УДК 517.5+517.43

О. П. Бойко, О. М. Мартинюк, В. М. Пивоварчик
(Південноукр. нац. пед. ун-т ім. К. Д. Ушинського, Одеса)

ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ КРАТНІСТЮ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ У СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ТА НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ЗАДАЧАХ НА ГРАФАХ

It is shown that some results concerning the multiplicities of eigenvalues of the spectral problem that describes small transverse vibrations of a star graph of Stieltjes strings and the multiplicities of the eigenvalues of tree-patterned matrices can be used for the description of possible multiplicities of normal eigenvalues (bound states) of the Sturm – Liouville operator on a star graph.

Показано, что некоторые результаты относительно кратностей собственных значений спектральной задачи, которая описывает малые поперечные колебания звездного графа из стильтьесовских струн, и кратностей собственных значений деревоподобных матриц могут быть использованы для описания возможных кратностей нормальных собственных значений (связанных состояний) оператора Штурма – Лиувилля на звездном графе.

1. Вступ. Скінченновимірні спектральні задачі виникають у багатьох областях фізики, таких як коливання струн, синтез електричних ланцюгів і т. п. Огляд на цю тему можна знайти, наприклад, у [3] (див. також [1, 4, 9, 10, 13, 15, 20, 29, 30]). Скінченновимірні прямі та обернені задачі на графах, або, більш конкретно, на деревах, або, зокрема, на зіркових графах було розглянуто в [2, 17, 23 – 25].

Необхідну і достатню умову для двох (скінченних) послідовностей того, щоб вони були спектрами задач Діріхле та Неймана, які породжені рівняннями малих поперечних коливань стільтьєсівської струни (еластичної нитки, що несе на собі точкові маси), було наведено у [7]. Це умова строгого чергування цих послідовностей. Останнє, зокрема, означає, що для будь-якої послідовності різних додатних чисел існує струна Стільтьєса, для якої ця послідовність є послідовністю власних значень спектральної задачі Неймана. Проте у випадку спектральних задач на графах ситуація є набагато складнішою.

Для зіркового графа із стільтьєсівських струн природно розглядати задачу (ми називаємо її задачею Неймана), в якій висячі вершини закріплені, тоді як у центральній вершині накладено умови неперервності і балансу сил. Водночас розглядається задача Діріхле, в якій центральна вершина є фіксованою. У [25] наведено повний опис відповідних прямих і обернених задач для випадку, коли числа точкових мас на ребрах не є заданими. Цікавою особливістю власних значень задачі Неймана є те, що з двох сусідних власних значень одне має бути простим.

У [24] було вивчено задачу, в якій крім числа ребер і довжин усіх ребер задано кількості мас на кожному ребрі. Останнє призводить до обмеження на можливі кратності власних значень при розв'язанні обернених задач. У [24] необхідні (див. нижче теорему 2) і достатні умови було знайдено для (скінченної) послідовності $\{\pm\lambda_k\}$ з урахуванням кратностей, щоб бути спектром задачі Неймана на зірковому графі. Формулювання необхідних і достатніх умов потребує поняття мажоруючого вектора (див., наприклад, [16]).

Результати, викладені у [24], узагальнюють результати для деревоподібних матриць, зокрема теорему 9 [12] (див. також [5, 21]).

Слід зазначити, що спектральна теорія зіркового графа з довільних струн зберігає багато алгебраїчних властивостей теорії для зіркового графа зі стільтьєсівських струн (див. [6, 26]).

У пункті 2 наведено деякі результати з [24] для скінченновимірних спектральних задач. Виявляється, що ці результати можна використовувати при розгляді нескінченновимірних задач, які зустрічаються в теорії квантових графів. У пункті 3 сформульовано ці результати з пункту 2 в такій формі, що вони можуть бути використані у квантовій теорії графів. У пункті 4 переформульовані результати застосовано для встановлення верхніх границь на можливі кратності власних значень спектральних задач, породжених рівнянням Штурма – Ліувілля на зірковому графі з ребрами скінченної довжини і на зірковому графі з ребрами нескінченної довжини.

2. Кратність власних значень у скінченновимірному випадку. В цьому і наступному пунктах ми розглянемо плоский зірковий граф, що складається з g стільтьєсівських струн, $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$, з'єднаних у центральній вершині (цю вершину назвемо коренем), всі висячі вершини якого закріплені. За означенням Гантмахера і Крейна (див. [7]) стільтьєсівська струна є ниткою (тобто пружною струною нульової щільності), що несе на собі скінченне число точкових мас.

Далі будемо позначати ребра зіркового графа $j = 1, 2, \ldots, g$ так, що j-те ребро містить $n_j > 0$ точкових мас $m_k^{(j)}$ між своїми кінцями ($k = 1, 2, \ldots, n_j$) та $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_g$. Вважаємо, що маси в центральній вершині немає. Маси $m_k^{(j)}$ поділяють j-те ребро на $n_j + 1$ інтервал довжин $l_k^{(j)}$, $k = 0, 1, \ldots, n_j$, де ми нумеруємо маси та інтервали між ними у напрямку від висячої вершини до центра. Довжину j-го ребра позначимо як $l_j := \sum_{k=0}^{n_j} l_k^{(j)}$. Загальну кількість мас на зірковому графі позначимо через $n := \sum_{j=1}^{g} n_j$.

Ми припускаємо, що ця сітка розтягнена, і вивчаємо малі поперечні коливання $v_k^{(j)}(t)$ мас $m_k^{(j)}$ у двох різних випадках:

1) центральна вершина може вільно рухатися у напрямку, перпендикулярному до рівноважного стану сітки (задача Неймана),

2) центральна вершина закріплена (задача Діріхле).

Згідно з [7] (розділ III.1) (див. також [25], розділ 2), поділ змінних $v_k^{(j)}(t) = u_k^{(j)} e^{i\lambda t}$ приводить до різницевих рівнянь для амплітуд $u_k^{(j)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, g$, задач Діріхле та Неймана.

Задача Неймана. Якщо центральна вершина може вільно рухатися, то отримуємо

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}} - m_k^{(j)} \lambda^2 u_k^{(j)} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n_j, \quad j = 1, 2, \ldots, g, \tag{1}$$

$$u_{n_1+1}^{(1)} = u_{n_2+1}^{(2)} = \ldots = u_{n_g+1}^{(g)}, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{g} \frac{u_{n_j+1}^{(j)} - u_{n_j}^{(j)}}{l_{n_j}^{(j)}} = 0, \tag{3}$$

$$u_0^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, g. \tag{4}$$

Задача Діріхле. Якщо всі струни закріплені в центральній вершині, задача розпадається на q окремих задач на ребрах з умовами Діріхле на обох кінцях:

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}} - m_k^{(j)}\lambda^2 u_k^{(j)} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n_j, \tag{5}$$

$$u_{n_j+1}^{(j)} = 0, \tag{6}$$

$$u_0^{(j)} = 0 \tag{7}$$

для всіх $j = 1, 2, \ldots, g$.

Далі будемо використовувати наступні позначення для власних значень спектральних задач Неймана та Діріхле і їх кратностей.

Позначимо через $\{\lambda_{\pm k}\}_{k=1}^{n}$ $(\lambda_{-k} = -\lambda_k,\ \lambda_k \geq \lambda_{k'} > 0$ для $k > k' > 0)$ власні значення задачі Неймана (1)–(4) на зірковому графі, через $\{\zeta_{\pm k}\}_{k=1}^{n} = \bigcup\limits_{j=1}^{g} \{\nu_{\pm\kappa}^{(j)}\}_{\kappa=1}^{n_j}$ $(\zeta_{-k} = -\zeta_k,\ \zeta_k \geq \geq \zeta_{k'} > 0$ для $k > k' > 0)$ власні значення задачі Діріхле на зірковому графі, де $\{\nu_{\pm\kappa}^{(j)}\}_{\kappa=1}^{n_j}$, $\nu_{-\kappa}^{(j)} = -\nu_\kappa^{(j)}$, $\nu_\kappa^{(j)} > \nu_{\kappa'}^{(j)} > 0$ для $\kappa > \kappa' > 0$, — власні значення задачі Діріхле (5)–(7) на j-му ребрі для $j = 1, 2, \ldots, q$, $\{\tilde{\lambda}_{\pm k}\}_{k=1}^{r_N}$, $\tilde{\lambda}_{-k} = -\tilde{\lambda}_k$, $\tilde{\lambda}_k > \tilde{\lambda}_{k'} > 0$ для $k > k' > 0$, — множина різних власних значень Неймана, $\{\tilde{\zeta}_{\pm k}\}_{k=1}^{r_D}$, $\tilde{\zeta}_{-k} = -\tilde{\zeta}_k$, $\tilde{\zeta}_k > \tilde{\zeta}_{k'} > 0$ для $k > k' > 0$, — множина різних власних значень Діріхле, $(p_k(N))_{k=1}^{r_N}$ і $(p_k(D))_{k=1}^{r_D}$ — вектори кратності різних додатних власних значень $\tilde{\lambda}_k$ і $\tilde{\zeta}_k$ для $k > 0$ задач Неймана і Діріхле.

***Зауваження* 1.** Число r_D різних додатних власних значень задачі Діріхле задовольняє умову $r_D \geq n_1$, оскільки n_1 — максимальне число мас на одній струні, позначеній як перша, та $\nu_1^{(1)} < \nu_2^{(1)} < \ldots < \nu_{n_1}^{(1)}$.

Зазначимо, що оскільки рівняння в задачах Неймана і Діріхле залежать лише від λ^2, власні значення задач Неймана і Діріхле лежать симетрично відносно початку координат та кратності $\tilde{\lambda}_{-k} = -\tilde{\lambda}_k$ та $\tilde{\lambda}_k$, а також $\tilde{\zeta}_{-k} = -\tilde{\zeta}_k$ та $\tilde{\zeta}_k$ збігаються. Більш того, згідно з теоремою 2.5 [25], 0 не є власним значенням ані задачі Діріхле, ані задачі Неймана.

Теорема 1 (теорема 2.5 [25]). *Власні значення* $\{\lambda_k\}_{k=-n,\,k\neq 0}^{n}$, $\lambda_{-k} = -\lambda_k$, *задачі Неймана і власні значення* $\{\zeta_k\}_{k=-n,\,k\neq 0}^{n}$, $\zeta_{-k} = -\zeta_k$, *задачі Діріхле мають такі властивості*:

1) $0 < \lambda_1 < \zeta_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \zeta_n$;

2) $\zeta_{k-1} = \lambda_k$ *тоді і тільки тоді, коли* $\lambda_k = \zeta_k$, $k = 2, 3, \ldots, n$;

3) *кратність* λ_k *не перевищує* $g - 1$.

Щоб описати необхідні умови на кратності власних значень задач Неймана і Діріхле, нам потрібне поняття мажоризації, яке було запропоноване у [19] для випадку цілих чисел і узагальнене на невід'ємні числа в [11] (2.18).

Означення 1. *Нехай* $x = (x_i)_{i=1}^{s}$ *та* $y = (y_i)_{i=1}^{t}$ — *два вектори з невід'ємними елементами, упорядкованими за спаданням,* $x_s \geq x_{s-1} \geq \ldots \geq x_1 \geq 0$, $y_t \geq y_{t-1} \geq \ldots \geq y_1 \geq 0$. *Якщо* $s = t$, *то* x *називається мажорантою* y, *коли*

$$x \succ y \quad :\Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{t} x_i = \sum_{i=1}^{t} y_i, \qquad \sum_{i=1}^{\tau} x_i \geq \sum_{i=1}^{\tau} y_i, \quad \tau = 1, 2, \ldots, t-1.$$

Якщо $s \neq t$, *ми доповнюємо короткий вектор нулями і покладаємо* $\tilde{x} = (x_i)_{i=1}^{\max\{s,t\}}$ *та* $\tilde{y} = (y_i)_{i=1}^{\max\{s,t\}}$ *з* $x_i = 0$ *для* $i = s+1, \ldots, \max\{s,t\}$, $y_i = 0$ *для* $i = t+1, \ldots, \max\{s,t\}$. *Тоді* x *називається мажорантою* y, $x \succ y$, *якщо* $\tilde{x}$ *мажорує* $\tilde{y}$, $\tilde{x} \succ \tilde{y}$.

У теоремах 4 та 5 (див. нижче) нам потрібне трохи змінене поняття мажоризації.

Означення 2. *Нехай* $x = (x_i)_{i=1}^s$ *і* $y = (y_i)_{i=1}^t$ — *два вектори з невід'ємними елементами, упорядкованими за спаданням,* $x_s \geq x_{s-1} \geq \ldots \geq x_1 \geq 0$, $y_t \geq y_{t-1} \geq \ldots \geq y_1 \geq 0$. *Якщо* $s = t$, *то* x *назвемо тильда-мажорантою* y, *коли*

$$x \tilde{\succ} y \quad :\Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{\tau} x_i \geq \sum_{i=1}^{\tau} y_i, \quad \tau = 1, 2, \ldots, t.$$

Якщо $s \neq t$, *ми доповнюємо короткий вектор нулями і множини* $\tilde{x} = (x_i)_{i=1}^{\max\{s,t\}}$ *і* $\tilde{y} = (y_i)_{i=1}^{\max\{s,t\}}$ *з* $x_i = 0$ *для* $i = s+1, \ldots, \max\{s,t\}$, $y_i = 0$ *для* $i = t+1, \ldots, \max\{s,t\}$. *Тоді* x *називають тильда-мажорантою* y, $x \tilde{\succ} y$, *якщо* $\tilde{x}$ *мажорує* $\tilde{y}$, $\tilde{x} \tilde{\succ} \tilde{y}$.

Зауваження 2 (див. зауваження 2.4 [24]). Якщо вектор $x = (x_i)_{i=1}^s$ мажорує $(y_i)_{i=1}^t$, то кількість ненульових елементів x менша або дорівнює числу ненульових елементів y,

$$x \succ y \;\Rightarrow\; \#\big\{i \in \{1, \ldots, s\} : x_i > 0\big\} \leq \#\big\{i \in \{1, \ldots, t\} : y_i > 0\big\}.$$

Для вектора $x = (x_i)_{i=1}^s \in R^s$ позначимо через $x^{\downarrow} = (x_i^{\downarrow})_{i=1}^s \in R^s$ вектор з тими ж самими елементами, але впорядкованими за спаданням, тобто існує перестановка π в $\{1, 2, \ldots, s\}$ така, що

$$x_i^{\downarrow} = x_{\pi(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \qquad x_1^{\downarrow} \geq x_2^{\downarrow} \geq \ldots \geq x_s^{\downarrow}.$$

Сформулюємо елементарну лему про інверсію незростаючої функції $\{1, 2, \ldots, q\} \to N$, $j \mapsto n_j$, яку будемо використовувати у цій статті.

Лема 1 (лема 2.6 [24]). *Нехай* $q \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$, $(n_j)_{j=1}^g \subset \mathbb{N}$ *з* $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_q$ *і множина* $n := \sum_{j=1}^g n_j$, $n_{g+1} := 0$. *Для* $i = 1, 2, \ldots, n_1$ *позначимо*

$$N_i := \#\big\{j \in \{1, 2, \ldots, g\} : n_j \geq i\big\} = \max\big\{j \in \{1, 2, \ldots, g\} : n_j \geq i\big\}.$$

Тоді $N_1 \geq N_2 \geq \ldots \geq N_{n_1}$ *і*

i) $\sum_{i=1}^{n_1} N_i = n$;

ii) $N_i > 1, \; i = 1, 2, \ldots, n_2, \; N_i = 1, \; i = n_2 + 1, n_2{+}2, \ldots, n_1$;

iii) $\#\{i \in \{1, 2, \ldots, n_1\} : N_i = j\} = n_j - n_{j+1}, \; j = 1, 2, \ldots, q$;

iv) $n_j = \#\big\{i \in \{1, 2, \ldots, n_1\} : N_i \geq j\big\} = \max\big\{i \in \{1, 2, \ldots, n_1\} : N_i \geq j\big\}, \; j = 1, 2, \ldots, g$.

Ми також будемо використовувати наступну теорему.

Теорема 2 (теорема 2.7 [24]). *Нехай* Λ_N — *множина всіх власних значень* $\lambda_{\pm k}$ *задачі Неймана,* $\lambda_k > 0$, $\lambda_{-k} = -\lambda_k$, $k > 0$, *серед яких можуть бути такі, що збігаються між собою. Позначимо через* r *число різних додатних власних значень* $\tilde{\lambda}_k$ *задачі Неймана, через* $(p_i)_{i=1}^{r_N}$ *вектор їх кратностей, а через* $p^{\downarrow} = (p_i^{\downarrow})_{i=1}^{r_N}$ *відповідний впорядкований за спаданням вектор кратностей. Тоді*:

1) $0 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 \leq \lambda_3^2 \leq \ldots \leq \lambda_{n-2}^2 \leq \lambda_{n-1}^2 \leq \lambda_n^2$;

2) *якщо* $p_i > 1$, *то* $p_{i-1} = p_{i+1} = 1$, $i = 2, \ldots, r-1$, *а якщо* $p_r > 1$, *то* $p_{r-1} = 1$;

3) $\sum_{i=1}^r p_i = n$;

4) $r_N \geq n_1 + n_2$;

5) $\{N_1 - 1, N_2 - 1, \ldots, N_{n_1} - 1\} \succ \big\{p_1^{\downarrow}(N), p_2^{\downarrow}(N), \ldots, p_{r_N - n_1}^{\downarrow}(N)\big\}$.

3. Кратність і розташування власних значень нижче фіксованого значення параметра λ^2. Результати попереднього пункту можна інтерпретувати таким чином.

По-перше, зауважимо, що за теоремою 1 λ_m є власним значенням задачі Неймана кратності $p_m \geq 2$ тоді і тільки тоді, коли λ_m є власним значенням задачі Діріхле кратності $p_m + 1$. Це означає, що існує рівно $p_m + 1$ серед q ребер, для яких λ_m є власним значенням задачі Діріхле–Діріхле на ній:

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}} - m_k^{(j)} \lambda^2 u_k^{(j)} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n_j,$$

$$u_{n_j+1}^{(j)} = 0,$$

$$u_0^{(j)} = 0.$$

Припустимо, що ми знайшли всі власні значення $\{\nu_k^{(j)}\}_{k=-n_j, k\neq 0}^{n_j}$ задачі Діріхле–Діріхле на кожному ребрі ($j = 1, 2, \ldots, q$). Виберемо додатне число E і позначимо через $n_j(E)$ число, для якого $\nu_{n_j(E)}^{(j)} \leq \sqrt{E} < \nu_{n_j(E)+1}^{(j)}$. Тоді $n_j(\infty) = n_j$, і ми позначаємо

$$n(E) := \sum_{j=1}^{q} n_j(E). \tag{8}$$

Як видно з доведення теореми 2.7 [24], цю теорему можна переформулювати в термінах $n_j(E)$. З цією метою введемо

$$N_i(E) := \#\big\{j \in \{1, 2, \ldots, g\} : n_j(E) \geq i\big\} = \max\big\{j \in \{1, 2, \ldots, g\} : n_j(E) \geq i\big\}. \tag{9}$$

Тоді $N_1(E) \geq N_2(E) \geq \ldots \geq N_{n_1}(E)$.

Таким чином, справедливою є наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай Λ_N — множина всіх власних значень $\lambda_{\pm k}$ задачі Неймана, $\lambda_k > 0$, $\lambda_{-k} = -\lambda_k$, $k > 0$. Позначимо через $r(E)$ число різних додатних власних значень $\tilde{\lambda}_k$ задачі Неймана таких, що $\tilde{\lambda}_k \leq \sqrt{E}$, через $(p_i)_{i=1}^{r(E)}$ вектор їх кратностей і через $p^{\downarrow}(E) = (p_i^{\downarrow})_{i=1}^{r(E)}$ відповідний вектор їх кратностей у порядку спадання. Тоді*:

1) $0 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 \leq \lambda_3^2 \leq \ldots \leq \lambda_{n(E)-2}^2 \leq \lambda_{n(E)-1}^2 \leq \lambda_{n(E)}^2 \leq E$

або

1′) $0 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 \leq \lambda_3^2 \leq \ldots \leq \lambda_{n(E)-1}^2 \leq \lambda_{n(E)}^2 \leq \lambda_{n(E)+1}^2 \leq E$;

2) *якщо* $p_i > 1$, *то* $p_{i-1} = p_{i+1} = 1$, $i = 2, \ldots, r_N(E) - 1$, *а якщо* $p_{r_N(E)} > 1$, *то* $p_{r_N(E)-1} = 1$;

3) $\sum_{i=1}^{r_N(E)} p_i = n(E)$ *або* $\sum_{i=1}^{r_N(E)} p_i = n(E) + 1$;

4) $\{N_1(E) - 1, N_2(E) - 1, \ldots, N_{n_1(E)}(E) - 1\} \succ \big\{p_1^{\downarrow}, p_2^{\downarrow}, \ldots, p_{r_N(E)-n_1(E)}^{\downarrow}\big\}$

або

4′) $\{N_1(E) - 1, N_2(E) - 1, \ldots, N_{n_1(E)}(E) - 1\} \succ \big\{p_1^{\downarrow}, p_2^{\downarrow}, \ldots, p_{r_N(E)-n_1(E)-1}^{\downarrow}\big\}$.

Доведення. Твердження 1 і 1′ випливають із твердження 1 теореми 2 та означення (8). Твердження 2 та 3 випливають із тверджень 2 та 3 теореми 2. Твердження 4 і 4′ випливають із твердження 5 теореми 2.

Таким чином, у цій формі теорема 3 є суто алгебраїчною, не залежить від початкового фізичного сенсу і, отже, може бути використана при розгляді нескінченновимірних задач.

4. Застосування до задач Штурма – Ліувілля на зірковому графі. ***4.1. Задача Штурма – Ліувілля на зірковому графі зі скінченними ребрами.*** Наступна задача виникає у квантовій механиці, а також в теорії малих поперечних коливань зіркового графа з гладких струн (див. [18, с. 238]):

$$\begin{gathered} y_j'' + zy_j - q_j(x)y_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, g, \quad x \in [0, a_j], \\ y_j(\sqrt{z}, 0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, g, \\ y_1(\sqrt{z}, a_1) = y_2(\sqrt{z}, a_2) = \ldots = y_g(\sqrt{z}, a_g), \\ \sum_{j=1}^{g} y_j'(\sqrt{z}, a_j) = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Ми припускаємо, що $q_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, є дійсними функціями з $L_2(0, a_j)$ і $q_j(x) \overset{\text{м.с.}}{\geq} Q_j$, де $Q_j \in \mathbb{R}$. Цю задачу ми називаємо задачею Неймана.

Паралельно з цим ми розглянемо відповідну задачу Діріхле

$$\begin{gathered} y_j'' + zy_j - q_j(x)y_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, g, \quad x \in [0, a_j], \\ y_j(\sqrt{z}, 0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, g, \\ y_1(\sqrt{z}, a_1) = y_2(\sqrt{z}, a_2) = \ldots = y_g(\sqrt{z}, a_g) = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Позначимо через $\tilde{n}_j(E)$ число власних значень $(\nu_k^{(j)})^2$ задачі Діріхле – Діріхле

$$\begin{gathered} y_j'' + zy_j - q_j(x)y_j = 0, \quad x \in [0, a_j], \\ y_j(\sqrt{z}, 0) = y_j(\sqrt{z}, a_j) = 0 \end{gathered}$$

на j-му ребрі таких, що $\nu_k^2 \leq E$, де E — деяке дійсне число. Зрозуміло, що

$$\tilde{n}_j(E) \leq n_j(E) := \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{a_j}{\pi} \sqrt{E - Q_j} \right\rfloor, & \text{якщо} \quad E > Q_j, \\ 0, & \text{якщо} \quad E \leq Q_j, \end{cases} \tag{12}$$

де $\lfloor b \rfloor$ означає цілу частину невід'ємного числа b.

Нехай $\{p_1, p_2, \ldots, p_{\tilde{r}(E)}\}$ — вектор кратностей, а $\{p_1^{\downarrow}, p_2^{\downarrow}, \ldots, p_{\tilde{r}(E)}^{\downarrow}\}$ — упорядкований вектор кратностей різних додатних власних значень $\tilde{\lambda}_k$ задачі (10) таких, що $\tilde{\lambda}_k^2 \leq E$.

Теорема 4. *Нехай $N_j(E)$ — задані рівнянням* (9) *числа, де $n_j(E)$ задані у* (12). *Тоді власні значення задачі* (10) *такі, що $\lambda_k^2 \leq E$, задовольняють умови*:

1) $\lambda_1^2 < \lambda_2^2 \leq \lambda_3^2 \leq \ldots \leq \lambda_{\tilde{n}(E,N)-2}^2 \leq \lambda_{\tilde{n}(E,N)-1}^2 \leq \lambda_{\tilde{n}(E,N)}^2 \leq E < \lambda_{\tilde{n}(E,N)+1}^2$, *де визначене вказаним способом число $\tilde{n}(E, N)$ таке, що*

$$\tilde{n}(E, N) \leq n(E) + 1 := \sum_{j=1}^{q} n_j(E) + 1; \tag{13}$$

2) *якщо $p_i > 1$, то $p_{i-1} = p_{i+1} = 1$, $i = 2, \ldots, r(E) - 1$, а якщо $p_{r(E)} > 1$, то $p_{r(E)-1} = 1$;*

3) $\big\{N_1(E)-1, N_2(E)-1, \ldots, N_{n_1(E)}(E)-1\big\} \tilde{\succ} \big\{p_1^{\downarrow}, p_2^{\downarrow}, \ldots, p^{\downarrow}_{\tilde{r}(E)-n_1(E)-1}\big\}$.

Доведення твердження 2 відоме з [22] (теорема 3.17).

Також відомо (див. [22], наслідок 3.16 та теорему 3.17), що

$$\lambda_1^2 < \zeta_1^2 \le \lambda_2^2 \le \zeta_2^2 \le \ldots \le \lambda_{k-1}^2 \le \zeta_{k-1}^2 \le \lambda_k^2 \le \ldots, \tag{14}$$

де $\{\zeta_k^2\}_{k=1}^{\infty} = \bigcup\limits_{j=1}^{q} \{(\nu_k^{(j)})^2\}_{k=1}^{\infty}$. Кількість ζ_k^2 з урахуванням кратностей таких, що $\zeta_k^2 \le E$, є $\tilde{n}(E,D) := \sum_{j=1}^{q} \tilde{n}_j(E)$. Тоді з (14) випливає, що або $\tilde{n}(E,N) = \tilde{n}(E,D)$, або $\tilde{n}(E,N) = \tilde{n}(E,D)+1$. Таким чином, з огляду на (12)

$$\tilde{n}(E,N) \le \tilde{n}(E,D)+1 = \sum_{j=1}^{q} \tilde{n}_j(E)+1 \le \sum_{j=1}^{q} n_j(E)+1.$$

Твердження 1 доведено.

Доведемо третє твердження теореми. Позначимо через $\{p_1^{\downarrow}(D), p_2^{\downarrow}(D), \ldots, p^{\downarrow}_{\tilde{r}_D(E)-n_1(E)}(D)\}$ упорядкований вектор кратностей задачі Діріхле (11). Оскільки спектр цієї задачі $\{\zeta_k^2\}_{k=1}^{\infty} = \bigcup\limits_{j=1}^{q} \{(\nu_k^{(j)})^2\}_{k=1}^{\infty}$ складається зі спектрів $\{(\nu_k^{(j)})^2\}_{k=1}^{\infty}$ задач Діріхле–Діріхле на ребрах, ми можемо оцінити $\{p_1^{\downarrow}(D), p_2^{\downarrow}(D), \ldots, p^{\downarrow}_{\tilde{r}_D(E)-n_1(E)}(D)\}$ таким чином:

$$\big\{N_1(E), N_2(E), \ldots, N_{n_1(E)}(E)\big\} \tilde{\succ} \big\{p_1^{\downarrow}(D), p_2^{\downarrow}(D), \ldots, p^{\downarrow}_{\tilde{r}_D(E)-n_1(E)}(D)\big\}, \tag{15}$$

де $\tilde{r}_D(E)$ — число різних власних значень задачі Діріхле (11), які менші або дорівнюють E.

Нехай λ_m є таким власним значенням задачі (10) кратності $p_m > 1$, що $\lambda_m^2 \le E$. Тоді згідно з другим твердженням теореми воно є елементом $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ кратності p_m+1. Це означає, що з (15) випливає

$$\big\{N_1(E)-1, N_2(E)-1, \ldots, N_{n_1(E)}(E)-1\big\} \tilde{\succ} \big\{p_1^{\downarrow}, p_2^{\downarrow}, \ldots, p^{\downarrow}_{\tilde{r}(E)-n_1(E)-1}\big\}.$$

Теорему 4 доведено.

4.2. Задача Штурма–Ліувілля на зірковому графі з нескінченними ребрами. Розглянемо зірковий граф з g нескінченними ребрами. Нехай рівняння Штурма–Ліувілля буде визначене на ребрах цього графа. У центральній вершині ми накладемо умови неперервності та Кірхгофа. Таким чином, маємо

$$y_j'' + zy_j - q_j(x)y_j = 0, \qquad j = 1,2,\ldots,g, \quad x \in [0,\infty], \tag{16}$$

$$y_1(\sqrt{z},0) = y_2(\sqrt{z},0) = \ldots = y_g(\sqrt{z},0), \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{g} y_j'(\sqrt{z},0) = 0, \tag{18}$$

де q_j, $j = 1,2,\ldots,g$, — дійсні неперервні на $(0,\infty)$ функції, що задовольняють нерівності $\displaystyle\int_0^{\infty} x|q_j(x)|dx < \infty$, $j = 1,2,\ldots,g$. Така задача має істотний (неперервний) спектр, який заповнює піввісь $[0,\infty)$ і може мати скінченну кількість нормальних (ізольованих фредгольмових) власних значень різної геометричної кратності на $(-\infty,0)$ (див. [8]). З фізичної точки зору ці власні значення є зв'язаними станами у квантово-механічних задачах. Ми називаємо систему (16)–(18) задачею Неймана.

Розглянемо також допоміжну задачу, яку можна назвати задачею Діріхле:

$$y_j'' + zy_j - q_j(x)y_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, g, \quad x \in [0, \infty), \tag{19}$$

$$y_1(\sqrt{z}, 0) = y_2(\sqrt{z}, 0) = \ldots = y_g(\sqrt{z}, 0) = 0. \tag{20}$$

Задача (19), (20) складається з задач Діріхле на ребрах:

$$y_j'' + zy_j - q_j(x)y_j = 0, \quad x \in [0, \infty), \tag{21}$$

$$y_j(\sqrt{z}, 0) = 0. \tag{22}$$

Позначимо через $e_j(\sqrt{z}, x)$ розв'язок Йоста рівняння (21), що визначається умовою

$$e_j(\sqrt{z}, x)e^{-i\sqrt{z},x} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + o(1).$$

Відповідна функція Йоста $e_j(\sqrt{z}, 0)$ аналітична у $\mathbb{C}\backslash[0, \infty)$ (див., наприклад, [28], теорема XI.58). Функція $e_j'(\sqrt{z}, 0)$ також аналітична у $\mathbb{C}\backslash[0, \infty)$. Нормальні власні значення задачі (21), (22) (їх кількість скінченна) збігаються з нулями характеристичної функції $e_j(\sqrt{z}, 0)$, які лежать на $(-\infty, 0)$, нормальні власні значення задачі (16)–(18) — з нулями характеристичної функції

$$\phi := \sum_{j=1}^{g} e_j'(\sqrt{z}, 0) \prod_{m\neq j}^{g} e_m(\sqrt{z}, 0), \tag{23}$$

що лежать на $(-\infty, 0)$, а нормальні власні значення задачі (19), (20) — з нулями характеристичної функції

$$\psi := \prod_{j=1}^{g} e_j(\sqrt{z}, 0),$$

що лежать на $(-\infty, 0)$.

Відомо, що функції $\dfrac{e_j(\sqrt{z}, 0)}{e_j'(\sqrt{z}, 0)}$ є R-функціями в термінах [14]. Це означає, що

$$\operatorname{Im} z \operatorname{Im} \frac{e_j(\sqrt{z}, 0)}{e_j'(\sqrt{z}, 0)} \geq 0$$

при $\operatorname{Im} z \neq 0$. Крім того, $\dfrac{e_j(\sqrt{z}, 0)}{e_j'(\sqrt{z}, 0)} > 0$ при $\lambda \to -\infty$. Тому

$$\frac{\psi(z)}{\phi(z)} = \left(\sum_{j=1}^{g} \frac{e_j'(\sqrt{z}, 0)}{e_j(\sqrt{z}, 0)} \right)^{-1}$$

також стає R-функцією після скорочення спільних множників (якщо такі є) у чисельнику і знаменнику. Нулі R-функції на $(-\infty, 0)$ чергуються з її полюсами (див. [14]), отже,

$$\lambda_1^2 \leq \zeta_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \ldots \leq \zeta_n^2 < 0 \tag{24}$$

або

$$\lambda_1^2 \le \zeta_1^2 \le \lambda_2^2 \le \ldots \le \zeta_n^2 \le \lambda_{n+1}^2 < 0, \tag{25}$$

де $\{\zeta_k^2\}_{k=1}^n = \bigcup\limits_{j=1}^{g}\{(\nu_k^{(j)})^2\}_{k=1}^{n_j}$ — об'єднання множин нулів функцій Йоста $e_j(\sqrt{z},0),\ j = 1,2,\ldots,g$, що лежать на $(-\infty,0)$, а $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^n$ або $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^{n+1}$ — множина нулів функції ϕ, що лежать на $(-\infty,0)$.

Відомо, що для задачі Діріхле (21), (22) число негативних власних значень можна оцінити за нерівністю Баргмана (див., наприклад, [27], теорема XIII.9)

$$n_j(D) < n_j := \int\limits_0^\infty |q_j^-(x)|x dx, \tag{26}$$

де $q_j^-(x) = \begin{cases} q_j(x), & \text{якщо} \quad q_j(x) < 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad q_j(x) \ge 0. \end{cases}$

Нехай $\{p_1,p_2,\ldots,p_r\}$ — вектор кратностей, а $\{p_1^\downarrow,p_2^\downarrow,\ldots,p_r^\downarrow\}$ — упорядкований вектор кратностей різних власних значень задачі (16)–(18).

Теорема 5. *Нехай*

$$N_i := \#\big\{j \in \{1,2,\ldots,g\} : n_j(D) \ge i\big\} = \max\big\{j \in \{1,2,\ldots,g\} : n_j(D) \ge i\big\}.$$

Власні значення λ_j^2 *задачі* (16)–(18) *задовольняють такі умови*:

1) $\lambda_1^2 < \lambda_2^2 \le \lambda_3^2 \le \ldots \le \lambda_{n-2}^2 \le \lambda_{n-1}^2 \le \lambda_n^2 < 0$ *або* $\lambda_1^2 < \lambda_2^2 \le \lambda_3^2 \le \ldots \le \lambda_{n-2}^2 \le \lambda_n^2 \le \lambda_{n+1}^2 < 0$, *де* $n = \sum_{j=1}^g n_j(D)$;

2) *якщо* $p_i > 1$, *то* $p_{i-1} = p_{i+1} = 1$, $i = 2,\ldots,r-1$, *а якщо* $p_r > 1$, *то* $p_{r-1} = 1$, *де* r — *кількість різних власних значень задачі* (16)–(18);

3) $\big\{N_1 - 1, N_2 - 1, \ldots, N_{n_1} - 1\big\} \tilde{\succ} \big\{p_1^\downarrow,p_2^\downarrow,\ldots,p_{r-n_1-1}^\downarrow\big\}$.

Доведення. Нерівності $\lambda_1^2 \le \lambda_2^2 \le \lambda_3^2 \le \ldots \le \lambda_{n-2}^2 \le \lambda_{n-1}^2 \le \lambda_n^2 < 0$ або $\lambda_1^2 \le \lambda_2^2 \le \lambda_3^2 \le \ldots \le \lambda_{n-2}^2 \le \lambda_n^2 \le \lambda_{n+1}^2 < 0$ випливають з (24), (25).

Якщо $\phi(z) = \psi(z) = 0$, то існує таке m, що $e_m(\sqrt{z},0) = 0$, і з (23) випливає

$$e_m'(\sqrt{z},0)\prod_{j\ne m}^{q} e_j(\sqrt{z},0) = 0.$$

Це означає, що $e_{m'}(\sqrt{z},0) = 0$ для деякого $m' \ne m$. Звідси випливає твердження 2 і нерівність $\lambda_1^2 < \lambda_2^2$. Доведення твердження 3 аналогічне доведенню твердження 3 теореми 4.

Наслідок. 1) $n = \sum_{j=1}^g n_j(D) < \tilde{n} := \sum_{j=1}^g n_j$,

2) $\big\{\tilde{N}_1 - 1, \tilde{N}_2 - 1, \ldots, \tilde{N}_{\tilde{n}_1} - 1\big\} \tilde{\succ} \big\{p_1^\downarrow,p_2^\downarrow,\ldots,p_{r-\tilde{n}_1-1}^\downarrow\big\}$, *де*

$$\tilde{N}_i := \#\big\{j \in \{1,2,\ldots,g\} : n_j \ge i\big\} = \max\big\{j \in \{1,2,\ldots,g\} : n_j \ge i\big\}.$$

Цей наслідок випливає з твердження 3 теореми 5 і нерівності (26).

Приклад. Нехай $q_j(x) = -\gamma_j e^{-\alpha_j x}$ з $\alpha_j > 0,\ \gamma_j > 0$ для $j = 1, 2, \ldots, g$. Тоді

$$\int\limits_0^\infty x|q_j^-(x)|dx = \gamma_j \alpha_j^{-2}.$$

Позначимо

$$n_j := \lfloor \gamma_j \alpha_j^{-2} \rfloor. \tag{27}$$

Тоді наслідок справедливий з n_j, заданими формулою (27), і число власних значень (з урахуванням кратностей) не перевищує $\tilde{n} + 1 = \sum_{j=1}^{g} n_j + 1 = \sum_{j=1}^{g} \lfloor \gamma_j \alpha_j^{-2} \rfloor + 1$.

Література

1. *Boyko O., Pivovarchik V.* The inverse three-spectral problem for a Stieltjes string and the inverse problem with one-dimensional damping // Inverse Problems. – 2008. – **24**, № 1. – 13 p.
2. *Boyko O., Pivovarchik V.* Inverse spectral problem for a star graph of Stieltjes strings // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 2. – P. 159 – 167.
3. *Cox S. J., Embree M., Hokanson J. M.* One can hear the composition of a string: experiments with an inverse eigenvalue problem // SIAM Rev. – 2012. – **54**, № 1. – P. 157 – 178.
4. *Cox S. J., Henrot A.* Elasticity harmonics of strings // ESAIM Contr. Optim. Calc. Var. – 2008. – **14**, № 4. – P. 657 – 677.
5. *Leal Duarte A.* Construction of acyclic matrices from spectral data // Linear Algebra and Appl. – 1989. – **113**. – P. 173 – 182.
6. *Eckhardt J.* An inverse problem for a star graph of Krein strings // J. reine und angew. Math. – 2016. – **715**. – S. 189 – 206.
7. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950.
8. *Герасименко Н. И.* Обратная задача рассеяния на некомпактном графе // Теор. и мат. физика. – 1988. – **75**, № 2. – С. 187 – 200.
9. *Gladwell G.* Inverse problems in vibration. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2004.
10. *Gladwell G.* Matrix inverse eigenvalue problems // Dynamical Inverse Problems: Theory and Applications / Eds G. Gladwell, A. Morassi: CISM Courses and Lect. – 2011. – **529**. – P. 1 – 29.
11. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G.* Inequalities. – Second ed. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952. – xii + 324 p.
12. *Johnson C. R., Leal Duarte A.* On the possible multiplicities of the eigenvalues of a Hermitian matrix whose graph is a tree // Linear Algebra and Appl. – 2002. – **348**. – P. 7 – 21.
13. *Law C.-K., Pivovarchik V., Wang W.* A polynomial identity and its applications to inverse spectral problems in Stieltjes strings // Operators and Matrices. – 2013. – **7**, № 3. – P. 603 – 617.
14. *Kac I. S., Krein M. G.* R-functions. Analytic functions mapping the upper half plane into itself // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. – 1974. – **103**. – P. 1 – 18.
15. *Марченко В. А.* Введение в теорию обратных задач спектрального анализа. – Харьков: Акта, 2005.
16. *Marshall A., Olkin I., Arnold B.* Inequalities: theory of majorization and its applications. – Second ed. – New York: Springer, 2011. – xxviii + 909 p.
17. *Möller M., Pivovarchik V.* Damped star graphs of Stieltjes strings // Proc. Amer> Math. Soc. – 2017. – **145**, № 4. – P. 1717 – 1728.
18. *Möller M., Pivovarchik V.* Spectral theory of operator pencils, Hermite – Biehler functions, and their applications. – Cham: Birkhäuser, 2015.
19. *Muirhead R. F.* Some methods applicable to identities and inqualities of symmetric algebraic functions of n letters // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1903. – **21**. – P. 144 – 157.
20. *Martynyuk O., Pivovarchik V., Tretter C.* Inverse problem for a damped Stieltjes string from parts of spectra // Appl. Anal. – 2015. – **94**, № 12. – P. 2605 – 2619.

21. *Nylen P., Uhlig F.* Realization of interlacing by tree patterned matrices // Linear and Multilinear Algebra. – 1994. – **38**. – P. 13 – 37.
22. *Pivovarchik V.* Inverse problem for the Sturm – Liouville equation on a star-shaped graph // Math. Nachr. – 2007. – **280**, № 13-14. – P. 1595 – 1619.
23. *Pivovarchik V.* Existence of a tree of Stieltjes strings corresponding to two given spectra // J. Phys. A: Math. Theor. – 2009. – **42**. – Article 375213. – 16 p.
24. *Pivovarchik V., Tretter C.* Location and multiples of eigenvalues for a star graph of Stieltjes strings // J. Difference Equat. and Appl. – 2015. – **21**, № 5. – P. 383 – 402.
25. *Pivovarchik V., Rozhenko N., Tretter C.* Dirichlet – Neumann inverse spectral problem for a star graph of Stieltjes strings // Linear Algebra and Appl. – 2013. – **439**, № 8. – P. 2263 – 2292.
26. *Pivovarchik V., Woracek H.* Sums of Nevanlinna functions and differential equations on star-shaped graphs // Operators and Matrices. – 2009. – **3**, № 4. – P. 451 – 501.
27. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators. – New York etc.: Acad. Press, 1978.
28. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. III: Scattering theory. – New York etc.: Acad. Press, 1979.
29. *Veselic K.* On linear vibrational systems with one-dimensional damping // Appl. Anal. – 1988. – **29**. – P. 1 – 18.
30. *Veselic K.* On linear vibrational systems with one-dimensional damping. II // Integral Equat. Operator Theory. – 1990. – **13**. – P. 883 – 897.

Одержано 13.07.16