УДК 539.3

$\boxed{\text{М. А. Сухорольський}}$ (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

ФУНКЦІЇ БЕССЕЛЯ ДВОХ КОМПЛЕКСНИХ ВЗАЄМНО СПРЯЖЕНИХ ЗМІННИХ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ У КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

We formulate boundary-value problems for the eigenvalues and eigenfunctions of the Helmholtz equation in simply connected domains by using two complex mutually conjugated variables. The systems of eigenfunctions of these problems are orthogonal in the domain. They are formed by Bessel functions of complex variables and the powers of conformal mappings of the analyzed domains onto a circle. The boundary-value problems for the main equations of mathematical physics are formulated in an infinite cylinder with the use of complex and time variables. The solutions of the boundary-value problems are obtained in the form of series in the systems of eigenfunctions. The Cauchy problem for the main equations of mathematical physics with three independent variables is also considered.

Сформулированы граничные задачи о собственных значениях и собственных функциях для уравнения Гельмгольца в односвязных областях с использованием двух комплексных взаимно сопряженных переменных. Системы собственных функций этих задач ортогональны по области и состоят из функций Бесселя комплексных переменных и степеней конформных отображений рассматриваемых областей на круг. Краевые задачи для основных уравнений математической физики сформулированы в бесконечном цилиндре с использованием комплексных и временной переменных. Решения краевых задач получены в виде рядов по собственным функциям. Рассмотрена также задача Коши для основных уравнений математической физики с тремя независимыми переменными.

Вступ. У роботах [1 – 4] розглянуто ортогональні та біортогональні системи многочленів двох і більше змінних. Дослідження властивостей цих систем ґрунтується на методах контурного інтегрування та конформних відображень. У роботі [5] сформульовано загальний підхід до побудови розв'язків крайових задач для рівняння Гельмгольца в однозв'язній області комплексної площини. Розв'язки цих задач одержано у вигляді рядів за системами функцій, які сконструйовано з функцій Бесселя та степенів конформних відображень розглядуваних областей на круг. У даній роботі, ґрунтуючись на цих дослідженнях, побудовано системи функцій, які є власними функціями відповідних крайових задач для рівняння Гельмгольца в однозв'язній області комплексної площини і ортогональними по області. Вони виражаються через функції Бесселя та степені конформних відображень. Розв'язки крайових задач для основних рівнянь математичної фізики (гіперболічного, параболічного та еліптичного типів другого порядку) побудовано у вигляді сум рядів за ортогональними по області системами функцій. Розглянуто також задачу Коші для рівнянь параболічного та гіперболічного типів.

1. Властивості функцій Бесселя двох змінних. Розглянемо функції Бесселя [5], залежні від двох комплексних взаємно спряжених змінних $w = u + iv,\ \bar{w} = u - iv$ ($w = re^{i\psi}$, $-\pi \leq \leq \psi \leq \pi$) комплексної площини C_w,

$$J_m(w, \bar{w}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{n+m} \bar{w}^n}{2^{2n+m} n!\,(n+m)!} = w^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (w\bar{w})^n}{2^{2n+m} n!\,(n+m)!}, \tag{1}$$

де $J_m(w, w) = J_m(w)$ — функції Бесселя першого роду m-го порядку.

1. Безпосередньо з формули (1) випливають формули

$$\overline{J_m(w,\bar{w})} = J_m(\bar{w},w), \qquad J_{-m}(w,\bar{w}) = (-1)^m J_m(\bar{w},w),$$
$$wJ_{m-1}(w,\bar{w}) + \bar{w}J_{m+1}(w,\bar{w}) = 2mJ_m(w,\bar{w}), \tag{2}$$
$$\frac{\partial J_m(w,\bar{w})}{\partial w} = \frac{1}{2}J_{m-1}(w,\bar{w}), \qquad \frac{\partial J_m(w,\bar{w})}{\partial \bar{w}} = -\frac{1}{2}J_{m+1}(w,\bar{w}).$$

2. З виразу твірної для системи функцій Бесселя [6, 7] отримуємо твірну функцію для системи функцій $\{J_m(w,\bar{w})\}_{m=-\infty}^{\infty}$:

$$e^{\frac{wt-\bar{w}/t}{2}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(w,\bar{w})\, t^n =$$
$$= J_0(|w|) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[J_m(w,\bar{w})\, t^m + (-1)^m J_m(\bar{w},w)\, t^{-m}\right].$$

Звідси знайдемо такі формули:

$$\operatorname{ch}\left(\frac{w-\bar{w}}{2}\right) = J_0(|w|) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[J_{2m}(w,\bar{w}) + J_{2m}(\bar{w},w)\right],$$
$$\operatorname{sh}\left(\frac{w-\bar{w}}{2}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[J_{2m-1}(w,\bar{w}) + J_{2m-1}(\bar{w},w)\right].$$

3. Формула додавання Графа [6, с. 873] для випадку системи функцій (1) набирає вигляду

$$J_m(\eta,\bar{\eta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\bar{z},z)\, J_{n+m}(w,\bar{w})$$

і, зокрема,

$$J_0(|w-z|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\bar{z},z)\, J_n(w,\bar{w}), \tag{3}$$

де $\eta = z - w,\ z = \rho\cdot e^{i\omega},\ w = r\cdot e^{i\psi}$.

4. Використовуючи останні дві формули з (2), встановлюємо, що функції системи $\{J_m(\lambda w,\lambda\bar{w})\}_{m=-\infty}^{\infty}$ задовольняють рівняння Гельмгольца [5]

$$4\frac{\partial^2 V}{\partial w\partial\bar{w}} + \lambda^2 V = 0 \ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial^2 u} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 v} + \lambda^2 V = 0\right), \quad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Отже, множину розв'язків рівняння (4) у крузі $|w|\le R$ можна записати у вигляді

$$V = \sum_{m=0}^{\infty} c_m J_m(\lambda w,\lambda\bar{w}) + \sum_{m=0}^{\infty} c_{-m} J_m(\lambda\bar{w},\lambda w), \tag{5}$$

де c_m — комплексні сталі.

5. З формули для бесселівської функції другого роду (сингулярної в нульовій точці) [6] одержимо вираз відповідної функції двох комплексних змінних $\{Y_m(\lambda w,\lambda\bar{w})\}_{m=-\infty}^{\infty}$,

$$Y_m(w,\bar{w}) = \frac{2}{\pi}J_m(w,\bar{w})\left(\ln\frac{|w|}{2}+C\right) - \frac{w^m}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{(k-1)!}{2^{m+k}(m-k)!}\frac{1}{(w\bar{w})^k} -$$

$$-\frac{w^m}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(w\bar{w})^k}{2^{2k+m}(m+k)!k!}\left(\sum_{n=1}^{m+k}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}\right).$$

Тоді відповідну множину розв'язків рівняння (4), сингулярних у нульовій точці, можна записати у вигляді

$$V = \sum_{m=0}^{\infty} c_m Y_m(\lambda w, \lambda\bar{w}) + \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} Y_m(\lambda\bar{w}, \lambda w).$$

6. Нехай [6, с. 218; 7, с. 97]

$$w = \varphi(z) \tag{6}$$

— конформне відображення однозв'язної області $\bar{D}$ розширеної комплексної площини C_z, $z = x+iy$ ($z = \rho e^{i\omega}$) на круг $\bar{K}:\ |w| \le 1$ і $z = h(w)$ — обернене до нього відображення; $L = \partial D$ — жорданова гладка крива, яка відображається на коло ∂K.

Перейдемо в (4) до змінних $z = h(w)$, $\bar{z} = \bar{h}(w)$ і, оскільки $\varphi'(z) \neq 0$, $z \in D$, одержимо рівняння [5]

$$\frac{4}{|\varphi'(z)|^2}\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial\bar{z}} = \lambda^2 V, \quad z \in D. \tag{7}$$

Множину розв'язків цього рівняння в області D знайдемо з (5) і запишемо у вигляді

$$V = \sum_{m=0}^{\infty} c_m J_m\left(\lambda\varphi(z), \lambda\overline{\varphi(z)}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} J_m\left(\lambda\overline{\varphi(z)}, \lambda\varphi(z)\right). \tag{8}$$

7. Знайдемо похідну від функції $V(z,\bar{z})$ за напрямком нормалі до лінії L. Спочатку знайдемо похідну від цієї функції за напрямком нормалі до лінії L_r (прообразу кола $|w| = r$, $0 \le r \le 1$). Враховуючи формули $\partial_n\varphi(z) = -i\partial_\tau\varphi(z)$, $r = |\varphi(z)|$, $h'(w)\varphi'(z) = 1$, $w = re^{i\psi}$, де $\partial_n = \partial/\partial n$ і $\partial_\tau = \partial/\partial\tau$ — похідні за напрямком нормалі і дотичної до лінії L_r, отримуємо

$$\frac{\partial\varphi(z)}{\partial n} = -i\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial\tau} = -\frac{i\varphi'(z)\partial_\psi z}{|\partial_\psi z|} = \varphi'(z)\frac{h'(w)e^{i\psi}}{|h'(w)|} =$$

$$= \frac{e^{i\psi}}{|h'(w)|} = \frac{1}{|h'(w)|}\frac{w}{r} = \frac{|\varphi'(z)|}{|\varphi(z)|}\varphi(z).$$

Тепер вираз похідної від функції (8) за напрямком нормалі до лінії L_r з урахуванням цієї формули і формул (2) знаходимо у вигляді

$$\frac{\partial V(z,\bar{z})}{\partial n} =$$

$$= \frac{|\varphi'(z)|}{|\varphi(z)|}\sum_{m=0}^{\infty} c_m\left[mJ_m\left(\lambda\varphi(z), \lambda\overline{\varphi(z)}\right) - \lambda\overline{\varphi(z)}J_{m+1}\left(\lambda\varphi(z), \lambda\overline{\varphi(z)}\right)\right] +$$

$$+\frac{|\varphi'(z)|}{|\varphi(z)|}\sum_{m=1}^{\infty} c_{-m}\left[mJ_m\left(\lambda\overline{\varphi(z)}, \lambda\varphi(z)\right) - \lambda\varphi(z)J_{m+1}\left(\lambda\overline{\varphi(z)}, \lambda\varphi(z)\right)\right].$$

Покладаючи $|\varphi(z)| = 1$ і враховуючи формулу

$$mJ_m(\lambda) - \lambda J_{m+1}(\lambda) = \lambda J'_m(\lambda),$$

отримуємо вираз похідної за напрямком нормалі до лінії L і записуємо вираз функції (8) на цій лінії:

$$\left.\frac{\partial V(z,\bar{z})}{\partial n}\right|_L = \left|\varphi'(z)\right|_L \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{im\psi}\left[mJ_m(\lambda) - \lambda J_{m+1}(\lambda)\right] +$$

$$+\left|\varphi'(z)\right|_L \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} e^{-im\psi}\left[mJ_m(\lambda) - \lambda J_{m+1}(\lambda)\right] =$$

$$= \left|\varphi'(z)\right|_L \sum_{m=0}^{\infty} c_m \lambda J'_m(\lambda) e^{im\psi} + \left|\varphi'(z)\right|_L \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m}\lambda J'_m(\lambda) e^{-im\psi}, \tag{9}$$

$$V|_L = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{im\psi} J_m(\lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} e^{-im\psi} J_m(\lambda).$$

Одержані формули використано для формулювання крайових задач.

2. Перетворення Фур'є — Бесселя функції двох змінних. Нехай функція $f(r,\psi) = f\{w,\bar{w}\}$ розвивається у рівномірно збіжний ряд за системою функцій $\left\{e^{ik\psi}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в області $[-\pi;\ \pi]$,

$$f(w,\vec{w}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{in\psi}, \qquad f_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(w,\bar{w}) e^{-in\psi} d\psi. \tag{10}$$

Вважаємо також, що функції $f_n(r)$ зображуються інтегралами Фур'є – Бесселя [8]

$$f_n(r) = \int_0^{\infty} \widehat{f}_n(\lambda) J_n(r\lambda)\lambda d\lambda, \qquad \widehat{f}_n(\lambda) = \int_0^{\infty} f_n(r) J_n(\lambda r) r dr. \tag{11}$$

Підставляючи другу формулу з (10) у другу формулу з (11), одержуємо перетворення функції $f(w,\bar{w})$:

$$\widehat{f}_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} f(w,\bar{w}) e^{-in\psi} J_n(\lambda r) r dr d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} f(w,\bar{w}) J_n(\lambda\bar{w},\lambda w) r dr d\psi.$$

Обернене перетворення цієї функції отримуємо з перших формул (10) і (11):

$$f(w,\vec{w}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \widehat{f}_n(\lambda) J_n(r\lambda) e^{in\psi}\lambda d\lambda =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \widehat{f}_n(\lambda) J_n(w\lambda, \bar{w}\lambda) \lambda d\lambda,$$

де $J_{-n}(\lambda w, \lambda\bar{w}) \overset{\mathrm{df}}{=} J_n(\lambda\bar{w}, \lambda w)$. Отже, маємо такі формули перетворення Фур'є – Бесселя для функції двох змінних:

$$\widehat{f}_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} f(w, \bar{w}) J_n(\lambda\bar{w}, \lambda w) r dr d\psi,$$
$$f(w, \vec{w}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \widehat{f}_n(\lambda) J_n(w\lambda, \bar{w}\lambda) \lambda d\lambda. \tag{12}$$

***Приклад* 1.** Для функції вигляду $f(w, \bar{w}) = f(r) e^{ik\psi}$ формули (12) набирають вигляду

$$\widehat{f}_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} f(r)\, e^{ik\psi} J_n(\lambda\bar{w}, \lambda w) r dr d\psi =$$

$$= \int_0^{\infty} f(r) J_k(\lambda r) r dr, \quad n = k, \qquad \widehat{f}_n(\lambda) = 0, \quad n \neq k,$$

$$f(w, \vec{w}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \widehat{f}_n(\lambda) J_n(w\lambda, \bar{w}\lambda) \lambda d\lambda = \int_0^{\infty} \widehat{f}_k(\lambda) e^{ik\psi} J_k(r\lambda) \lambda d\lambda =$$

$$= e^{ik\psi} \int_0^{\infty} \widehat{f}_k(\lambda) J_k(r\lambda) \lambda d\lambda.$$

Якщо функція залежить тільки від радіальної координати, тобто

$$f(w, \bar{w}) = f(r),$$

то $k = 0$ і одержимо звичайне перетворення Фур'є – Бесселя.

3. Ортогональні по області системи бесселівських функцій двох змінних. Розглянемо дві задачі про власні значення і власні функції :

(А) знайти ненульовий розв'язок рівняння (7) в області $D \subset C_z$ за умови $V|_L = 0$;

(Б) знайти ненульовий розв'язок рівняння (7) в області $D \subset C_z$ за умови $\partial V / \partial n|_L = 0$.

З умови рівності нулю розв'язку або його похідної (9) на межі області D одержимо рівняння

$$J_m(\lambda) = 0, \qquad J'_m(\lambda) = 0. \tag{13}$$

Нехай $\lambda_{k(m)}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — додатні корені (власні числа) першого або другого рівняння з (13). Запишемо систему власних функцій цих задач:

$$\left\{ \Phi_{m,k(m)}(z, \bar{z}) = J_m\left(\lambda_{k(m)}\varphi(z), \lambda_{k(m)}\overline{\varphi(z)}\right)\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad m = 0, \pm 1, \ldots, \tag{14}$$

де

$$J_{-m}\left(\lambda_{k(-m)}w, \lambda_{k(-m)}\bar{w}\right) = J_{-m}\left(\lambda_{k(m)}w, \lambda_{k(m)}\bar{w}\right) \stackrel{\text{df}}{=} J_m\left(\lambda_{k(m)}\bar{w}, \lambda_{k(m)}w\right),$$

$$\Phi_{-m,k(-m)}\left(z,\bar{z}\right) \stackrel{\text{df}}{=} \Phi_{m,k(m)}\left(\bar{z}, z\right).$$

Зауважимо, що у відповідності з (2)

$$J_{-m}\left(\lambda w, \lambda\bar{w}\right) = (-1)^m J_m\left(\lambda\bar{w}, \lambda w\right),$$

тому в (14) маємо символ “df”.

Теорема 1. *Система функцій* (14) *ортогональна по області D з вагою* $|\varphi(z)|^2 = \varphi(z)\overline{\varphi(z)}$,

$$\left\|\Phi_{m,k(m)}\right\|^{-2} \iint\limits_D \Phi_{m,k(m)}\left(z,\bar{z}\right)\Phi_{n,l(n)}\left(\bar{z},z\right)\left|\varphi'(z)\right|^2 dxdy = \delta_{mn}\delta_{kl}, \qquad (15)$$

де

$$\left\|\Phi_{m,k(m)}\right\|^2 = \iint\limits_D \Phi_{m,k(m)}\left(z,\bar{z}\right)\Phi_{-m,k(m)}\left(z,\bar{z}\right)\left|\varphi'(z)\right|^2 dxdy = 2\pi d_{k(n)}^2,$$

$$2\pi d_{k(m)}^2 = \pi\left[J_m'\left(\lambda_{k(m)}\right)\right]^2, \qquad 2\pi d_{k(m)}^2 = \pi\left(1 - \frac{m^2}{\lambda_{k(m)}^2}\right) J_m^2\left(\lambda_{k(m)}\right)$$

— квадрати норм функцій, що відповідають першій або другій задачі.

Доведення. Перетворимо інтеграл у лівій частині (15) із використанням формули (6) і співвідношень ортогональності систем циліндричних функцій $\left\{J_m\left(\lambda_{k(m)}r\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ в області $[0;\ 1]$ та ортогональності системи функцій $\left\{e^{ik\psi}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в області $[-\pi;\ \pi]$ [9]:

$$\frac{1}{d_{k(m)}^2}\int\limits_0^1 J_m\left(\lambda_{k(m)}r\right) J_m\left(\lambda_{n(m)}r\right) rdr = \delta_{kn}, \quad m = 0,\ 1,\ \ldots, \quad k,n = 1,2,\ldots,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ik\psi}e^{-in\psi}d\psi = \delta_{kn}, \quad k,n = 0,\pm 1,\ \ldots .$$

В результаті отримаємо

$$\iint\limits_D \Phi_{m,k(m)}\left(z,\bar{z}\right)\Phi_{-n,l(n)}\left(z,\bar{z}\right)\left|\varphi'(z)\right|^2 dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \varphi^m(z) J_m\left(\lambda_{k(m)}\varphi(z), \lambda_{k(m)}\overline{\varphi(z)}\right) J_n\left(\lambda_{l(n)}\overline{\varphi(z)}, \lambda_{l(n)}\varphi(z)\right) \times$$

$$\times \left|\varphi'(z)\right|^2 dxdy = \iint\limits_{|w|\le 1} J_m\left(\lambda_{k(m)}w, \lambda_{k(m)}\bar{w}\right) J_n\left(\lambda_{l(n)}\bar{w}, \lambda_{l(n)}w\right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{|r|\le 1} e^{im\psi} J_m\left(\lambda_{k(m)} r\right) e^{-in\psi} J_n\left(\lambda_{l(n)} r\right) r dr d\psi =$$

$$= \int\limits_0^1 J_m\left(\lambda_{k(m)} r\right) J_n\left(\lambda_{l(n)} r\right) r dr \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\psi} d\psi = 2\pi d_{k(m)}^2 \delta_{mn}\delta_{kl}.$$

Тут враховано також подання елемента площі $dudv{=}rdrd\psi{=}|\varphi'(z)|^2 dxdy$. Отже, співвідношення (15) виконуються.

Наслідок. *З теореми* 1 *випливає, що система* $\left\{J_m\left(\lambda_{k(m)} w, \lambda_{k(m)} \bar{w}\right)\right\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ *ортогональна по кругу* $\bar{K}$,

$$\left\|J_{m,k(m)}\right\|^{-2} \iint\limits_D J_m\left(\lambda_{k(m)} w, \lambda_{k(m)} \bar{w}\right) J_n\left(\lambda_{l(n)} \bar{w}, \lambda_{l(n)} w\right) dudv = \delta_{mn}\delta_{kl}.$$

Теорема 2. *Нехай функція* $f^*(r, \psi) = f(w, \bar{w})$ *розвивається у рівномірно збіжний у крузі* $\bar{K}$ *ряд*

$$f(w, \bar{w}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_{0,k} J_0\left(\lambda_{k(0)} r\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{n,k}\cos n\psi + B_{k(n)}\sin n\psi\right) J_n\left(\lambda_{k(n)} r\right), \tag{16}$$

де

$$A_{n,k} = \frac{1}{2\pi d_{k(n)}^2}\int\limits_0^1\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(r, \psi) J_n\left(\lambda_{k(n)} r\right)\cos n\psi\, r dr d\psi,$$

$$B_{n,k} = \frac{1}{2\pi d_{k(n)}^2}\int\limits_0^1\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(r, \psi) J_n\left(\lambda_{k(n)} r\right)\sin n\psi\, r d\rho d\psi,$$

і (6) — *конформне відображення однозв'язної області* $\bar{D}$ *на круг* $\bar{K}$. *Тоді функція* $f_0(z, \bar{z}) = f\left(\varphi(z), \overline{\varphi(z)}\right)$ *розвивається у рівномірно збіжний в області* $\bar{D}$ *ряд за системою функцій* (14),

$$f_0(z, \bar{z}) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n,k}\Phi_{n,k(n)}(z, \bar{z}), \tag{17}$$

де

$$C_{n,k} = \left\|\Phi_{n,k(n)}\right\|^{-2}\iint\limits_D f_0(z, \bar{z})\,\Phi_{n,k(n)}(\bar{z}, z)\left|\varphi'(z)\right|^2 dxdy. \tag{18}$$

Доведення. Спочатку перетворимо рівномірно збіжний у крузі $\bar{K}$ ряд (16) і його коефіцієнти з використанням комплексного зображення тригонометричних функцій

$$f(w, \bar{w}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2} A_{0,k} J_0\left(\lambda_{k(0)} r\right) +\right.$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(A_{n,k}-iB_{n,k}\right)e^{in\psi}+\left(A_{n,k}+iB_{n,k}\right)e^{-in\psi}\right)J_n\left(\lambda_{k(n)}r\right)\Bigg]=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_{n,k}-iB_{n,k}\right)e^{in\psi}J_n\left(\lambda_{n(k)}r,\lambda_{n(k)}r\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{n,k}+iB_{n,k}\right)e^{-in\psi}J_n\left(\lambda_{n(k)}r,\lambda_{n(k)}r\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n,k}J_n\left(\lambda_{n(k)}w,\lambda_{n(k)}\bar{w}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{C_{n,k}}J_n\left(\lambda_{n(k)}\bar{w},\lambda_{n(k)}w\right),$$

$$C_{n,k}=\frac{1}{2}\left(A_{n,k}-iB_{n,k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi d_{k(n)}^2}\iint\limits_{|w|\le 1}f\left(w,\bar{w}\right)J_n\left(\lambda_{n(k)}w,\lambda_{n(k)}\bar{w}\right)\,rdrd\psi,$$

$$\overline{C_{n,k}}=\frac{1}{2}\left(A_{n,k}+iB_{n,k}\right)=\frac{1}{2\pi d_{k(n)}^2}\iint\limits_{|w|\le 1}f\left(w,\bar{w}\right)J_n\left(\lambda_{n(k)}\bar{w},\lambda_{n(k)}w\right)\,rdrd\psi.$$

Отже, функція $f\left(w,\bar{w}\right)$ розвивається за системою $\left\{J_m\left(\lambda_{k(m)}\bar{w},\lambda_{k(m)}w\right)\right\}$ у рівномірно збіжний ряд у цьому крузі.

Тепер перетворимо одержаний ряд і його коефіцієнти, замінивши змінні з використанням перетворення (6):

$$f\left(w,\bar{w}\right)=f\left(\varphi\left(z\right),\overline{\varphi\left(z\right)}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n,k}J_n\left(\lambda_{n(k)}w,\lambda_{n(k)}\bar{w}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{C_{n,k}}J_n\left(\lambda_{n(k)}\bar{w},\lambda_{n(k)}w\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n,k}\Phi_{n,k(n)}\left(z,\bar{z}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{C_{n,k}}\Phi_{n,k(n)}\left(\bar{z},z\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_{n,k}\Phi_{n,k(n)}\left(z,\bar{z}\right),$$

$$C_{n,k}=\frac{1}{2\pi d_{k(n)}^2}\iint\limits_{|w|\le 1}f\left(r,\psi\right)J_n\left(\lambda_{n(k)}\bar{w},\lambda_{n(k)}w\right)\,dudv=$$

$$=\frac{1}{2\pi d_{k(n)}^2}\iint\limits_{D}f_0\left(z,\bar{z}\right)\Phi_{n,k(n)}\left(\bar{z},z\right)\left|\varphi'\left(z\right)\right|^2\,dxdy.$$

Аналогічно отримаємо відповідний вираз для коефіцієнтів $\overline{C_{n,k}}$. Враховуючи тут позначення $C_{-n,k}=\overline{C_{n,k}},\ \Phi_{-n,k(n)}\left(z,\bar{z}\right)=\Phi_{n,k(n)}\left(\bar{z},z\right)$, одержуємо ряд (16) у формі (17) і відповідні зображення його коефіцієнтів (18).

Ряд (17) рівномірно збігається в області $\bar{D}$, оскільки він одержаний із рівномірно збіжного в області $\bar{K}$ ряду (16) заміною $w=\varphi\left(z\right),\ \bar{w}=\overline{\varphi\left(z\right)}$.

***Приклад* 2.** Знайдемо розвинення аналітичної в області $\bar{D}$ функції $G(z)$ в ряд за системою функцій (14). Вважаємо, що функція $G(z)$ розвивається [5] у рівномірно збіжний у цій області ряд за системою функцій $\{1,\ \varphi^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$,

$$G(z) = G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \varphi^n(z). \tag{19}$$

Використаємо [9, с. 292] розвинення функції $|w|^n = r^n,\ 0 \le r \le 1,\ n > 0,$ у рівномірно збіжний ряд за системою власних функцій задачі (Б),

$$r^n = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{n,k(n)} J_n\left(\lambda_{k(n)} r\right), \quad \text{де} \quad \Lambda_{n,k(n)} = \frac{2\lambda_{k(n)} J_{n+1}\left(\lambda_{k(n)}\right)}{\left(\lambda_{k(n)}^2 - n^2\right) J_n^2\left(\lambda_{k(n)}\right)}.$$

Звідси одержимо

$$\begin{gathered} w^n = r^n e^{in\psi} = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{n,k(n)} J_n\left(\lambda_{k(n)} w, \lambda_{k(n)} \bar{w}\right), \\ \varphi^n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{n,k(n)} \Phi_{n,k(n)}(z, \bar{z}). \end{gathered} \tag{20}$$

Враховуючи формули (20) у виразі функції $G(z)$, отримуємо подвійний ряд за системою функцій (14):

$$G(z) = G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} G_n \Lambda_{n,k(n)} \Phi_{n,k(n)}(z, \bar{z}), \tag{21}$$

який внаслідок рівномірної збіжності рядів (19), (20) збігається в $\bar{D}$.

4. Задача Коші. Розглянемо задачу Коші

$$4a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial w \partial \bar{w}} = \alpha_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \alpha_2 \frac{\partial U}{\partial t} + Q(w, \bar{w}, t), \qquad (w, t) \in C_w \times (0,\ \infty),$$

$$U|_{t=0} = f(w, \bar{w}), \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = g(w, \bar{w}), \quad w \in C_w, \tag{22}$$

де $Q(w, \bar{w}, t)$, $f(w, \bar{w})$, $g(w, \bar{w})$ — дійсні функції; $a \ne 0,\ \alpha_1,\ \alpha_2$ — дійсні сталі, які одночасно не дорівнюють нулю.

Рівняння (22) описує коливання мембрани $(\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0)$, поширення тепла (дифузію) в циліндричному тілі $(\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1)$, електромагнітні коливання в циліндричному провіднику та ін.

Вважаємо, що існують [10] узагальнений розв'язок задачі (22), а також функція $U(w, \bar{w}, t)$ та відповідні її частинні похідні і функції $Q(w, \bar{w}, t)$, $f(w, \bar{w})$, $g(w, \bar{w})$ зображуються рівномірно збіжними рядами (12):

$$
\begin{aligned}
U(u,v,t) = U(w,\bar{w},t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \widehat{u}_n(\lambda,t)\, J_n(\lambda w, \lambda\bar{w})\, \lambda d\lambda, \\
Q(w,\bar{w},t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \widehat{q}_n(\lambda,t)\, J_n(\lambda w, \lambda\bar{w})\, \lambda d\lambda, \\
f(w,\bar{w}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \widehat{f}_n(\lambda)\, J_n(\lambda w, \lambda\bar{w})\, \lambda d\lambda, \\
g(w,\bar{w}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \widehat{g}_n(\lambda)\, J_n(\lambda w, \lambda\bar{w})\, \lambda d\lambda,
\end{aligned} \tag{23}
$$

де

$$
\begin{aligned}
\widehat{q}_n(\lambda,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} Q(w,\bar{w},t)\, J_n(\lambda\bar{w}, \lambda w)\, r dr d\psi, \\
\widehat{f}_n(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} f(w,\bar{w})\, J_n(\lambda\bar{w}, \lambda w)\, r dr d\psi, \\
\widehat{g}_n(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} g(w,\bar{w})\, J_n(\lambda\bar{w}, \lambda w)\, r dr d\psi.
\end{aligned}
$$

Підставляючи формули (23) в рівняння й умови (22), одержуємо такі задачі:

$$
\begin{gathered}
\alpha_1 \frac{d^2\, \widehat{u}_n(\lambda,t)}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d\, \widehat{u}_n(\lambda,t)}{dt} + a^2\lambda^2\, \widehat{u}_n(\lambda,t) = -\, \widehat{q}_n(\lambda,t), \\
\widehat{u}_n(\lambda,0) = \widehat{f}_n(\lambda), \quad \frac{\partial\, \widehat{u}_n(\lambda,0)}{\partial t} = \widehat{g}_n(\lambda).
\end{gathered} \tag{24}
$$

Розв'язки крайових задач (24) отримаємо операційним методом і запишемо їх для окремих випадків фізичних задач:

а) коливання мембрани ($\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0$)

$$
\widehat{u}_n(\lambda,t) = \widehat{f}_n(\lambda) \cos a\lambda t + \frac{\widehat{g}_n(\lambda)}{\lambda} \sin a\lambda t - \frac{1}{a\lambda} \int_0^t \sin a\lambda(t-\tau)\, \widehat{q}_n(\lambda,\tau)\, d\tau, \tag{25}
$$

б) плоска задача дифузії ($\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1$)

$$
\widehat{u}_n(\lambda,t) = \widehat{f}_n(\lambda)\, e^{-a^2\lambda^2 t} - \int_0^t e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\, \widehat{q}_n(\lambda,\tau)\, d\tau. \tag{26}
$$

Розв'язки задачі (22) для розглянутих окремих випадків одержимо підстановкою виразів (25), (26) у першу формулу (23).

***Приклад* 3.** Знайдемо розв'язок задачі Коші для рівняння коливань

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial w \partial \bar{w}} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (w,t) \in C_w \times (0 < t < \infty),$$

$$U|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = g(w,\bar{w}), \quad w \in C_w.$$

Вважаємо, що функція $g(w,\bar{w})$ зображується рівномірно збіжним рядом (23). Підставляючи відповідний вираз (25) у першу з формул (23), одержуємо розв'язок

$$U(w,\bar{w},t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\widehat{g}_n(\lambda)}{\lambda} \sin\lambda t J_n(\lambda w, \lambda\bar{w})\,\lambda d\lambda.$$

Перетворимо вираз цього розв'язку з урахуванням формули Графа і інтеграла Вебера [6, 7]

$$U(w,\bar{w},t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \widehat{g}_n \sin\lambda t J_n(\lambda w, \lambda\bar{w})\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(z,\bar{z})\,\rho d\rho d\omega \int_0^{\infty} \sin\lambda t \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\lambda\bar{z}, \lambda z)\, J_n(\lambda w, \lambda\bar{w}) \right) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(z,\bar{z})\,\rho d\rho d\omega \int_0^{\infty} \sin\lambda t\, J_0(\lambda|w-z|)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\theta(t-|w-z|)}{\sqrt{t^2-|w-z|^2}} g(z,\bar{z})\,\rho d\rho d\omega,$$

де $\theta(\xi) = 0,\ \xi < 0;\ \theta(\xi) = 1,\ \xi > 0.$

***Приклад* 4.** Знайдемо розв'язок задачі Коші для рівняння дифузії (теплопровідності)

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial w \partial \bar{w}} = \frac{\partial U}{\partial t} + Q(w,\bar{w},t), \quad (w,t) \in C_w \times (0 < t < \infty),$$

$$U|_{t=0} = f(w,\bar{w}), \quad w \in C_w.$$

Вважаємо, що функції $f(w,\bar{w})$, $Q(w,\bar{w},t)$ зображуються рівномірно збіжними рядами (23). Підставляючи (26) у першу з формул (23), отримуємо розв'язок

$$U(w,\bar{w},t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \widehat{f}_n(\lambda)\, e^{-\lambda^2 t} J_n(\lambda w, \lambda\bar{w})\,\lambda d\lambda -$$

$$- \int_0^t d\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \widehat{q}_n(\lambda,\tau)\, e^{-\lambda^2(t-\tau)} J_n(\lambda w, \lambda\bar{w})\,\lambda d\lambda. \tag{27}$$

Перетворимо підінтегральні вирази у (27):

$$U(w,\bar{w},t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}f(z,\bar{z})\,\rho d\rho d\omega\times$$

$$\times\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\lambda^2 t}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(\lambda w,\lambda\bar{w})\,J_n(\lambda\bar{z},\lambda z)\right)\lambda d\lambda-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}Q(z,\bar{z},\tau)\,\rho d\rho d\omega\times$$

$$\times\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\lambda^2(t-\tau)}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(\lambda w,\lambda\bar{w})\,J_n(\lambda\bar{z},\lambda z)\right)\lambda d\lambda.$$

Враховуючи тут формулу Графа (3) і інтеграл Вебера [6, 7], одержуємо

$$U(w,\bar{w},t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}f(z,\bar{z})\,\rho d\rho d\omega\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\lambda^2 t}J_0(\lambda|w-z|)\,\lambda d\lambda-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}Q(z,\bar{z},\tau)\,\rho d\rho d\omega\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\lambda^2(t-\tau)}J_0(\lambda|w-z|)\,\lambda d\lambda=$$

$$=\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\frac{|w-z|^2}{4t}}f(z,\bar{z})\,\rho d\rho d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{t}\frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}Q(z,\bar{z},\tau)\,e^{-\frac{|w-z|^2}{4(t-\tau)}}\rho d\rho d\omega=$$

$$=\frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{E_2}e^{-\frac{|w-z|^2}{4t}}f(z,\bar{z})\,dxdy-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{0}^{t}\frac{d\tau}{t-\tau}\iint\limits_{E_2}e^{-\frac{|w-z|^2}{4(t-\tau)}}Q(z,\bar{z},\tau)\,dxdy.$$

Ядра інтегралів, одержаних у прикладах 3 і 4, є фундаментальними розв'язками оператора коливань і оператора теплопровідності [10].

5. Крайові задачі. Диференціальне рівняння (22) справедливе також у крузі $K:\ |w|<1$. Переходячи в ньому до нових змінних $z=h(w)\,,\ \bar{z}=\bar{h}(w)\,,\ z\in D$, отримуємо рівняння

$$\frac{4a^2}{|\varphi'(z)|^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\bar{z}}=\alpha_1\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\alpha_2\frac{\partial U}{\partial t}+Q(z,\bar{z},t)\,,\quad (z,t)\in D\times(0,\ \infty)\,, \tag{28}$$

де $a\neq 0,\ \alpha_1,\ \alpha_2$ — дійсні сталі.

Розглянемо крайові задачі про відшукання розв'язків рівняння (28) за виконання умов

$$U|_{z\in L}=0\quad\left(\text{або }\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{z\in L}=0\right), \tag{29}$$

$$U|_{t=0} = f(z, \bar{z}), \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = g(z, \bar{z}), \qquad z \in \bar{D}, \tag{30}$$

де $f(z, \bar{z})$, $g(z, \bar{z})$ і $Q(z, \bar{z}, t) = Q\left(\varphi(z), \overline{\varphi(z)}, t\right)$ — дійсні функції, визначені відповідно в області $\bar{D}$ і циліндрі $D \times (0, \infty)$. Якщо $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$, то формулюється тільки перша умова з (30).

Вважаємо, що існує [10] узагальнений розв'язок задачі (28) – (30) і функції $U(z, \bar{z}, t)$, $F(z, \bar{z}, t)$ та відповідні похідні функції $U(z, \bar{z}, t)$ розвиваються за системою функцій (14) у рівномірно збіжні ряди в області $\bar{D} \times (0 \leq t \leq T < \infty)$, а функції $f(z, \bar{z})$, $g(z, \bar{z})$ — у рівномірно збіжні ряди в $\bar{D}$:

$$\begin{aligned} U(z, \bar{z}, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{k(m)}(t)\, \Phi_{m,k(m)}(z, \bar{z}), \\ Q(z, \bar{z}, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_{k(m)}(t)\, \Phi_{m,k(m)}(z, \bar{z}), \\ f(z, \bar{z}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{k(m)} \Phi_{m,k(m)}(z, \bar{z}), \\ g(z, \bar{z}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{k(m)} \Phi_{m,k(m)}(z, \bar{z}), \end{aligned} \tag{31}$$

де

$$q_{k(n)}(t) = \frac{1}{2\pi d_{k(m)}^2} \iint\limits_D Q(z, \bar{z}, t)\, \Phi_{n,k(n)}(\bar{z}, z) \left|\varphi'(z)\right|^2 dx\, dy,$$

$$f_{k(n)} = \frac{1}{2\pi d_{k(m)}^2} \iint\limits_D f(z, \bar{z})\, \Phi_{n,k(n)}(\bar{z}, z) \left|\varphi'(z)\right|^2 dx\, dy,$$

$$g_{k(n)} = \frac{1}{2\pi d_{k(m)}^2} \iint\limits_D g(z, \bar{z})\, \Phi_{n,k(n)}(\bar{z}, z) \left|\varphi'(z)\right|^2 dx\, dy.$$

Підставляючи вирази функцій (31) у рівняння (28) і умови (29), (30) та враховуючи, що функції системи (14) задовольняють рівняння (7) і, відповідно, умови (13), зводимо задачу до таких задач:

$$\begin{gathered} \alpha_1 \frac{d^2 u_{k(m)}(t)}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d u_{k(m)}(t)}{dt} + a^2 \lambda_{k(m)}^2 u_{k(m)}(t) = -q_{k(m)}(t), \\ u_{k(m)}\big|_{t=0} = f_{k(m)}, \qquad \left.\frac{d u_{k(m)}}{dt}\right|_{t=0} = g_{k(m)}. \end{gathered} \tag{32}$$

Розв'язки задач (32) побудовано операційним методом. Запишемо розв'язки цих задач і крайових задач (28) – (30), що відповідають окремим фізичним процесам:

а) коливання мембрани ($\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0$)

$$u_{k(m)} = f_{k(m)} \cos a\lambda_{k(m)} t + \frac{g_{k(m)}}{\lambda_{k(m)}} \sin a\lambda_{k(m)} t -$$

$$- \frac{1}{a\lambda_{k(m)}} \int\limits_0^t \sin a\lambda_{k(m)} (t-\tau)\; q_{k(m)}(\tau)\, d\tau,$$

$$U(z,\bar z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{k(m)}\, \Phi_{m,k(m)}(z,\bar z) \cos a\lambda_{k(m)} t +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{g_{k(m)}}{\lambda_{k(m)}} \Phi_{m,k(m)}(z,\bar z) \sin a\lambda_{k(m)} t -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{m,k(m)}(z,\bar z)}{a\lambda_{k(m)}} \int\limits_0^t \sin a\lambda_{k(m)} (t-\tau)\; q_{k(m)}(\tau)\, d\tau; \tag{33}$$

б) плоска задача теплопровідності ($\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1$)

$$u_{k(m)} = f_{k(m)} e^{-a^2\lambda_{k(m)}^2 t} - \int\limits_0^t e^{-a^2\lambda_{k(m)}^2 (t-\tau)}\, q_{k(m)}(\tau)\, d\tau,$$

$$U(z,\bar z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{k(m)}\, \Phi_{m,k(m)}(z,\bar z)\; e^{-a^2\lambda_{k(m)}^2 t} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_{m,k(m)}(z,\bar z) \int\limits_0^t e^{-a^2\lambda_{k(m)}^2 (t-\tau)}\, q_{k(m)}(\tau)\, d\tau; \tag{34}$$

в) прогин мембрани (стаціонарна задача, $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0$) і, відповідно, $q_{k(m)}(t) = q_{k(m)}$

$$u_{k(m)} = -\frac{q_{k(m)}}{a^2\lambda_{k(m)}^2}, \qquad U(z,\bar z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_{k(m)}}{a^2\lambda_{k(m)}^2}\, \Phi_{m,k(m)}(z,\bar z).$$

Розв'язки часткових випадків розглянутих задач при $D = K$ збігаються з розв'язками відповідних задач для кругового циліндра [7, 9].

***Приклад* 5.** Нехай M — множина функцій, які зображуються збіжними в області D рядами за системою функцій (14). Дельта-функцією відносно множини M називається граничний елемент слабко збіжної відносно множини M дельтоподібної послідовності функцій [8, с. 185]. Виходячи із співвідношень (17), (18) та властивостей узагальнених функцій, одержуємо

$$\delta(z-z_0, \bar z - \bar z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\| \Phi_{n,k(n)} \right\|^{-2} \Phi_{n,k(n)}(z,\bar z)\, \Phi_{n,k(n)}(\bar z_0, z_0). \tag{35}$$

Легко переконатися, що члени ряду (35) є дійсними функціями

$$\delta(z-z_0,\bar z-\bar z_0)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\Phi_{0,k(0)}\right\|^{-2}\Phi_{0,k(0)}(z,\bar z)\,\Phi_{0,k(0)}(\bar z_0,z_0)+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\Phi_{n,k(n)}\right\|^{-2}\operatorname{Re}\left[\Phi_{n,k(n)}(z,\bar z)\,\Phi_{n,k(n)}(\bar z_0,z_0)\right].$$

Розглянемо задачу про дію (на пластинку) миттєвого точкового джерела тепла інтенсивності A, розміщеного в момент часу t_0 у точці $z_0\in D$. Формулюємо задачу таким чином:

$$\frac{4}{|\varphi'(z)|^2}\frac{\partial^2U}{\partial z\partial\bar z}=\frac{\partial U}{\partial t}+Q(z,\bar z,t),\quad (z,t)\in D\times(0,\infty),$$

$$U|_{z\in L}=0,\quad t\ge 0,\quad U|_{t=0}=0,\quad z\in\bar D,$$

де $Q(z,\bar z,t)=A\delta(z-z_0,\bar z-\bar z_0)\,\delta(t-t_0),\quad t\ge t_0,$ — узагальнена функція.

Коефіцієнти розвинення функції $Q(z,\bar z,t)$ в ряд за системою функцій (14) для випадку задачі (A) отримаємо із (31) і (35) у вигляді

$$q_{k(n)}(t)=\left\|\Phi_{n,k(n)}\right\|^{-2}\Phi_{n,k(n)}(\bar z_0,z_0)\,\delta(t-t_0).$$

Тоді формальний розв'язок задачі, який є узагальненим її розв'язком [10], одержимо з другого співвідношення (34):

$$U(z,\bar z,z_0,\bar z_0,t-t_0)=$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-a^2\lambda_{k(n)}^2(t-t_0)}}{\left\|\Phi_{n,k(n)}\right\|^2}\Phi_{n,k(n)}(z,\bar z)\,\Phi_{n,k(n)}(\bar z_0,z_0),\quad t>t_0.$$

Подвійний ряд у цьому виразі внаслідок обмеженості бесселівських функцій і наявності експоненціального множника збігається в $D\times(0<t<\infty)$.

Якщо в області $D'\subset D$ діють джерела інтенсивності $q(z,\bar z,t)$, то розподіл температури є таким:

$$U(z,\bar z,t)=\int_0^t\iint_{D'}U(z,\bar z,z_0,\bar z_0,t-t_0)\,q(z_0,\bar z_0,t_0)\left|\varphi'(z_0)\right|^2dx_0dy_0dt_0.$$

Вважаємо, що $q(z,\bar z,t)$ — неперервна функція.

***Приклад* 6.** Знайдемо розв'язок однорідного рівняння (28) в області $D\times(0<t<\infty)$:

$$\frac{4}{|\varphi'(z)|^2}\frac{\partial^2U}{\partial z\partial\bar z}=\frac{\partial^2U}{\partial t^2}$$

за виконання умов

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{z\in L}=0,\quad t\ge 0,\quad U|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}=\operatorname{Re}G(z),\quad z\in\bar D,$$

де $G(z)=\varphi^p(z)-\varphi^q(z)$, $p,\ q=1,\ 2,\ \ldots\ (p\ne q)$.

Функцію у другій початковій умові цієї задачі запишемо з урахуванням формули (20) у вигляді

$$\operatorname{Re} G(z) = \frac{1}{2}\left[G(z) + \overline{G(z)}\right] = \frac{1}{2}\left[\varphi^p(z) - \varphi^q(z) + \overline{\varphi^p(z)} - \overline{\varphi^q(z)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{p,k(p)} \left[\Phi_{p,k(p)}(z,\bar{z}) + \Phi_{p,k(p)}(\bar{z},z)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{q,k(q)} \left[\Phi_{q,k(q)}(z,\bar{z}) + \Phi_{q,k(q)}(\bar{z},z)\right].$$

Підставляючи коефіцієнти розвинення функцій $\operatorname{Re} G(z)$ у першу з формул (31), отримуємо розв'язок задачі

$$U(z,\bar{z},t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{p,k(p)}}{\lambda_k(p)} \left[\Phi_{p,k(p)}(z,\bar{z}) + \Phi_{p,k(p)}(\bar{z},z)\right] \sin\lambda_k(p)\, t -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{q,k(q)}}{\lambda_k(q)} \left[\Phi_{q,k(q)}(z,\bar{z}) + \Phi_{q,k(q)}(\bar{z},z)\right] \sin\lambda_k(q)\, t.$$

Ряди, якими задається розв'язок, внаслідок рівномірної збіжності ряду (20) збігаються у розглядуваній в області.

Висновки. Формулювання задачі Коші для основних рівнянь математичної фізики з використанням взаємно спряжених комплексних змінних та зображення їх розв'язків рядами за інтегралами Фур'є – Бесселя суттєво спрощує побудову самих розв'язків, однак не розширює класи розв'язуваних задач. Застосування цього підходу до розв'язання крайових задач для рівнянь з частинними похідними дозволяє поєднати метод розвинення функцій в ряди за власними функціями крайових задач для рівняння Гельмгольца з методом конформних перетворень областей, в яких шукаються розв'язки, на круг і отримати аналітичні розв'язки широкого класу нових задач.

Розглянутий у роботі підхід до розв'язування крайових задачі для однозв'язних областей можна поширити на випадок двозв'язних областей, оскільки функції Бесселя другого роду також виражаються через комплексні змінні. Цей підхід також може бути поширений на задачі, що використовують власні функції граничних задач рівнянь (4), (7), якщо параметр λ набуває комплексних значень.

Література

1. *Суетин П. К.* Ортогональные многочлены по двум переменным. – М.: Наука, 1988. – 384 с.
2. *Koornwinder T. H.* Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials // Theory and Appl. Spac. Funct. – New York, 1875. – P. 435 – 495.
3. *Dunkl C. F., Xu Y.* Orthogonal polynomials of several variables. – Cambridge Univ. Press, 2014. – 426 p.
4. *Сухорольський М. А.* Розвинення функцій за системою поліномів, біортогональних на замкненому контурі з системою регулярних у нескінченно віддаленій точці функцій // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 2. – С. 238 – 254.
5. *Сухорольський М. А.* Граничні задачі для рівняння Гельмгольца в областях комплексної площини // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 3. – С. 364 – 377.
6. *Korn G. A., Korn T. M.* Mathematical handbook for scientists and engineers. – Mineola, New York: Dover Publ., INC, 2000. – 1130 p.
7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 698 с.
8. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. – М.: Высш. шк., 1964. – 560 с.
9. *Толстов Г. П.* Ряды Фурье. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
10. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

Одержано 28.01.16