УДК 517.97

С. М. Бак (Вінниц. держ. пед. ун-т ім. М. Коцюбинського)

ІСНУВАННЯ ВІДОКРЕМЛЕНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ ДЛЯ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНО ЗВ'ЯЗАНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

We consider a system of differential equations that describes the dynamics of an infinite system of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on the 2d-lattice. By the method of critical points, we obtain a result on existence of the solitary traveling waves.

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая динамику бесконечной системы нелинейно связанных нелинейных осцилляторов на двумерной решетке. С помощью метода критических точек получен результат о существовании уединенных бегущих волн.

1. Вступ. У цій статті будемо розглядати рівняння, які описують динаміку нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на плоскій цілочисловій ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n,m)-го осцилятора в момент часу t. Передбачається, що кожний осцилятор нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = U'(q_{n+1,m} - q_{n,m}) - U'(q_{n,m} - q_{n-1,m}) + \\ + U'(q_{n,m+1} - q_{n,m}) - U'(q_{n,m} - q_{n,m-1}) - V'(q_{n,m}), \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{1}$$

де $U, V \in C^1(\mathbb{R})$.

Рівняння (1) — це нескінченна система звичайних диференціальних рівнянь, причому при $V(r) \equiv 0$ вони є двовимірним аналогом системи Фермі – Пасти – Улама, а при $V(r) = K(1 - \cos r)$ — дискретним рівнянням $\sin$-Ґордона на двовимірній ґратці.

Важливим класом розв'язків для таких систем є біжучі хвилі. Досить детальні результати про біжучі хвилі в ланцюгах Фермі – Пасти – Улама можна знайти у працях О. Панкова, зокрема в [15] наведено найбільш повний огляд результатів. Результати досліджень таких систем із фізичної точки зору можна знайти в монографії [9]. У статті [6] встановлено умови існування періодичних біжучих хвиль у системі Фермі – Пасти – Улама на двовимірній ґратці. Водночас ланцюги осциляторів розглядались у кількох працях, зокрема у [12] результати отримано методами теорії біфуркацій, а в [1, 8] встановлено умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль за допомогою методу критичних точок. У статтях [2, 5, 10, 11] вивчались біжучі хвилі для систем лінійно зв'язаних осциляторів, розміщених на двовимірних ґратках. Зокрема, в [10] досліджувалась система із непарною 2π-періодичною нелінійністю, а в [11] взагалі розглядалися лінійні осцилятори. У статті [2] встановлено умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль. У статті [14] вивчались періодичні та гомоклінічні біжучі хвилі для нескінченного ланцюга нелінійно зв'язаних нелінійних частинок. У статті [7] одержано результат про існування періодичних біжучих хвиль для дискретного рівняння $\sin$-Ґордона на двовимірній ґратці, у статті [3] — результат про існування дозвукових періодичних біжучих хвиль для нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці, а у статті [4] — умови існування надзвукових хвиль для такої системи.

2. Постановка задачі. Зазначимо, що біжуча хвиля у двовимірному випадку має вигляд

$$q_{n,m}(t) = u(n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct),$$

де функція неперервного аргументу $u(s)$ називається профілем, а константа $c \neq 0$ — швидкістю біжучої хвилі. Для її профілю $u(s)$, де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$, рівняння (1) набирає вигляду

$$c^2u''(s) = U'(u(s+\cos\varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s-\cos\varphi)) +$$
$$+U'(u(s+\sin\varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s-\sin\varphi)) - V'(u(s)). \tag{2}$$

Скрізь далі під розв'язком рівняння (2) будемо розуміти функцію $u(s)$ класу $C^2(\mathbb{R})$, яка задовольняє рівняння (2) для всіх $s \in \mathbb{R}$.

Зазначимо, що в рівняння (2) швидкість c входить у квадраті. Звідси випливає, що якщо функція $u(s)$ задовольняє рівняння (2), то існують дві біжучі хвилі з даним профілем u та швидкостями $\pm c$.

Нас цікавлять відокремлені біжучі хвилі, профіль яких задовольняє крайову умову

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \tag{3}$$

Зауважимо, що такі хвилі називають ще гомоклінічними до нуля.

3. Варіаційне формулювання задачі. Позначимо через E гільбертів простір $H^1(\mathbb{R})$ зі скалярним добутком

$$(u,v) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u(s)v(s) + u'(s)v'(s))ds$$

і відповідною нормою $\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$. Нагадаємо, що за теоремою вкладення $E \subset C_b(\mathbb{R})$, де $C_b(\mathbb{R})$ — простір обмежених неперервних функцій на $\mathbb{R}$. Більш того, функції з простору E мають нульову границю на нескінченності.

На просторі E означимо оператори

$$(Au)(s) := u(s+\cos\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\cos\varphi} u'(\tau)d\tau,$$

$$(Bu)(s) := u(s+\sin\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\sin\varphi} u'(\tau)d\tau.$$

Тоді справджується така лема (див. [6]).

Лема 1. *Оператори A та B є обмеженими лінійними операторами, що задовольняють нерівності*

$$\|Au\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq |\cos\varphi|\|u\|,$$

$$\|Bu\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq |\sin\varphi|\|u\|.$$

Скрізь далі будемо розглядати потенціали U і V вигляду

(i) $U(r) = \dfrac{c_0^2}{2} r^2 + f(r)$, $V(r) = -\dfrac{a^2}{2} r^2 + g(r)$, де $c_0 \geq 0, a > 0$.

Також припускаємо, що неквадратична частина кожного з цих потенціалів $h \in \{f; g\}$ задовольняє такі умови:

(ii) $h(0) = h'(0) = 0$ і $h'(r) = o(r)$ при $r \to 0$;

(iii) існує $\mu > 2$ таке, що

$$0 \leq \mu h(r) \leq r h'(r), \quad r \neq 0.$$

Неважко переконатись у тому, що з цих умов випливає існування таких сталих $d > 0$ і $d_0 > 0$, що

$$h(r) \geq d|r|^\mu - d_0. \tag{4}$$

Далі нам знадобиться така лема (див. [4]).

Лема 2. *У зроблених припущеннях існує така неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma(r)$, $r \geq 0$, що $\sigma(0) = 0$, $\lim_{r\to\infty} \sigma(r) = +\infty$ і*

$$h'(r) r \leq \sigma(|r|) r^2. \tag{5}$$

На просторі E розглянемо функціонал

$$J(u) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{c^2}{2} |u'(s)|^2 - U(Au(s)) - U(Bu(s)) - V(u(s)) \right\} ds.$$

Безпосередніми обчисленнями одержуємо наступні два твердження.

Лема 3. *У зроблених припущеннях J — функціонал класу C^1 на E, а його похідна для будь-яких $u, v \in E$ виражається формулою*

$$\langle J'(u), v \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ c^2 u'(s) v'(s) - U'(Au(s)) Av(s) - U'(Bu(s)) Bv(s) - V'(u(s)) v(s) \right\} ds.$$

Лема 4. *Критичні точки функціонала J є C^2-розв'язками рівняння* (2), *що задовольняють умову* (3).

Лема 5. *Нехай виконуються умови* (i)–(iii). *Тоді існують такі $\varepsilon > 0$ і $\gamma > 0$, що для нетривіальних критичних точок функціонала J справджуються нерівності*

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|^2 \leq \gamma J(u). \tag{6}$$

Доведення. Нехай $u \in E$ — критична точка функціонала J. Тоді $J'(u) = 0$ і

$$J(u) = J(u) - \frac{1}{\mu} \langle J'(u), u \rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ c^2 |u'(s)|^2 - c_0^2 |Au(s)|^2 - c_0^2 |Bu(s)|^2 + a^2 |u(s)|^2 \right\} ds -$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[f(Au(s))-\frac{1}{\mu}f'(Au(s))Au(s)\right]+\left[f(Bu(s))-\frac{1}{\mu}f'(Bu(s))Bu(s)\right]\right\}ds-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{g(u(s))-\frac{1}{\mu}g'(u(s))u(s)\right\}ds\geq$$

$$\geq\frac{\mu-2}{2\mu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{c^2|u'(s)|^2-c_0^2|Au(s)|^2-c_0^2|Bu(s)|^2+a^2|u(s)|^2\right\}ds.$$

Використовуючи лему 1, маємо

$$J(u)\geq\frac{\mu-2}{2\mu}\left\{\alpha_0\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|u'(s)|^2ds+a^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|u(s)|^2ds\right\},$$

де $\alpha_0=c^2-c_0^2$. Тоді

$$J(u)\geq\frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_1\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|u'(s)|^2ds+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|u(s)|^2ds\right\}=\frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_1\|u\|^2,$$

де $\alpha_1=\min\{\alpha_0,a^2\}$. Звідси випливає друга з нерівностей (6).

Доведемо першу з нерівностей (6). Для критичної точки $u\in E$ маємо $\langle J'(u),u\rangle=0$, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{c^2|u'(s)|^2-c_0^2|Au(s)|^2-c_0^2|Bu(s)|^2+a^2|u(s)|^2\right\}ds=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{f'(u(s)+g'(u(s)\right\}u(s)ds.$$

Звідси, як і вище, отримуємо

$$\alpha_1\|u\|^2\leq\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{f'(u(s)+g'(u(s)\right\}u(s)ds. \tag{7}$$

За лемою 2, враховуючи нерівність (5), одержуємо

$$(f'(r)+g'(r))r\leq\tilde{\sigma}(|r|)r^2,$$

де $\tilde{\sigma}(r)$ — монотонно зростаюча неперервна функція від $r\geq 0$ і $\tilde{\sigma}(0)=0$. Тоді з (7) випливає, що

$$\alpha_1\|u\|^2\leq\tilde{\sigma}(\|u\|_{C_b(\mathbb{R})})\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\|u(s)\|^2ds.$$

За теоремою вкладення

$$\|u\|_{C_b(\mathbb{R})}\leq C\|u\|.$$

Отже,

$$\alpha_1 \|u\|^2 \leq \tilde{\sigma}(C\|u\|)\|u\|^2.$$

Оскільки $u \neq 0$, то

$$\tilde{\sigma}(C\|u\|) \geq \alpha_1,$$

звідки випливає перша з нерівностей (6) з $\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} = C^{-1} \cdot \tilde{\sigma}(\alpha_1)$.

Лему 5 доведено.

4. Основний результат. Для одержання основного результату цієї статті нам знадобиться наступна теорема (див. [4], теорема 2), в якій встановлено існування періодичних біжучих хвиль.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (i) – (iii). *Тоді для будь-яких* $k \geq 1$ *і* $c > c_0$ *рівняння* (2) *має* $2k$*-періодичний розв'язок. Тим самим існують дві періодичні біжучі хвилі з профілем* u *і швидкостями* $\pm c$. *Більш того, існують такі сталі* $\varepsilon_0 > 0$ *і* $C > 0$, *які не залежать від* k, *що*

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C, \qquad \varepsilon_0 \leq J_k(u) \leq C. \tag{8}$$

Для одержання цього результату на гільбертовому просторі $E_k = \{u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \colon u(s+2k) = u(s)\}$ зі скалярним добутком

$$(u, v) = \int_{-k}^{k} (u(s)v(s) + u'(s)v'(s))ds$$

і відповідною нормою $\|u\|_k = (u, u)^{\frac{1}{2}}$ було розглянуто функціонал

$$J_k(u) := \int_{-k}^{k} \left\{ \frac{c^2}{2}|u'(s)|^2 - U(Au(s)) - U(Bu(s)) - V(u(s)) \right\} ds,$$

критичні точки якого є шуканими періодичними розв'язками. Цей функціонал задовольняє всі умови теореми про гірський перевал (див. [15, 16]), яка встановлює існування його критичних точок.

Доведемо тепер існування відокремлених біжучих хвиль з тими ж припущеннями, з якими встановлено існування періодичних хвиль (теорема 1). Біжучі хвилі в даному випадку знаходяться як критичні точки функціонала J. Функціонал J задовольняє частину умов теореми про гірський перевал. Однак умова Пале – Смейла для цього функціонала не виконується. Тому критичні точки в даному випадку будуються іншим способом — за допомогою переходу до границі в критичних точках функціонала J_k.

Для доведення основного результату цієї статті знадобляться деякі попередні результати. Перший з них є відомим (див. [13]).

Лема 6. *Нехай* ν_n — *обмежена послідовність в* E. *Тоді якщо для деякого* $r > 0$

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \int_{y-r}^{y+r} |\nu_n(s)|^2 ds \to 0, \tag{9}$$

то $\nu_n \to 0$ *в* $L^p(\mathbb{R})$ *для будь-якого* $p > 2$.

Далі знадобиться наступна модифікація цього результату.

Лема 7. *Нехай $u_n \in E_{k_n}$, де $k_n \to \infty$ і $\|u_n\|_{k_n}$ є обмеженою. Тоді якщо для деякого $r > 0$*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \int\limits_{y-r}^{y+r} |u_n(s)|^2 ds \to 0, \tag{10}$$

то $\|u_n\|_{L^p_{(-k_n,k_n)}} \to 0$ для будь-якого $p > 2$.

Доведення. Це твердження зводиться до попереднього таким чином. Позначимо через χ таку неперервну функцію на $\mathbb{R}$, що $\chi_n(s) = 1$ при $|s| \le k_n$, $\chi_n(s) = 0$ при $|s| \ge k_n + 1$ і $\chi_n(s)$ є лінійною на відрізках $[-k_n - 1, -k_n]$ і $[k_n, k_n + 1]$. Очевидно, функція χ є диференційовною скрізь, крім точок $s = \pm k_n,\ \pm(k_n + 1)$, і $|\chi_n'(s)| \le 1$.

Покладемо $\nu_n(s) = \chi_n(s)u_n(s)$. Тоді ν_n належить E і маємо носій на відрізку $[-k_n - 1, k_n + 1]$. Крім того,

$$\|\nu_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\chi_n(s)u_n(s)|^2 ds \le \int\limits_{-k_n-1}^{k_n+1} |u_n(s)|^2 ds \le \int\limits_{-2k_n}^{2k_n} |u_n(s)|^2 ds \le 2\|u_n\|^2_{L^2(-2k_n,2k_n)}.$$

Далі, згідно з формулою Лейбніца

$$\|\nu_n'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|\chi_n u_n' + \chi_n' u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \|\chi_n u_n'\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\chi_n' u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \le$$

$$\le \left\{ \int\limits_{-k_n-1}^{k_n+1} |u_n'(s)|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int\limits_{-k_n-1}^{k_n+1} |u_n(s)|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left\{ \int\limits_{-2k_n}^{2k_n} |u_n'(s)|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int\limits_{-2k_n}^{2k_n} |u_n(s)|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{2}\left\{ \|u_n'\|_{L^2(-2k_n,2k_n)} + \|u_n\|_{L^2(-2k_n,2k_n)} \right\}.$$

Звідси випливає, що послідовність

$$\|\nu_n\|^2 = \|\nu_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|\nu_n'\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

є обмеженою.

Очевидно також, що із співвідношення (10) для u_n випливає співвідношення (9) для ν_n. Таким чином, згідно з лемою 6 $\|\nu_n\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$. Однак

$$\|\nu_n\|^p_{L^p(\mathbb{R})} = \int\limits_{-k_n-1}^{k_n+1} |\chi_n(s)u_n(s)|^p ds \ge \int\limits_{-k_n}^{k_n} |u_n(s)|^p ds = \|u_n\|^p_{(-k_n,k_n)},$$

і лему доведено.

Основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (i) – (iii). *Тоді для будь-якого $c > c_0$ рівняння* (2) *має розв'язок $u \in E$. Тим самим існують дві відокремлені біжучі хвилі з профілем u і швидкостями $\pm c$.*

Доведення. Виберемо довільну послідовність $k_n \to \infty$ і позначимо через $u_n \in E_{k_n}$ $2k$-періодичний розв'язок рівняння (2), побудований в теоремі 1 при $k = k_n$.

Переходячи до підпослідовності, можна вважати, що існують такі $\delta, r > 0$ і послідовність $y_n \in \mathbb{R}$, що

$$\int\limits_{y_n - r}^{y_n + r} |u_n(s)|^2 ds \geq \delta. \tag{11}$$

Дійсно, нехай це не так. Тоді для будь-якого $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \int\limits_{y-r}^{y+r} |u_n(s)|^2 ds = 0.$$

Крім того, згідно з нерівностями (8), послідовність $\|u_n\|_{k_n}$ є обмеженою. Звідси, згідно з лемою 7, випливає, що

$$\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)} \to 0. \tag{12}$$

Далі, $J_k'(u_n) = 0$ і, отже, $\langle J_k'(u_n), u_n\rangle = 0$, тобто

$$\int\limits_{-k_n}^{k_n} \left\{c^2|u_n'(s)|^2 - c_0^2|Au_n(s)| - c_0^2|Bu_n(s)| + a^2|u_n(s)|\right\} ds =$$

$$= \int\limits_{-k_n}^{k_n} \left\{f'(Au_n(s))Au_n(s) + f'(Bu_n(s))Bu_n(s) + g'(u_n(s))u_n(s)\right\} ds.$$

Звідси

$$\alpha_1 \|u_n\|_{k_n}^2 \leq \int\limits_{-k_n}^{k_n} \left\{f'(Au_n(s))Au_n(s) + f'(Bu_n(s))Bu_n(s) + g'(u_n(s))u_n(s)\right\} ds. \tag{13}$$

За теоремою вкладення функції $u_n(s)$ неперервні і рівномірно по n обмежені, тобто існує таке $R > 0$, що $|u_n(s)| \leq R$. Зафіксуємо довільне $p > 2$. Згідно з умовою (iii), для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $C = C_\varepsilon$, що при $|r| \leq R$

$$|h'(r)| \leq \varepsilon|r| + C|r|^{p-1}, \quad h \in \{f, g\}.$$

Тоді з нерівності (13) маємо

$$\alpha_1 \|u_n\|_{k_n}^2 \leq \varepsilon \int\limits_{-k_n}^{k_n} |u_n(s)|^2 ds + C \int\limits_{-k_n}^{k_n} |u_n(s)|^p ds =$$

$$= \varepsilon \|u_n\|_{L^2(-k_n,k_n)}^2 + C\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)}^p \leq \varepsilon\|u_n\|_{k_n}^2 + C\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)}^p.$$

Вибираючи тут $\varepsilon = \dfrac{\alpha_1}{2}$, отримуємо

$$\frac{\alpha_1}{2}\|u_n\|_{k_n}^2 \leq C\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)}^p.$$

Тоді, згідно з (12), $\|u_n\|_{k_n} \to 0$, що суперечить першій нерівності у (8). Таким чином, нерівність (11) доведено.

Рівняння (2) інваріантне відносно зсувів. Тому якщо $u(s)$ — його розв'язок, то $u(s+y)$ — також розв'язок для будь-якого $y \in \mathbb{R}$. Отже, замінюючи $u_n(s)$ на $u_n(s+y)$, можна вважати, що (11) виконується з $y_n = 0$.

Оскільки $\|u_n\|_{k_n}$ обмежена, то, переходячи до підпослідовності, можна вважати, що $u_n \to u$ слабко в $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, тобто слабко в $H^1(a,b)$ для будь-якого скінченного інтервалу (a,b). Згідно з теоремою вкладення, $u_n \to u$ рівномірно на будь-якому скінченному інтервалі. Тому в нерівності (11) (з $y_n = 0$) можна перейти до границі та отримати

$$\int\limits_{-r}^{r} |u(s)|^2 ds \geq \delta.$$

Це означає, що $u \neq 0$.

Покажемо, що u належить E. Виберемо довільно $b > 0$. Тоді при достатньо великих n маємо

$$\int\limits_{-b}^{b} \left\{|u_n'(s)|^2 + |u_n(s)|^2\right\} ds \leq \int\limits_{-k_n}^{k_n} \left\{|u_n'(s)|^2 + |u_n(s)|^2\right\} ds \leq C$$

внаслідок обмеженості $\|u_n\|_{k_n}$. Оскільки $u_n \to u$ слабко в $H^1(-b,b)$, то

$$\int\limits_{-b}^{b} \left\{|u'(s)|^2 + |u(s)|^2\right\} ds \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int\limits_{-b}^{b} \left\{|u_n'(s)|^2 + |u_n(s)|^2\right\} ds \leq C.$$

Далі, оскільки b є довільним, то звідси випливає, що

$$\|u\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{|u'(s)|^2 + |u(s)|^2\right\} ds \leq C < \infty,$$

тобто u належить E.

Залишилося перевірити, що u — розв'язок рівняння (2). Нехай $\phi(s)$ — довільна нескінченно диференційовна функція з компактним носієм $\mathrm{supp}\phi(s) \subset [-b,b]$. При достатньо великому n інтервал $(-k_n+1, k_n-1)$ містить $[-b,b]$ і, отже, коректно визначено функцію $\phi_n \in E_{k_n}$, яка збігається з ϕ на $(-k_n,k_n)$. Оскільки u_n — критична точка функціонала J_k, то

$$0 = \langle J_k'(u_n), \phi_n\rangle =$$

$$= \int\limits_{-k_n}^{k_n} \left\{c^2 u_n'(s)\phi_n'(s) - c_0^2 Au_n(s)A\phi_n(s) - c_0^2 Bu_n(s)B\phi_n(s) + a^2 u_n(s)\phi_n(s)\right\} ds -$$

$$- \int\limits_{-k_n}^{k_n} \left\{f'(Au_n(s))A\phi_n(s) + f'(Bu_n(s))B\phi_n(s) + g'(u_n(s))\phi_n(s)\right\} ds =$$

$$= \int_{-b}^{b} \left\{ c^2 u_n'(s)\phi'(s) - c_0^2 Au_n(s)A\phi(s) - c_0^2 Bu_n(s)B\phi(s) + a^2 u_n(s)\phi(s) \right\} ds -$$

$$- \int_{-b}^{b} \left\{ f'(Au_n(s))A\phi(s) + f'(Bu_n(s))B\phi(s) + g'(u_n(s))\phi(s) \right\} ds.$$

У першому інтегралі правої частини цієї рівності можна перейти до границі при $n \to \infty$, оскільки $u_n \to u$ слабко в $H^1(-b,b)$. Згідно з теоремою вкладення, $u_n \to u$ рівномірно на $[-b,b]$. Тому і в другому інтегралі можна перейти до границі. Отже,

$$0 = \int_{-b}^{b} \left\{ c^2 u'(s)\phi'(s) - c_0^2 Au(s)A\phi(s) - c_0^2 Bu(s)B\phi(s) + a^2 u(s)\phi(s) \right\} ds -$$

$$- \int_{-b}^{b} \left\{ f'(Au(s))A\phi(s) + f'(Bu(s))B\phi(s) + g'(u(s))\phi(s) \right\} ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ c^2 u'(s)\phi'(s) - c_0^2 Au(s)A\phi(s) - c_0^2 Bu(s)B\phi(s) + a^2 u(s)\phi(s) \right\} ds -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ f'(Au(s))A\phi(s) + f'(Bu(s))B\phi(s) + g'(u(s))\phi(s) \right\} ds = \langle J'(u), \phi \rangle.$$

Оскільки ϕ — довільна нескінченно диференційовна функція з компактним носієм і множина таких функцій є щільною в E, то $J'(u) = 0$. Це означає, що u — критична точка функціонала J і, отже, є розв'язком задачі, що розглядається.

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Бак С. М.* Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів // Мат. студ. – 2006. – **26**, № 2. – С. 140 – 153.
2. *Бак С. Н., Панков А. А.* Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках // Укр. мат. вісн. – 2010. – **7**, № 2. – С. 154 – 175.
3. *Бак С. М.* Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці // Мат. та комп'ютер. моделювання. Сер. Фіз.-мат. науки: зб. наук. праць. – 2014. – Вип. 10. – С. 17 – 23.
4. *Бак С. М.* Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці // Мат. та комп'ютер. моделювання. Сер. Фіз.-мат. науки: зб. наук. праць. – 2015. – Вип. 12. – С. 5 – 12.
5. *Бак С. М.* Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці // Мат. студ. – 2011. – **35**, № 1. – С. 60 – 65.
6. *Бак С. М.* Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі – Пасти – Улама на двовимірній ґратці // Мат. студ. – 2012. – **37**, № 1. – С. 76 – 88.
7. *Бак С. М.* Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні sin-Ґордона на двовимірній ґратці // Мат. та комп'ютер. моделювання. Сер. Фіз.-мат. науки: зб. наук. праць. – 2013. – Вип. 9. – С. 5 – 10.

8. *Bak S. M.* Peridoc traveling waves in chains of oscillators // Communs Math. Anal. – 2007. – **3**, № 1. – P. 19 – 26.
9. *Gallavotti G.* The Fermi – Pasta – Ulam problem. A status report // Lect. Notes Phys. – Berlin: Springer, 2008. – 302 p.
10. *Feckan M., Rothos V.* Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions // Nonlinearity. – 2007. – **20**. – P. 319 – 341.
11. *Friesecke G., Matthies K.* Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice // Discrete and Contin. Dynam. Systems. – 2003. – **3**, № 1. – P. 105 – 114.
12. *Ioos G., Kirchgässner K.* Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators // Communs Math. Phys. – 2000. – **211**. – P. 439 – 464.
13. *Lions P. L.* The concentration-compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case, part 2 // Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Lineaire. – 1984. – **1**, № 4. – P. 223 – 283.
14. *Makita P. D.* Periodic and homoclinic travelling waves in infinite lattices // Nonlinear Anal. – 2011. – **74**. – P. 2071 – 2086.
15. *Pankov A.* Traveling waves and periodic oscillations in Fermi – Pasta – Ulam lattices. – London; Singapore: Imperial College Press, 2005. – 196 p.
16. *Willem M.* Minimax theorems. – Boston: Birkhäuser, 1996. – 162 p.

Одержано 12.05.15,
після доопрацювання — 05.03.17