infty)$ — вагова функція, а $\widehat{w}$ — перетворення Фур'є розподілу w.

В. А. Михайлець і О. О. Мурач [16 – 23] побудували теорію розв'язності загальних еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах ізотропних просторів Хермандера $H^{s;\varphi} := \mathcal{B}_{2,\mu}$, де показником регулярності є функція вигляду

$$\mu(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{s/2} \varphi((1 + |\xi|^2)^{1/2}).$$

Тут числовий параметр s є дійсним, а функціональний параметр φ — повільно змінним на нескінченності за Й. Карамата [24]. Ця теорія ґрунтується на методі інтерполяції з функціональним параметром гільбертових просторів, який встановлює зв'язок між просторами Соболєва і цими просторами Хермандера.

З огляду на це є перспективним застосування вказаного методу інтерполяції до побудови теорії розв'язності параболічних початково-крайових задач в анізотропних аналогах просторів $H^{s;\varphi}$. У роботах [25 – 34] цю теорію розроблено для мішаних задач для одного лінійного параболічного рівняння.

У даній роботі досліджується загальна початково-крайова задача для параболічних за Петровським систем. Ми розглядаємо важливий випадок [3], коли початкові дані Коші є нульовими. Мета роботи — довести теореми про коректну розв'язність і локальну регулярність узагальнених розв'язків цієї задачі, а також встановити нові достатні умови неперервності узагальнених частинних похідних (заданого порядку) вибраної компоненти вектор-функції розв'язку. Результати роботи частково анонсовано у [35]. Подібні результати у випадку мішаної параболічної задачі для одного рівняння отримано у [31].

2. Постановка задачі. Нехай довільно задано ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежену область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$, $\Omega := G \times (0,\tau)$ — відкритий циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S := \Gamma \times (0,\tau)$ — його бічна поверхня. Тоді $\overline{\Omega} := \overline{G} \times [0,\tau]$ і $\overline{S} := \Gamma \times [0,\tau]$ є замиканням Ω і S відповідно.

Розглянемо у циліндрі Ω початково-крайову параболічну за Петровським задачу для системи лінійних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{N} A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t)u_k(x,t) = f_j(x,t) \quad \text{для всіх} \quad x \in G, \quad t \in (0,\tau) \quad \text{і} \quad j \in \{1,\dots,N\}, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{N} B_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t)u_k(x,t)\big|_S = g_j(x,t) \quad \text{для всіх} \quad x \in \Gamma,\ 0<t<\tau \ \text{ і } \ j \in \{1,\dots,m\}, \tag{2}$$

$$\partial_t^r u_k(x,t)\big|_{t=0} = 0 \quad \text{для всіх} \quad x \in G, \quad k \in \{1,\dots,N\} \quad \text{і} \quad r \in \{0,\dots,\varkappa_k - 1\}. \tag{3}$$

Зауважимо, що початкові дані (3) ми вважаємо нульовими. Тут лінійні диференціальні вирази мають вигляд

$$A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t) := \sum_{|\alpha|+2b\beta \leq 2b\varkappa_k} a_{j,k}^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}, \tag{4}$$

$$B_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{|\alpha|+2b\beta \leq l_j+2b\varkappa_k} b_{j,k}^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}, & \text{якщо} \quad l_j + 2b\varkappa_k \geq 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad l_j + 2b\varkappa_k < 0, \end{cases} \tag{5}$$

для всіх припустимих значень індексів $j,\ k$. В цій задачі ми довільним чином вибрали натуральні числа $N \geq 2,\ b$ і $\varkappa_1,\dots,\varkappa_N$, поклали $m := b(\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_N)$ і вибрали ще m цілих чисел $l_1,\dots,l_m$. Число $2b$ називається параболічною вагою даної задачі. Всі коефіцієнти диференціальних виразів $A_{j,k}$ та $B_{j,k}$ є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і $\overline{S}$ відповідно, тобто

$$a_{j,k}^{\alpha,\beta} \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) := \bigl\{ w \restriction \overline{\Omega} \colon w \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1}) \bigr\}$$

і

$$b_{j,k}^{\alpha,\beta} \in C^{\infty}(\overline{S}) := \bigl\{ v \restriction \overline{S} \colon v \in C^{\infty}(\Gamma \times \mathbb{R}) \bigr\}.$$

Використовуватимемо позначення $D_x^{\alpha} := D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}$, де $D_k := i\,\partial/\partial x_k$, $\partial_t := \partial/\partial t$ для частинних похідних функцій, що залежать від $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $t \in \mathbb{R}$. Тут i — уявна одиниця, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультиіндекс і $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. У формулах (4) і (5) та їх аналогах підсумовування проводиться за цілими невід'ємними індексами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ і β, які задовольняють умову, вказану під знаком суми.

Запишемо основні символи диференціальних операторів (4) і (5):

$$A^{(0)}_{j,k}(x,t,\xi,p) := \sum_{|\alpha|+2b\beta=2b\kappa_k} a^{\alpha,\beta}_{j,k}(x,t)\,\xi^\alpha p^\beta,$$

$$B^{(0)}_{j,k}(x,t,\xi,p) =: \begin{cases} \sum\limits_{|\alpha|+2b\beta=l_j+2b\kappa_k} b^{\alpha,\beta}_{j,k}(x,t)\,\xi^\alpha p^\beta, & \text{якщо} \quad l_j + 2b\kappa_k \geq 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad l_j + 2b\kappa_k < 0. \end{cases}$$

Ці символи є однорідними поліномами за сукупністю аргументів $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ і $p \in \mathbb{C}$ (як завжди, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$). Утворимо матриці

$$A^{(0)}(x,t,\xi,p) := \left(A^{(0)}_{j,k}(x,t,\xi,p)\right)_{j,k=1}^N, \quad B^{(0)}(x,t,\xi,p) := \left(B^{(0)}_{j,k}(x,t,\xi,p)\right)_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,N}}.$$

Нагадаємо [2] (розд. 1, § 1), що початково-крайова задача (1) – (3) називається параболічною за Петровським у циліндрі Ω, якщо виконуються три умови.

Умова 1. Для довільно вибраних точок $x \in \overline{G}$, $t \in [0,\tau]$ і вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ усі корені многочлена $\det A^{(0)}(x,t,\xi,p)$ за змінною $p \in \mathbb{C}$ задовольняють нерівність $\operatorname{Re} p(x,t,\xi) \leq -\delta\,|\xi|^{2b}$ зі сталою $\delta > 0$, яка не залежить від x, t і ξ.

Умова 2. У системі (1) кожне рівняння з номером $j \in \{1, \ldots, N\}$ розв'язуване відносно похідної $\partial_t^{\kappa_j} u_j$ і не містить жодної похідної вигляду $\partial_t^{\kappa_k} u_k$, $k \neq j$. Тому можна вважати, що $a^{(0,0,\ldots,0),\kappa_k}_{j,k}(x,t) \equiv \delta_{j,k}$ для довільних $j,k \in \{1, \ldots, N\}$. Тут $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера.

Нехай число $\delta_1 \in (0,\delta)$, де δ — стала з умови 1. Для формулювання умови 3 виберемо довільним чином точки $x \in \Gamma$, $t \in [0,\tau]$, вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, дотичний до межі Γ у точці x, і число $p \in \mathbb{C}$ такі, що $\operatorname{Re} p \geq -\delta_1 |\xi|^{2b}$ і $|\xi| + |p| > 0$. Нехай $\nu(x)$ — орт внутрішньої нормалі до межі Γ у точці x. З умови 1 випливає, що многочлен $\det A^{(0)}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p)$ змінної $\zeta \in \mathbb{C}$ має точно m коренів $\zeta^+_j(x,t,\xi,p)$, $j = 1, \ldots, m$, з додатною уявною частиною та решту m коренів з від'ємною уявною частиною (з урахуванням їхньої кратності).

Умова 3. Для деякого числа $\delta_1 \in (0,\delta)$ при кожному зазначеному вище виборі параметрів x, t, ξ і p рядки матриці

$$B^{(0)}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p)\,\widetilde{A}^{(0)}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p)$$

є лінійно незалежними за модулем многочлена $\prod_{j=1}^m (\zeta - \zeta^+_j(x,t,\xi,p))$. Тут $\widetilde{A}^{(0)}$ — транспонована матриця алгебраїчних доповнень елементів матриці $A^{(0)}$.

Зауважимо, що умови 1 і 2 є умовами (рівномірної) $2b$-параболічності за І. Г. Петровським [36, с. 100] системи (1) у замкненому циліндрі $\overline{\Omega}$, а умова 3 свідчить про те, що система крайових умов (2) накриває параболічну систему (1) на бічній поверхні $\overline{S}$ цього циліндра.

Запишемо систему (1) і граничні умови (2) у матричній формі $Au = f$ і $Bu|_S = g$. Тут і далі

$$A := (A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t))_{j,k=1}^N, \quad B := \left(B_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t)\right)_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,N}}$$

— матричні диференціальні оператори, а $u,\ f$ та g — комплекснозначні вектор-функції.

Пов'яжемо з початково-крайовою задачею (1) – (3) лінійне відображення

$$\big(C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega})\big)^{N} \ni u \mapsto (Au, Bu) \in \big(C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega})\big)^{N} \times \big(C^{\infty}_{+}(\overline{S})\big)^{m}. \tag{6}$$

Тут і нижче

$$C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega}) := \big\{w \restriction \overline{\Omega} :\ w \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1}),\ \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^{n} \times [0,\infty)\big\},$$
$$C^{\infty}_{+}(\overline{S}) := \big\{h \restriction \overline{S} :\ h \in C^{\infty}(\Gamma \times \mathbb{R}),\ \operatorname{supp} h \subseteq \Gamma \times [0,\infty)\big\}.$$

У роботі всі функції та розподіли вважаються комплекснозначними.

Відображення (6) встановлює взаємно однозначну відповідність між просторами $(C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega}))^{N}$ і $(C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega}))^{N} \times (C^{\infty}_{+}(\overline{S}))^{m}$. Це випливає з теореми 1.2 [3] (див. міркування на початку п. 6).

Основна мета роботи — довести, що відображення (6) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму між відповідними парами анізотропних гільбертових функціональних просторів Хермандера.

3. Простори Хермандера, пов'язані з задачею. Ці простори є окремим випадком гільбертових функціональних просторів $\mathcal{B}_{2,\mu}$, введених і досліджених Л. Хермандером [9] (п. 2.2), а згодом і Л. Р. Волевичем та Б. П. Панеяхом [37] (§ 2, 3). Для зручності наведемо коротко необхідні означення (більш детально див. [31], п. 3).

Потрібні простори будуються на основі базових анізотропних функціональних просторів $H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{k+1})$, заданих на $\mathbb{R}^{k+1},\ k \geq 1$. Усі ці простори параметризуються парою дійсних числових параметрів s і $s/(2b)$ та функціональним параметром $\varphi \in \mathcal{M}$.

За означенням клас $\mathcal{M}$ складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$, які задовольняють такі умови:

а) обидві функції φ і $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1,c]$, де $1 < c < \infty$;

б) функція φ є повільно змінною за Й. Карамата на нескінченності, тобто

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\varphi(\lambda r)}{\varphi(r)} = 1 \quad \text{для кожного} \quad \lambda > 0.$$

Теорію повільно змінних функцій (на нескінченності) викладено, наприклад, у монографії [24]. Їх важливим прикладом є функції вигляду

$$\varphi(r) = (\log r)^{q_1}\,(\log\log r)^{q_2} \ldots (\underbrace{\log\ldots\log}_{k \text{ разів}} r\,)^{q_k} \quad \text{для} \quad r \gg 1,$$

де $k \in \mathbb{Z},\ k \geq 1$, і $q_1, q_2, \ldots, q_k \in \mathbb{R}$ — довільні параметри.

Нехай $s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{M}$ і дійсне $\gamma > 0$. Простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{k+1})$ буде потрібний нам лише у випадку $\gamma = 1/(2b)$, але його природно ввести для довільного $\gamma > 0$.

За означенням комплексний лінійний простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^{k+1})$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{k+1})$ таких, що їх (повне) перетворення Фур'є $\widetilde{w}$ є функцією, яка локально інтегровна на $\mathbb{R}^{k+1}$ за Лебегом і задовольняє умову

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k}\int\limits_{\mathbb{R}} r_{\gamma}^{2s}(\xi,\eta)\,\varphi^{2}(r_{\gamma}(\xi,\eta))\,|\widetilde{w}(\xi,\eta)|^{2}\,d\xi\,d\eta < \infty.$$

Тут і нижче використовуємо позначення

$$r_\gamma(\xi,\eta) := \bigl(1+|\xi|^2+|\eta|^{2\gamma}\bigr)^{1/2}, \quad \text{де} \quad \xi\in\mathbb{R}^k \quad \text{і} \quad \eta\in\mathbb{R}.$$

Цей простір наділено скалярним добутком

$$(w_1,w_2)_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{k+1})} := \int\limits_{\mathbb{R}^k}\int\limits_{\mathbb{R}} r_\gamma^{2s}(\xi,\eta)\,\varphi^2(r_\gamma(\xi,\eta))\,\widetilde{w_1}(\xi,\eta)\,\overline{\widetilde{w_2}(\xi,\eta)}\,d\xi\,d\eta,$$

де $w_1,w_2\in H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{k+1})$. Скалярний добуток звичайним чином породжує норму

$$\|w\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{k+1})} := (w,w)^{1/2}_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{k+1})}.$$

Зазначимо, що простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{k+1})$ є окремим випадком просторів $\mathcal{B}_{2,\mu}$, що були введені Л. Хермандером у [9] (п 2.2). А саме, $H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{k+1})=\mathcal{B}_{2,\mu}$ за умови, що функціональний параметр

$$\mu(\xi,\eta)=r_\gamma^s(\xi,\eta)\,\varphi(r_\gamma(\xi,\eta)) \quad \text{для всіх} \quad \xi\in\mathbb{R}^k \quad \text{і} \quad \eta\in\mathbb{R}.$$

У випадку $\gamma=1/(2b)$ будемо казати, що простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{k+1})$ є $2b$-анізотропним простором Хермандера.

Згідно з теоремою 2.2.1 [9], простір Хермандера $H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{k+1})$ є повним (тобто гільбертовим), сепарабельним і неперервно вкладеним у лінійний топологічний простір $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{k+1})$ повільно зростаючих розподілів на $\mathbb{R}^{k+1}$. Більш того, множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$ є щільною в $H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{k+1})$.

Якщо $\varphi(r)\equiv 1$, то $H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{k+1})$ стає анізотропним гільбертовим простором Соболєва порядку $(s,s\gamma)$; позначимо його через $H^{s,s\gamma}(\mathbb{R}^{k+1})$. У загальному випадку, коли $\varphi\in\mathcal{M}$ є довільною, мають місце неперервні та щільні вкладення

$$H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^{k+1})\hookrightarrow H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{k+1})\hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^{k+1}) \quad \text{для всіх} \quad s_0<s<s_1. \tag{7}$$

Цей результат безпосередньо випливає з такої властивості $\varphi\in\mathcal{M}$: для довільного $\varepsilon>0$ існує таке число $c=c(\varepsilon)\geq 1$, що $c^{-1}r^{-\varepsilon}\leq\varphi(r)\leq c\,r^{\varepsilon}$ для всіх $r\geq 1$ (див., наприклад, [24], п.1.5,1^0).

Вкладення (7) показують роль функціонального параметра $\varphi\in\mathcal{M}$ у класі гільбертових функціональних просторів

$$\bigl\{H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{k+1})\colon s\in\mathbb{R},\,\varphi\in\mathcal{M}\bigr\}. \tag{8}$$

Бачимо, що φ визначає додаткову гладкість по відношенню до основної анізотропної гладкості, заданої парою чисел $(s,s\gamma)$. Якщо $\varphi(r)\to\infty$ (або $\varphi(r)\to 0$) при $r\to\infty$, то φ визначає позитивну (або негативну) додаткову гладкість. Іншими словами, φ уточнює основну гладкість $(s,s\gamma)$.

Використовуючи шкалу (8), введемо функціональні простори, пов'язані із задачею (1)–(3). Нехай V — відкрита непорожня множина в $\mathbb{R}^{k+1}$. (Зокрема, при $k=n$ і $V=\Omega$.) Покладемо

$$H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(V) := \bigl\{w\restriction V : w\in H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{k+1}),\ \operatorname{supp}w\subseteq\mathbb{R}^k\times[0,\infty)\bigr\}. \tag{9}$$

Норма у лінійному просторі (9) визначається формулою

$$\|u\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(V)} := \inf\bigl\{\, \|w\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{k+1})} \colon$$
$$w \in H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{k+1}),\ \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^{k} \times [0,\infty),\ u = w \upharpoonright V \bigr\}, \tag{10}$$

де $u \in H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(V)$. Лінійний простір $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(V)$ є гільбертовим і сепарабельним відносно норми (3) (див. [31], п. 3).

Розв'язок задачі (1)–(3) та праві частини системи (1) будемо розглядати у просторах $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(V)$ з $k = n$ і $V = \Omega$. Зауважимо, що множина $C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega})$ є щільною в $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(\Omega)$.

Також нам потрібно ввести аналог простору $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(V)$ для бічної поверхні S циліндра Ω. Для розглядуваної задачі достатньо обмежитись випадком $s > 0$. Нехай $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\tau)$. Розглянемо гільбертів простір $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(V)$ у випадку $k = n-1$ і $V = \Pi$. Означимо простір $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(S)$ на основі простору $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(\Pi)$ за допомогою спеціальних локальних карт на $\overline{S}$.

Довільно виберемо скінченний атлас із C^{∞}-структури на замкненому многовиді Γ. Нехай цей атлас утворений локальними картами $\theta_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1,\ldots,\lambda$. Тут кожна θ_j — це C^{∞}-дифеоморфізм усього евклідового простору $\mathbb{R}^{n-1}$ на відкриту підмножину Γ_j множини Γ. Більш того, $\Gamma := \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_\lambda$, тобто відкриті множини $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_\lambda$ утворюють покриття Γ. Окрім цього, довільно виберемо такі функції $\chi_j \in C^{\infty}(\Gamma)$, $j = 1,\ldots,\lambda$, що $\operatorname{supp}\chi_j \subset \Gamma_j$ і $\chi_1 + \ldots + \chi_\lambda = 1$ на Γ. Ці функції утворюють C^{∞}-розбиття одиниці на Γ, яке підпорядковане покриттю.

Цей атлас на Γ породжує набір спеціальних локальних карт

$$\theta^{*}_{j} \colon \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\tau] \leftrightarrow \Gamma_j \times [0,\tau], \quad j = 1,\ldots,\lambda,$$

на $\overline{S} = \Gamma \times [0,\tau]$ за формулою $\theta^{*}_{j}(x,t) := (\theta_j(x),t)$ для всіх $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in [0,\tau]$. Розглянемо функції $\chi^{*}_{j}(x,t) := \chi_j(x)$ для $x \in \Gamma$ і $t \in [0,\tau]$, де $j = 1,\ldots,\lambda$. Вони утворюють C^{∞}-розбиття одиниці на $\overline{S}$, яке підпорядковане покриттю $\{\Gamma_j \times [0,\tau] : j = 1,\ldots,\lambda\}$ многовиду $\overline{S}$.

Тепер покладемо

$$H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(S) := \bigl\{ v \in L_2(S) \colon (\chi^{*}_{j} v) \circ \theta^{*}_{j} \in H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(\Pi) \ \text{ для всіх } \ j \in \{1,\ldots,\lambda\} \bigr\}. \tag{11}$$

Тут, нагадаємо, $s > 0$ і $L_2(S)$ — гільбертовий простір усіх інтегровних із квадратом відносно міри Лебега функцій $v \colon S \to \mathbb{C}$ на гладкому многовиді S. Як звичайно, $\circ$ позначає композицію функцій або відображень, так що

$$((\chi^{*}_{j} v) \circ \theta^{*}_{j})(x,t) = (\chi^{*}_{j} v)(\theta^{*}_{j}(x,t)) = \chi_j(\theta_j(x))\, v((\theta_j(x),t))$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0,\tau)$. Скалярний добуток у лінійному просторі (11) означається за формулою

$$(v_1,v_2)_{H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(S)} := \sum_{j=1}^{\lambda} ((\chi^{*}_{j} v_1) \circ \theta^{*}_{j}, (\chi^{*}_{j} v_2) \circ \theta^{*}_{j})_{H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(\Pi)},$$

де $v_1, v_2 \in H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(S)$. Цей скалярний добуток природним чином породжує норму

$$\|v\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(S)} := (v,v)^{1/2}_{H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(S)}.$$

Простір $H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ є повним (тобто гільбертовим), сепарабельним і не залежить з точністю до еквівалентності норм від зазначеного вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ; множина $C_{+}^{\infty}(\overline{S})$ є щільною у цьому просторі [31] (лема 3.1).

Якщо $\varphi \equiv 1$, то означені вище простори стають анізотропними соболєвськими просторами. У цьому випадку будемо пропускати індекс φ у позначеннях цих просторів.

Наприкінці зазначимо (див. [31], п. 3), що для введених просторів Хермандера на Ω та S мають місце аналоги вкладень (7). А саме, для довільного $\varphi \in \mathcal{M}$ мають місце неперервні та щільні вкладення

$$H_{+}^{s_1,s_1\gamma}(V) \hookrightarrow H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(V) \hookrightarrow H_{+}^{s_0,s_0\gamma}(V) \quad \text{для всіх} \quad s_0 < s < s_1. \tag{12}$$

Тут $V = \Omega$ або $V = S$ і $s_0 > 0$.

4. Основний результат. У цьому пункті ми сформулюємо теорему про ізоморфізм для параболічної задачі (1)–(3) у просторах Хермандера, введених вище. Потім розглянемо застосування цієї теореми до дослідження регулярності узагальнених розв'язків цієї задачі.

Позначимо через σ_0 найменше ціле число таке, що

$$\sigma_0 \geq 0, \quad \sigma_0 \geq l_j + 1 \ \text{для всіх} \ j \in \{1, \ldots, m\}, \quad \frac{\sigma_0}{2b} \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1. *Для довільного дійсного числа $\sigma > \sigma_0$ і довільного функціонального параметра $\varphi \in \mathcal{M}$ відображення* (6) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$(A, B) : \mathcal{G}_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{N} H_{+}^{\sigma+2b\kappa_k,(\sigma+2b\kappa_k)/(2b);\varphi}(\Omega) \ \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(H_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)\right)^N \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H_{+}^{\sigma-l_j-1/2,(\sigma-l_j-1/2)/(2b);\varphi}(S) =: \mathcal{H}_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega, S). \tag{13}$$

Якщо $\varphi \equiv 1$, то ізоморфізм (13) діє у парах анізотропних просторів Соболєва. У цьому випадку теорема 1 встановлена В. О. Солонніковим [3] (теорема 1.2) у припущенні, що $\sigma/(2b) \in \mathbb{Z}$. Його результат охоплює і граничний випадок $\sigma = \sigma_0$. У загальному випадку ми виведемо теорему 1 із теореми Солоннікова за допомогою інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва.

Як зазначено вище, відображення (6) продовжується за неперервністю до ізоморфізму

$$(A, B) \colon \mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{H}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega, S), \tag{14}$$

який діє в анізотропних просторах Соболєва. Всі ізоморфізми (13), де $\sigma > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$, є звуженнями (14). Цей результат випливає із вкладень (12).

Кожна вектор-функція

$$(f, g) \in \mathcal{H}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega, S) \tag{15}$$

має єдиний прообраз $u \in \mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ при взаємно однозначному відображенні (14). Цю вектор-функцію u називаємо (сильним) узагальненим розв'язком параболічної задачі (1)–(3) із правою частиною (15).

Розглянемо властивості регулярності цього розв'язку у просторах Хермандера. Наступне твердження безпосередньо випливає з теореми 1.

***Наслідок* 1.** *Припустимо, що* $u \in \mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1) – (3), *праві частини якої задовольняють умову*

$$(f,g) \in \mathcal{H}_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega,S)$$

для деяких $\sigma>\sigma_0$ *і* $\varphi\in\mathcal{M}$. *Тоді* $u\in\mathcal{G}_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$.

Зауважимо, що додаткова регулярність φ правих частин успадковується розв'язком задачі.

Тепер сформулюємо локальний аналог цього результату. Нехай U — відкрита множина в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\omega := U\cap\Omega\neq\varnothing$, $\pi_1 := U\cap\partial\Omega$ і $\pi_2 := U\cap S$. Введемо необхідні локальні аналоги просторів $H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$ і $H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(S)$, де $s>0$, $\gamma=1/(2b)$ і $\varphi\in\mathcal{M}$.

Позначимо через $H_{+,\mathrm{loc}}^{s,s\gamma;\varphi}(\omega,\pi_1)$ лінійний простір усіх розподілів u в області Ω таких, що $\chi u\in H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi\in C^\infty(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\omega\cup\pi_1$. Топологія в цьому просторі задається напівнормами

$$u\mapsto\|\chi u\|_{H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)},$$

де χ — довільна згадана вище функція. Аналогічно, позначимо через $H_{+,\mathrm{loc}}^{s,s\gamma;\varphi}(\pi_2)$ лінійний простір усіх розподілів v на S таких, що $\chi v\in H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ для кожної функції $\chi\in C^\infty(\overline{S})$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\pi_2$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$v\mapsto\|\chi v\|_{H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(S)},$$

де χ — довільна щойно згадана функція.

Теорема 2. *Нехай вектор-функція* $u\in\mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком задачі* (1)–(3) *із правою частиною* (15). *Припустимо, що*

$$(f,g)\in\mathcal{H}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1,\pi_2) := \left(H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1)\right)^N \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-l_j-1/2,(\sigma-l_j-1/2)/(2b);\varphi}(\pi_2) \tag{16}$$

для деяких $\sigma>\sigma_0$ *і* $\varphi\in\mathcal{M}$. *Тоді*

$$u\in\mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1) := \bigoplus_{k=1}^{N} H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma+2b\kappa_k,(\sigma+2b\kappa_k)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1). \tag{17}$$

У випадку $\omega=\Omega$ і $\pi_1=\partial\Omega$ (тоді $\pi_2=S$) теорема 2 є повторенням наслідку 1. Якщо $\pi_1=\varnothing$, то ця теорема стверджує, що регулярність розв'язку підвищується в околах внутрішніх точок замкненої області $\overline{\Omega}$.

Виберемо довільну компоненту u_k узагальненого розв'язку u. Використання просторів Хермандера дозволяє отримати кращі, ніж у випадку просторів Соболєва, достатні умови неперервності на $\omega\cup\pi_1$ вибраної компоненти u_k та її узагальнених частинних похідних заданого порядку.

Теорема 3. *Виберемо довільне* $k\in\{1,\ldots,N\}$. *Нехай ціле* $p\geq 0$ *таке, що* $p+b+n/2 >$ $> \sigma_0+2b\kappa_k$, *і вектор-функція* $u\in\mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком задачі* (1)–(3) *із правою частиною* (15). *Припустимо, що права частина задовольняє умову* (16) *для* $\sigma :=$ $:= p+b+n/2-2b\kappa_k$ *і деякого функціонального параметра* $\varphi\in\mathcal{M}$ *такого, що*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r\varphi^2(r)} < \infty. \tag{18}$$

Тоді компонента $u_k(x,t)$ розв'язку u та всі її узагальнені частинні похідні $D_x^\alpha \partial_t^\beta u_k(x,t)$, для яких $|\alpha| + 2b\beta \le p$, є неперервними на множині $\omega \cup \pi_1$.

Щодо цієї теореми наведемо два зауваження.

***Зауваження* 1.** Умова (18) у теоремі 3 є точною. А саме, нехай $\sigma := p + b + n/2 - 2b\kappa_k$, $\varphi \in \mathcal{M}$ і для кожної вектор-функції $u \in \mathcal{G}_+^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ є правильною імплікація

$$\big(\, u \text{ є розв'язком задачі (1)–(3) для деякої правої частини (16)}\,\big)$$
$$\Rightarrow\ \big(\text{компонента}\, u_k \text{ задовольняє висновок теореми 3}\,\big).$$

Тоді φ задовольняє умову (18).

Це зауваження випливає із твердження 4(ii), детальніше див. [31] (п. 4, зауваження 1).

***Зауваження* 2.** Якщо сформулювати аналог теореми 3 для соболєвської шкали (випадок $\varphi \equiv 1$), то доведеться замінити умову теореми на більш сильну, оскільки (18) не виконується у цьому випадку. А саме, потрібно стверджувати, що права частина задачі (1)–(3) задовольняє умову (16) для деякого $\sigma > p + b + n/2 - 2b\kappa_k$. Це припущення сильніше, ніж умова теореми 3, завдяки лівому вкладенню у (12).

5. Інтерполяція з функціональним параметром. У цьому пункті розглянемо метод інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів, який було введено К. Фойашем і Ж.-Л. Ліонсом [38, с. 278]. Ця інтерполяція є природним узагальненням класичного методу інтерполяції С. Г. Крейна і Ж.-Л. Ліонса в тому випадку, коли замість числа в якості параметра інтерполяції використовується досить загальна функція (див., наприклад, монографії [39] (гл. 4, п. 1.10) і [40] (гл. 1, пп. 2 і 5)). Інтерполяція з функціональним параметром відіграє ключову роль у доведенні теореми 1. Для наших цілей достатньо обмежитись випадком сепарабельних комплексних гільбертових просторів. Ми дотримуємось монографії [17] (п. 1.1), у якій систематично викладено цю інтерполяцію (див. також [23], п. 2).

Нехай $X := [X_0, X_1]$ — впорядкована пара сепарабельних комплексних гільбертових просторів, для яких має місце неперервне і щільне вкладення $X_1 \hookrightarrow X_0$. Таку пару називають допустимою. Для неї існує оператор J, що є самоспряженим додатно визначеним оператором в X_0 з областю визначення X_1, причому $\|Jv\|_{X_0} = \|v\|_{X_1}$ для кожного $v \in X_1$. Оператор J визначається парою X однозначно і називається породжуючим оператором для X (див., наприклад, [39], гл. 4, теорема 1.12). Він визначає ізометричний ізоморфізм $J: X_1 \leftrightarrow X_0$.

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, для яких ψ є обмеженою на кожному відрізку $[a,b]$, де $0 < a < b < \infty$, а $1/\psi$ — обмеженою на кожному промені $[a,\infty)$, де $a > 0$.

Для заданої функції $\psi \in \mathcal{B}$ розглянемо (взагалі необмежений) оператор $\psi(J)$, визначений в X_0 як борелівська функція ψ від J. Цей оператор будується за допомогою спектральної теореми, застосованої до самоспряженого оператора J. Позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$ (або скорочено X_ψ) область визначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком

$$(v_1, v_2)_{X_\psi} := (\psi(J)v_1, \psi(J)v_2)_{X_0}.$$

Лінійний простір X_ψ є гільбертовим і сепарабельним відносно цього скалярного добутку. Останній породжує норму $\|v\|_{X_\psi} := \|\psi(J)v\|_{X_0}$.

Функцію $\psi \in \mathcal{B}$ назвемо інтерполяційним параметром, якщо для всіх припустимих пар $X = [X_0, X_1]$ та $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів і для довільного лінійного відображення T, заданого на X_0, правильним є таке: якщо звуження відображення T на X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$ для кожного $j \in \{0, 1\}$, то звуження відображення T на X_ψ також є обмеженим оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$.

Якщо ψ — інтерполяційний параметр, то будемо казати, що гільбертів простір X_ψ отримано в результаті інтерполяції з функціональним параметром ψ пари $X = [X_0, X_1]$. У цьому випадку маємо щільні та неперервні вкладення $X_1 \hookrightarrow X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Відомо, що функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли ψ є псевдовгнутою в околі ∞, тобто коли існує вгнута додатна функція $\psi_1(r)$ при $r \gg 1$ така, що обидві функції ψ/ψ_1 та ψ_1/ψ є обмеженими в деякому околі ∞. Цей критерій випливає з опису Ж. Петре класу всіх інтерполяційних функцій для вагових просторів типу $L_p(\mathbb{R}^n)$ (див. [41], теорема 5.4.4). Доведення цього критерію наведено в [17] (п. 1.1.9).

Ми будемо використовувати такий наслідок з цього критерію [17] (теорема 1.11).

Твердження 1. *Припустимо, що функція $\psi \in \mathcal{B}$ є правильно змінною на нескінченності функцією порядку θ, де $0 < \theta < 1$, тобто*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\psi(\lambda r)}{\psi(r)} = \lambda^\theta \quad \text{для кожного} \quad \lambda > 0.$$

Тоді ψ є інтерполяційним параметром.

Поняття правильно змінної функції належить Й. Карамата [42]. Очевидно, що функція $\psi : (r_0, \infty) \to (0, \infty)$, де $r_0 \in \mathbb{R}$, є правильно змінною порядку $\theta \in \mathbb{R}$ на нескінченності тоді і тільки тоді, коли $\psi(r) \equiv r^\theta \psi_0(r)$ для певної функції $\psi_0 : (r_0, \infty) \to (0, \infty)$, що повільно змінюється на нескінченності. Обидві функції припускаються вимірними за Борелем.

Зазначимо, що у випадку степеневих функцій твердження 1 приводить до згаданого вище класичного результату Ж.-Л. Ліонса та С. Г. Крейна. А саме, вони довели, що функція $\psi(r) \equiv r^\theta$ є інтерполяційним параметром при $0 < \theta < 1$. В цьому випадку показник θ розглядається як числовий параметр інтерполяції.

На завершення цього пункту сформулюємо властивість інтерполяції, яка буде використана у п. 6 у доведеннях (див. [17], теорема 1.5). Ця властивість дозволяє звести інтерполяцію прямих сум гільбертових просторів до інтерполяції їх доданків.

Твердження 2. *Нехай $[X_0^{(j)}, X_1^{(j)}]$, де $j = 1, \ldots, p$, — скінченний набір допустимих пар гільбертових просторів. Тоді*

$$\Big[\bigoplus_{j=1}^{p} X_0^{(j)}, \bigoplus_{j=1}^{p} X_1^{(j)}\Big]_\psi = \bigoplus_{j=1}^{p} \big[X_0^{(j)}, X_1^{(j)}\big]_\psi$$

з рівністю норм для кожної функції $\psi \in \mathcal{B}$.

6. Доведення. Насамперед зазначимо, що у випадку просторів Соболєва ($\varphi \equiv 1$) і $\sigma = 2bl > \sigma_0$, де $l \in \mathbb{Z}$, теорема 1 випливає зі згаданого результату Солоннікова [3] (теорема 1.2). Дійсно, з леми 5.1 [31] випливає, що у цьому випадку функціональні простори, що фігурують у теоремі 1.2 [3], збігаються із просторами з (13).

Тепер покажемо, що відображення (6) встановлює взаємно однозначну відповідність між просторами $(C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega}))^N$ і $(C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega}))^N \times (C^{\infty}_{+}(\overline{S}))^m$, як це стверджувалось у п. 2.

Скористаємось теоремою 1 у випадку, про який щойно йшлося. А саме, $\varphi \equiv 1$ і $\sigma = 2bl > > \sigma_0$, де $l \in \mathbb{Z}$. За цією теоремою відображення (6) є ін'єктивним. Залишилось показати, що (6) є сюр'єктивним. Нехай вектор-функція (f,g) належить простору $\big(C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega})\big)^N \times \big(C^{\infty}_{+}(\overline{S})\big)^m$. Згідно з цією теоремою існує єдина вектор-функція

$$u \in \bigcap_{l\in\mathbb{Z},\, 2bl>\sigma_0} \mathcal{G}^{2bl,l}_{+}(\Omega) \tag{19}$$

така, що $(A,B)u=(f,g)$. З (19), згідно з теоремою вкладення Соболєва, маємо $u \in (C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega}))^N$ (детальніше див. [31], п. 5). Таким чином, (6) є сюр'єктивним. Отже, (6) є бієкцією.

Як зазначалось раніше, теорему 1 виведемо з результату Солоннікова [3] (теорема 1.2) методом інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. У роботі [31] встановлено, що простори Хермандера, які фігурують у (13), можна отримати інтерполяцією з функціональним параметром їх соболєвських аналогів. Для зручності нагадаємо необхідний результат.

Припустимо, що

$$s, s_0, s_1, \gamma \in \mathbb{R}, \quad s_0 < s < s_1, \quad \gamma > 0, \quad \text{і} \quad \varphi \in \mathcal{M}. \tag{20}$$

Розглянемо функцію

$$\psi(r) := \begin{cases} r^{(s-s_0)/(s_1-s_0)}\, \varphi(r^{1/(s_1-s_0)}) & \text{для} \quad r \geq 1, \\ \varphi(1) & \text{для} \quad 0 < r < 1. \end{cases} \tag{21}$$

За твердженням 1 ця функція є інтерполяційним параметром, оскільки вона є правильно змінною функцією на нескінченності порядку $\theta := (s-s_0)/(s_1-s_0)$ з $0<\theta<1$. Далі будемо інтерполювати пари соболєвських просторів із функціональним параметром ψ.

Твердження 3 (лема 7.3 [31])**.** *Додатково до* (20) *припустимо, що* $s_0 \geq 0$ *і*

$$s_j\gamma - 1/2 \notin \mathbb{Z} \quad \textit{для кожного} \quad j \in \{0,1\}. \tag{22}$$

Тоді правильними є інтерполяційні формули

$$H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(\Omega) = \big[H^{s_0,s_0\gamma}_{+}(\Omega), H^{s_1,s_1\gamma}_{+}(\Omega)\big]_{\psi} \tag{23}$$

і

$$H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(S) = \big[H^{s_0,s_0\gamma}_{+}(S), H^{s_1,s_1\gamma}_{+}(S)\big]_{\psi} \tag{24}$$

з точністю до еквівалентності норм.

***Доведення теореми* 1.** Нехай $\sigma > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Виберемо ціле $\sigma_1 > \sigma$ так, що $\sigma_1/(2b) \in \mathbb{Z}$. Згідно з результатом В. О. Солоннікова [3] (теорема 1.2), відображення (6) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізмів

$$(A,B) : \mathcal{G}^{\sigma_k,\sigma_k/(2b)}_{+}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{H}^{\sigma_k,\sigma_k/(2b)}_{+}(\Omega,S), \quad \text{де} \quad k \in \{0,1\}. \tag{25}$$

(Тут простори означаються, як і у формулі (13) з $\sigma := \sigma_k$ і $\varphi \equiv 1$.)

Означимо інтерполяційний параметр ψ за формулою (21), в якій $s := \sigma,\ s_0 := \sigma_0$ і $s_1 := \sigma_1$. Інтерполюючи з функціональним параметром ψ пари просторів у (25), отримуємо ізоморфізм

$$(A,B) : \big[\mathcal{G}_+^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega), \mathcal{G}_+^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\Omega)\big]_\psi \leftrightarrow \big[\mathcal{H}_+^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega,S), \mathcal{H}_+^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\Omega,S)\big]_\psi. \tag{26}$$

Він є звуженням оператора (25) з $k = 0$.

Згідно з твердженнями 2 і 3 можемо записати

$$\big[\mathcal{G}_+^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega), \mathcal{G}_+^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\Omega)\big]_\psi =$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{N} \big[H_+^{\sigma_0+2b\kappa_k,(\sigma_0+2b\kappa_k)/(2b)}(\Omega), H_+^{\sigma_1+2b\kappa_k,(\sigma_1+2b\kappa_k)/(2b)}(\Omega)\big]_\psi =$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{N} H_+^{\sigma+2b\kappa_k,(\sigma+2b\kappa_k)/(2b);\varphi}(\Omega) = \mathcal{G}_+^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$$

і

$$[\mathcal{H}_+^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega,S), \mathcal{H}_+^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\Omega,S)]_\psi =$$

$$= \bigoplus_{j=1}^{N} \big[H_+^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega), H_+^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\Omega)\big]_\psi \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \big[H_+^{\sigma_0-l_j-1/2,(\sigma_0-l_j-1/2)/(2b)}(S), H_+^{\sigma_1-l_j-1/2,(\sigma_1-l_j-1/2)/(2b)}(S)\big]_\psi =$$

$$= \big(H_+^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)\big)^N \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H_+^{\sigma-l_j-1/2,(\sigma-l_j-1/2)/(2b);\varphi}(S) =$$

$$= \mathcal{H}_+^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega,S).$$

Ці рівності просторів є правильними з точністю до еквівалентності норм. Таким чином, з ізоморфізму (26) отримуємо (13). Цей ізоморфізм є розширенням за неперервністю відображення (6), оскільки множина $\big(C_+^\infty(\overline{\Omega})\big)^N$ є щільною у просторі $\mathcal{G}_+^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$.

Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** Насамперед покажемо, що з умови (16) випливає правильність імплікації

$$u \in \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda,(\sigma-\lambda)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1) \ \Rightarrow\ u \in \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda+1,(\sigma-\lambda+1)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1) \tag{27}$$

для кожного цілого $\lambda \geq 1$ такого, що $\sigma - \lambda + 1 > \sigma_0$.

Виберемо довільну функцію $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ з $\operatorname{supp}\chi \subset \omega \cup \pi_1$. Для χ існує функція $\eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ така, що $\operatorname{supp}\eta \subset \omega \cup \pi_1$ і $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Переставляючи диференціальний оператор (A,B) з оператором множення на χ, можемо записати

$$(A,B)(\chi u) = (A,B)(\chi\eta u) = \chi\,(A,B)(\eta u) + (A',B')(\eta u) =$$

$$= \chi\,(A,B)u + (A',B')(\eta u) = \chi\,(f,g) + (A',B')(\eta u). \tag{28}$$

Тут
$$A' := (A'_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t))_{j,k=1}^{N} \qquad \text{і} \qquad B' := \big(B'_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t)\big)_{\substack{j=1,\dots,m\\ k=1,\dots,N}}$$

— матричні диференціальні оператори з компонентами

$$A'_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t) := \sum_{|\alpha|+2b\beta\leq 2b\kappa_k-1} a_{j,k,1}^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}, \tag{29}$$

$$B'_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t) := \begin{cases} \sum_{|\alpha|+2b\beta\leq l_j+2b\kappa_k-1} b_{j,k,1}^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}, & \text{якщо} \quad l_j+2b\kappa_k-1\geq 0,\\ 0, & \text{якщо} \quad l_j+2b\kappa_k-1<0, \end{cases} \tag{30}$$

де $a_{j,k,1}^{\alpha,\beta}\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ і $b_{j,k,1}^{\alpha,\beta}\in C^{\infty}(\overline{S})$. Цей оператор неперервно діє у парі просторів

$$(A',B')\colon \mathcal{G}_{+}^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)\to \mathcal{H}_{+}^{s+1,(s+1)/(2b);\varphi}(\Omega,S) \tag{31}$$

для кожного $s>\sigma_0-1$. У випадку, коли $\varphi\equiv 1$ і другі індекси не є напівцілими, це безпосередньо випливає з (29), (30), леми 5.1 [31] і відомих властивостей анізотропного простору Соболєва $H^{s,s/(2b)}(\Omega)$ (див., наприклад, [43], гл. I, лема 4, та гл. II, теореми 3 і 7). Обмеженість оператора (31) у загальному випадку безпосередньо випливає з цього випадку на підставі твердження 2 та інтерполяційних формул (23) і (24).

З умови (16) маємо включення

$$\chi\,(f,g)\in \mathcal{H}_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega,S).$$

Крім того, згідно з (31) з $s:=\sigma-\lambda$, має місце імплікація

$$u\in \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda,(\sigma-\lambda)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1)\Rightarrow\ (A',B')(\eta u)\in \mathcal{H}_{+}^{\sigma-\lambda+1,(\sigma-\lambda+1)/(2b);\varphi}(\Omega,S).$$

Тому, використовуючи (28) і наслідок 1, можемо записати

$$u\in \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda,(\sigma-\lambda)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ (A,B)(\chi u)\in \mathcal{H}_{+}^{\sigma-\lambda+1,(\sigma-\lambda+1)/(2b);\varphi}(\Omega,S)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \chi u\in \mathcal{G}_{+}^{\sigma-\lambda+1,(\sigma-\lambda+1)/(2b);\varphi}(\Omega).$$

Зазначимо, що тут наслідок 1 є застосовним, оскільки $\chi u\in \mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ за умовою теореми і $\sigma-\lambda+1>\sigma_0$. Тим самим імплікацію (27) доведено, якщо зважити на зроблений вибір функції χ.

Використаємо цю імплікацію для доведення включення $u\in \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1)$. Розглянемо окремо випадки $\sigma\notin\mathbb{Z}$ і $\sigma\in\mathbb{Z}$.

Нехай спочатку $\sigma\notin\mathbb{Z}$. У цьому випадку існує ціле число $\lambda_0\geq 1$ таке, що

$$\sigma-\lambda_0<\sigma_0<\sigma-\lambda_0+1. \tag{32}$$

Використовуючи імплікацію (27) послідовно для значень $\lambda:=\lambda_0,\ \lambda:=\lambda_0-1,\dots,\ \lambda:=1$, виводимо необхідне включення

$$u \in \mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega) \subset \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda_0,(\sigma-\lambda_0)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ u \in \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda_0+1,(\sigma-\lambda_0+1)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1) \Rightarrow \ldots$$
$$\ldots\ \Rightarrow\ u \in \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1).$$

Зауважимо, що $u \in \mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ за умовою теореми.

Нехай тепер $\sigma \in \mathbb{Z}$. У цьому випадку не існує цілого числа λ_0, що задовольняє (32). Але оскільки $\sigma - 1/2 \notin \mathbb{Z}$ і $\sigma - 1/2 > \sigma_0$, то, як доведено у попередньому випадку, має місце включення

$$u \in \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-1/2,(\sigma-1/2)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1).$$

Звідси, використовуючи імплікацію (27) з $\lambda := 1$, виводимо потрібне включення, а саме

$$u \in \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-1/2,(\sigma-1/2)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1) \subset \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-1,(\sigma-1)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ u \in \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1).$$

Теорему 2 доведено.

Щоб вивести теорему 3 з теореми 2, скористаємось наступною версією теореми вкладення Хермандера [9] (теорема 2.2.7).

Твердження 4 (лема 8.1 [31]). *Нехай $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 0$, $s := p + b + n/2$ та $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді правильними є такі твердження*:

(i) *Якщо φ задовольняє умову*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r\,\varphi^2(r)} < \infty, \tag{33}$$

то кожна функція $w \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ має таку властивість: *всі її узагальнені частинні похідні $D_x^\alpha \partial_t^\beta w(x,t)$ з $0 \leq |\alpha| + 2b\beta \leq p$ є неперервними на $\mathbb{R}^{n+1}$.*

(ii) *Нехай V — непорожня відкрита підмножина $\mathbb{R}^{n+1}$ і ціле k таке, що $1 \leq k \leq n$. Якщо кожна функція $w \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ з $\operatorname{supp} w \subset V$ задовольняє умову $\partial^j w/\partial x_k^j \in C(\mathbb{R}^{n+1})$ для кожного $j \in \mathbb{Z}$ з $0 \leq j \leq p$, то φ задовольняє умову* (33).

***Доведення теореми* 3.** Виберемо довільним чином точку $M \in \omega \cup \pi_1$. Нехай функція $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ задовольняє такі умови: $\operatorname{supp}\chi \subseteq \omega \cup \pi_1$ і $\chi = 1$ в деякому околі $V(M) \subseteq \overline{\Omega}$ точки M. Згідно з теоремою 2 маємо включення $\chi u \in \mathcal{G}_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$, де $\sigma = p + b + n/2 - 2b\kappa_k$. Це включення означає, що $\chi u_k \in H_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$, де $\sigma = p + b + n/2$. Отже, існує така функція $w \in H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$, що $w = \chi u_k = u_k$ на множині $V(M)$. Згідно з твердженням 4(i), кожна узагальнена частинна похідна $D_x^\alpha \partial_t^\beta w(x,t)$, де $0 \leq |\alpha| + 2b\beta \leq p$, є неперервною на $\mathbb{R}^{n+1}$. Таким чином, похідна $D_x^\alpha \partial_t^\beta u_k(x,t)$ є неперервною в околі $V(M)$ точки M. Оскільки точка $M \in \omega \cup \pi_1$ є довільною, то ця похідна є неперервною на $\omega \cup \pi_1$.

Теорему 3 доведено.

Література

1. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 3. – С. 53 – 161.
2. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **83**. – С. 3 – 163.
3. *Солонников В. А.* Об оценках в L_p решений эллиптических и параболических систем // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **102**. – С. 137 – 160.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
5. *Lions J.-L., Magenes E.* Non-homogeneous boundary-value problems and applications. – Berlin: Springer, 1972. – Vol. II. – xi+242 p.
6. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Вища шк., 1990. – 200 с.
7. *Eidel'man S. D.* Parabolic equations // Encycl. Math. Sci. Vol. 63. Partial Different. Equat., VI. – Berlin: Springer, 1994. – P. 205 – 316.
8. *Eidel'man S. D., Zhitarashu N. V.* Parabolic boundary value problems. – Basel: Birkhäuser, 1998. – xii+298 p.
9. *Hörmander L.* Linear partial differential operators. – Berlin: Springer, 1963. – 285 p. (Рус. перевод: *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.)
10. *Лизоркин П. И.* Пространства обобщенной гладкости // Теория функциональных пространств / Х. Трибель. – М.: Мир, 1986. – С. 381 – 415.
11. *Paneah B.* The oblique derivative problem. The Poincaré problem.– Berlin: Wiley-VCH, 2000. – 348 p.
12. *Triebel H.* The structure of functions. – Basel: Birkhäuser, 2001. – xii+425 p.
13. *Farkas W., Leopold H.-G.* Characterisations of function spaces of generalized smoothness // Ann. mat. pura ed appl. – 2006. – **185**, № 1. – P. 1 – 62.
14. *Nicola F., Rodino L.* Global pseudodifferential calculas on Euclidean spaces. – Basel: Birkhäuser, 2010. – xi+306 p.
15. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces // Res. Math. – 2015. – **67**, № 1. – P. 135 – 152.
16. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, № 2. – P. 211 – 281.
17. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin: De Gruyter, 2014. – xiv+297 p.
18. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scales of spaces and elliptic boundary-value problems. I // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 2. – P. 244 – 262.
19. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces, and elliptic boundary-value problems. II // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 3. – P. 398 – 417.
20. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces, and elliptic boundary-value problems. III // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 5. – P. 744 – 765.
21. *Murach A. A.* Elliptic pseudo-differential operators in a refined scale of spaces on a closed manifold // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 6. – P. 874 – 893.
22. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* An elliptic boundary-value problem in a two-sided refined scale of spaces // Ukr. Math. J. – 2008. – **60**, № 4. – P. 574 – 597.
23. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 1. – P. 81 – 100.
24. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
25. *Los V., Murach A. A.* Parabolic problems and interpolation with a function parameter // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2013. – **19**, № 2. – P. 146 – 160.
26. *Лось В. Н., Мурач А. А.* Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости // Доп. НАН України. – 2014. – № 6. – С. 23 – 31.
27. *Los V. M.* Mixed problems for the two-dimensional heat-conduction equation in anisotropic Hörmander spaces // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, № 5. – P. 735 – 747.
28. *Los V. M.* Anisotropic Hörmander spaces on the lateral surface of a cylinder // J. Math. Sci. – 2016. – **217**, № 4. – P. 456 – 467.

29. *Los V., Murach A.* Isomorphism theorems for some parabolic initial-boundary value problems in Hörmander spaces // Open Math. – 2017. – **15**. – P. 57 – 76.
30. *Los V. M.* Theorems on isomorphism for some parabolic initial-boundary-value problems in Hörmander spaces: limiting case // Ukr. Math. J. – 2016. – **68**, № 6. – P. 894 – 909.
31. *Los V., Mikhailets V. A., Murach A. A.* An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications // Communs Pure and Appl. Anal. – 2017. – **16**, № 1. – P. 69 – 97.
32. *Лось В. М.* Класичні розв'язки параболічних початково-крайових задач і простори Хермандера // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 9. – С. 1229 – 1239.
33. *Лось В. М.* Достатні умови класичності розв'язків загальних параболічних початково-крайових задач // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 11. – С. 1518 – 1527.
34. *Los V. M., Mikhailets V. A., Murach A. A.* General parabolic initial-boundary value problems in Hörmander spaces // arXiv:1610.06862.
35. *Лось В. М.* Параболічні мішані задачі для систем Петровського в просторах узагальненої гладкості // Доп. НАН України. – 2014. – № 10. – С. 24 – 32.
36. *Петровский И. Г.* Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. – М.: Наука, 1986. – 504 с.
37. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3 – 74.
38. *Foiaş C., Lions J.-L.* Sur certains théorèmes d'interpolation // Acta Sci. Math. Szeged. – 1961. – **22**. – P. 269 – 282.
39. *Krein S. G., Petunin Yu. L., Semenov E. M.* Interpolation of linear operators // Transl. Math. Monogr. – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1982. – **54**.
40. *Lions J.-L., Magenes E.* Non-homogeneous boundary-value problems and applications. – Berlin: Springer, 1972. — Vol. I.
41. *Bergh J., Löfström J.* Interpolation spaces // Grundlehren math. Wiss. – Berlin: Springer, 1976. – Bd 223.
42. *Karamata J.* Sur certains "Tauberian theorems" de M. M. Hardy et Littlewood // Mathematica (Cluj). – 1930. – **3**. – P. 33 – 48.
43. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та. – 1958. – **197**. – С. 54 – 112.

Одержано 26.10.16