УДК 517.51

Г. М. Веселовська, А. П. Голуб (Ін-т математики НАН України, Київ)

ТЕОРЕМИ ІСНУВАННЯ БАГАТОВИМІРНИХ УЗАГАЛЬНЕНИХ МОМЕНТНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

The conditions of existence of multidimensional generalized moment representations are established.

Установлены условия существования многомерных обобщенных моментных представлений.

У 1981 р. В. К. Дзядик [1] запропонував метод узагальнених моментних зображень, що в подальшому виявився ефективним при побудові та дослідженні раціональних наближень спеціальних функцій (див. [2]).

Означення 1 [1]. *Узагальненим моментним зображенням числової послідовності комплексних чисел $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ на добутку лінійних просторів $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ називається двопараметрична сукупність рівностей*

$$s_{k+j}=\langle x_k, y_j\rangle, \quad k,j\in\mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

де $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}\subset\mathcal{X}$, $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}\subset\mathcal{Y}$, а $\langle .,.\rangle$ — білінійна форма, визначена на $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

У [3] було встановлено наступний результат, що стосується умов існування зображень вигляду (1).

Теорема 1 [3, 4]. *Нехай $\mathcal{H}$ — нескінченновимірний сепарабельний гільбертів простір та $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ — ортонормований базис у ньому. Тоді для того щоб послідовність $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ мала узагальнене моментне зображення вигляду* (1), *де*

$$\langle x,y\rangle=\sum_{m=0}^{\infty}(x,e_m)(y,e_m),$$

а елементи $x_k, k\in\mathbb{Z}_+$, та $y_j, j\in\mathbb{Z}_+$, мають вигляд

$$x_k=\sum_{m=0}^{k}\alpha_m^{(k)}e_m, \quad \alpha_k^{(k)}\neq 0, \quad k\in\mathbb{Z}_+; \qquad y_j=\sum_{m=0}^{j}\beta_m^{(j)}e_m, \quad \beta_j^{(j)}\neq 0, \quad j\in\mathbb{Z}_+, \tag{2}$$

необхідно і достатньо, щоб всі визначники Ганкеля цієї послідовності

$$H_N:=H_{0,N}=\det\|s_{k+j}\|_{k,j=0}^{N}, \quad N\in\mathbb{Z}_+,$$

були відмінними від нуля.

При цьому будуть виконуватися співвідношення

$$\alpha_p^{(p)}\beta_p^{(p)}=\frac{H_p}{H_{p-1}}, \qquad p\in\mathbb{Z}_+, \quad H_{-1}:=1, \tag{3}$$

і якщо зафіксувати послідовності ненульових чисел $\{\alpha_p^{(p)}\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ та $\{\beta_p^{(p)}\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$, що задовольняють (3), *то решта коефіцієнтів у* (2) *будуть однозначно визначатися за формулами*

$$\alpha_p^{(k)}=\alpha_k^{(k)}\frac{S_k\begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & p-1 & k\\ 0 & 1 & \dots & p-1 & p\end{pmatrix}}{H_p}, \qquad p=\overline{0,k}, \quad k\in\mathbb{Z}_+, \tag{4}$$

$$\beta_p^{(j)} = \beta_j^{(j)} \frac{S_j \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & p-1 & p \\ 0 & 1 & \ldots & p-1 & j \end{pmatrix}}{H_p}, \qquad p = \overline{0, j}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

де $S_N \begin{pmatrix} l_0 & l_1 & \ldots & l_r \\ n_0 & n_1 & \ldots & n_r \end{pmatrix}$ *— мінори матриці*

$$S_N = \|s_{k+j}\|_{k,j=0}^N = \begin{Vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_N \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{N+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_N & s_{N+1} & \ldots & s_{2N} \end{Vmatrix}, \quad N \in \mathbb{Z}_+,$$

з номерами стовпчиків $l_0, l_1, \ldots, l_r$ *і номерами рядків* $n_0, n_1, \ldots, n_r$, *при* $l_m \leq N$, $n_m \leq N$, $m = \overline{0, r}$.

Далі метод узагальнених моментних зображень було поширено на дво- та багатовимірні послідовності [5, 6], у зв'язку з чим виникло питання про з'ясування умов існування багатовимірних узагальнених моментних зображень.

Означення 2 [5]. *Узагальненим моментним зображенням двовимірної числової послідовності* $\{s_{k,m}\}_{k,m \in \mathbb{Z}_+}$ *на добутку лінійних просторів* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ *називається сукупність рівностей*

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \quad k, j, m, n \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\{x_{k,m}\}_{k,m \in \mathbb{Z}_+} \subset \mathcal{X}$, $\{y_{j,n}\}_{j,n \in \mathbb{Z}_+} \subset \mathcal{Y}$, *а* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— білінійна форма на* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Перш ніж сформулювати відповідний результат, нагадаємо, що нумеруюча функція Кантора

$$c(x, y) = \frac{(x+y)^2 + x + 3y}{2}$$

взаємно однозначно відображає $\mathbb{Z}_+^2$ на $\mathbb{Z}_+$ (див., наприклад, [7, с. 13]), і при цьому існують такі обернені функції $l, r : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, що

$$c(l(n), r(n)) \equiv n, \qquad l(c(m,n)) = m, \qquad r(c(m,n)) = n \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, за двовимірною послідовністю $\{s_{k,m}\}_{k,m \in \mathbb{Z}_+}$ можна визначити одновимірну послідовність $\{\tilde{s}_p\}_{p \in \mathbb{Z}_+}$ таким чином:

$$\begin{gathered} s_{k,m} = \tilde{s}_{c(k,m)}, \quad (k,m) \in \mathbb{Z}_+^2, \\ \tilde{s}_p = s_{l(p),r(p)}, \quad p \in \mathbb{Z}_+. \end{gathered} \tag{6}$$

Побудуємо послідовність матриць

$$\tilde{S}_N = \left\| s_{l(k)+l(j), r(k)+r(j)} \right\|_{k,j=0}^N, \quad N \in \mathbb{Z}_+. \tag{7}$$

У вказаних термінах має місце наступний результат.

Теорема 2. *Нехай* $\mathcal{H}$ *— нескінченновимірний сепарабельний гільбертів простір та* $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ *— ортонормований базис у ньому. Тоді для того щоб послідовність* $\{s_{k,m}\}_{k,m \in \mathbb{Z}_+}$ *мала узагальнене моментне зображення вигляду*

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \quad k, j, m, n \in \mathbb{Z}_+, \tag{8}$$

де

$$\langle x,y\rangle=\sum_{m=0}^{\infty}(x,e_m)(y,e_m),$$

а елементи $\{x_{k,m}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}\subset\mathcal{X}$, $\{y_{j,n}\}_{j,n\in\mathbb{Z}_+}\subset\mathcal{X}$ *мають вигляд*

$$x_{k,m}=\sum_{p=0}^{c(k,m)}\alpha_p^{(k,m)}e_p,\qquad \alpha_{c(k,m)}^{(k,m)}\neq 0,\quad (k,m)\in\mathbb{Z}_+^2, \tag{9}$$

$$y_{j,n}=\sum_{p=0}^{c(j,n)}\beta_p^{(j,n)}e_p,\qquad \beta_{c(j,n)}^{(j,n)}\neq 0,\quad (j,n)\in\mathbb{Z}_+^2, \tag{10}$$

необхідно і достатньо, щоб всі визначники $\tilde H_N=\det\tilde S_N$, $N\in\mathbb{Z}_+$, *матриць, визначених формулами* (7), *були відмінними від нуля. При цьому будуть виконуватися співвідношення*

$$\alpha_{c(k,m)}^{(k,m)}\beta_{c(k,m)}^{(k,m)}=\frac{\tilde H_{c(k,m)}}{\tilde H_{c(k,m)-1}},\qquad (k,m)\in\mathbb{Z}_+^2,\quad \tilde H_{-1}:=1, \tag{11}$$

і, якщо зафіксувати послідовності ненульових чисел $\left\{\alpha_p^{(l(p),r(p))}\right\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ *та* $\left\{\beta_p^{(l(p),r(p))}\right\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$, *що задовольняють* (11), *то решта коефіцієнтів у* (9), (10) *будуть однозначно визначатися за формулами*

$$\alpha_p^{(k,m)}=\alpha_{c(k,m)}^{(k,m)}\frac{\tilde S_{c(k,m)}\begin{pmatrix}0 & 1 & \ldots & p-1 & c(k,m)\\ 0 & 1 & \ldots & p-1 & p\end{pmatrix}}{\tilde H_{c(k,m)}},\quad p=\overline{0,c(k,m)},\quad (k,m)\in\mathbb{Z}_+^2, \tag{12}$$

$$\beta_p^{(j,n)}=\beta_{c(j,n)}^{(j,n)}\frac{\tilde S_{c(j,n)}\begin{pmatrix}0 & 1 & \ldots & p-1 & p\\ 1 & 2 & \ldots & p-1 & c(j,n)\end{pmatrix}}{\tilde H_{c(j,n)}},\quad p=\overline{0,c(j,n)},\quad (j,n)\in\mathbb{Z}_+^2. \tag{13}$$

Доведення. Рівності (8) з урахуванням (9), (10), як легко бачити, еквівалентні рівностям

$$s_{k+j,m+n}=\sum_{p=0}^{\min\{c(k,m),c(j,n)\}}\alpha_p^{(k,m)}\beta_p^{(j,n)},\quad k,m,j,n\in\mathbb{Z}_+, \tag{14}$$

а рівності (14), в свою чергу, еквівалентні сукупності матричних рівностей

$$\tilde S_N=A_N\cdot B_N,\quad N=\overline{0,\infty},$$

де A_N — нижня трикутна матриця вигляду

$$A_N=\|a_{j,k}\|_{k,j=0}^N,\qquad a_{j,k}=\begin{cases}\alpha_j^{(l(k),r(k))} & \text{при } k\geq j,\\ 0 & \text{при } k<j,\end{cases}$$

а B_N — верхня трикутна матриця вигляду

$$B_N = \|b_{j,k}\|_{k,j=0}^N, \qquad b_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{при } k > j, \\ \beta_j^{(l(k),r(k))} & \text{при } k \leq j. \end{cases}$$

Тому

$$\tilde{H}_N = \det \tilde{S}_N = \prod_{p=0}^{N} \alpha_p^{(l(p),r(p))} \cdot \prod_{q=0}^{N} \beta_q^{(l(q),r(q))} \neq 0.$$

Звідси випливає *необхідність* твердження теореми. *Достатність* є наслідком теореми про розклад невиродженої матриці на трикутні співмножники (див. [8, с. 50]).

Аналогічно можна встановити умови існування d-вимірних узагальнених моментних зображень.

Означення 3 [6]. *Узагальненим моментним зображенням d-вимірної числової послідовності $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ на добутку лінійних просторів $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ називається сукупність рівностей*

$$s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} = \langle x_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{j}} \rangle, \quad \mathbf{k}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}_+^d,$$

де $\{x_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d} \subset \mathcal{X}$, $\{y_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d} \subset \mathcal{Y}$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — білінійна форма на $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Відомо (див. [7, с. 14]), що можна визначити функцію

$$c^d \colon \mathbb{Z}_+^d \to \mathbb{Z}_+,$$

яка взаємно однозначно відображає $\mathbb{Z}_+^d$ на $\mathbb{Z}_+$, і при цьому однозначно визначаються обернені функції $l_1, l_2, \ldots, l_d \colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ такі, що

$$c^d\big(l_1(n), l_2(n), \ldots, l_d(n)\big) \equiv n, \qquad l_i\big(c^d(n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_d)\big) = n_i, \quad i = \overline{1, d}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тому для довільної d-вимірної числової послідовності $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ можна побудувати послідовність матриць

$$\tilde{S}_N = \left\| s_{l_1(k)+l_1(j), l_2(k)+l_2(j), \ldots, l_d(k)+l_d(j)} \right\|_{k,j=0}^N, \quad N \in \mathbb{Z}_+. \tag{15}$$

Має місце наступний результат.

Теорема 3. *Нехай $\mathcal{H}$ — нескінченновимірний сепарабельний гільбертів простір та $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ — ортонормований базис у ньому. Тоді для того щоб послідовність $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ мала узагальнене моментне зображення вигляду*

$$s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} = \langle x_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{j}} \rangle, \quad \mathbf{k}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{16}$$

де

$$\langle x, y \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (x, e_m)(y, e_m),$$

а елементи $\{x_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ та $\{y_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d}$ мають вигляд

$$x_{\mathbf{k}} = \sum_{p=0}^{c^d(\mathbf{k})} \alpha_p^{(\mathbf{k})} e_p, \qquad \alpha_{c^d(\mathbf{k})}^{(\mathbf{k})} \neq 0, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{17}$$

$$y_{\mathbf{j}}=\sum_{p=0}^{c^d(\mathbf{j})}\beta_p^{(\mathbf{j})}e_p,\qquad \beta_{c^d(\mathbf{j})}^{(\mathbf{j})}\neq 0,\quad \mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d, \tag{18}$$

необхідно і достатньо, щоб всі визначники $\tilde{H}_p=\det\tilde{S}_N,\ N\in\mathbb{Z}_+$, *матриць* $\tilde{S}_N$, *визначених формулами* (15), *були відмінними від нуля.*

При цьому будуть виконуватися співвідношення

$$\alpha_{c^d(\mathbf{k})}^{(\mathbf{k})}\beta_{c^d(\mathbf{k})}^{(\mathbf{k})}=\frac{\tilde{H}_{c^d(\mathbf{k})}}{\tilde{H}_{c^d(\mathbf{k})-1}},\qquad \tilde{H}_{-1}:=1,\quad \mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d, \tag{19}$$

і якщо зафіксувати послідовності ненульових чисел $\{\alpha_p^{(\mathbf{l}(p))}\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ *та* $\{\beta_p^{(\mathbf{l}(p))}\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$, *де* $\mathbf{l}(p)=\big(l_1(p),l_2(p),\ldots,l_d(p)\big)$, *що задовольняють* (19), *то решта коефіцієнтів у* (17), (18) *будуть однозначно визначатися за формулами*

$$\alpha_p^{(\mathbf{k})}=\alpha_{c^d(\mathbf{k})}^{(\mathbf{k})}\frac{\tilde{S}_{c^d(\mathbf{k})}\begin{pmatrix}0&1&\ldots&p-1&c^d(\mathbf{k})\\0&1&\ldots&p-1&p\end{pmatrix}}{\tilde{H}_{c^d(\mathbf{k})}},\qquad p=\overline{0,c^d(\mathbf{k})},\quad \mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d, \tag{20}$$

$$\beta_p^{(\mathbf{j})}=\beta_{c^d(\mathbf{j})}^{(\mathbf{j})}\frac{\tilde{S}_{c^d(\mathbf{j})}\begin{pmatrix}0&1&\ldots&p-1&p\\0&1&\ldots&p-1&c^d(\mathbf{j})\end{pmatrix}}{\tilde{H}_{c^d(\mathbf{j})}},\qquad p=\overline{0,c^d(\mathbf{j})},\quad \mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d. \tag{21}$$

Відомо (див. [2]), що задача про узагальнені моментні зображення може бути сформульована в термінах лінійних операторів. А саме, якщо має місце узагальнене моментне зображення вигляду (1) і у просторі $\mathcal{X}$ існує лінійний оператор $A:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ такий, що

$$Ax_k=x_{k+1},\quad k\in\mathbb{Z}_+, \tag{22}$$

а у просторі $\mathcal{Y}$ існує лінійний оператор $A^*:\mathcal{Y}\to\mathcal{Y}$, спряжений до оператора A відносно білінійної форми $\langle\cdot,\cdot\rangle$, в тому розумінні, що

$$\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle\qquad\forall x\in\mathcal{X}\quad\forall y\in\mathcal{Y},$$

то зображення вигляду (1) буде еквівалентним зображенню

$$s_k=\langle A^kx_0,y_0\rangle,\quad k\in\mathbb{Z}_+. \tag{23}$$

Якщо при цьому простори $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ є банаховими, білінійна форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — роздільно неперервною, а оператор A — обмеженим, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}s_kz^k$$

буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції f, яка може бути зображена у вигляді

$$f(z)=\langle\mathcal{R}_z(A)x_0,y_0\rangle, \tag{24}$$

де $\mathcal{R}_z(A)=(I-zA)^{-1}$ — резольвентна функція оператора A.

У зв'язку з цим виникає питання про існування зображень вигляду (23), (24). Насправді відповідь на це питання була знайдена в [9] ще до того, як було запропоновано метод узагальнених моментних зображень.

Теорема 4 [9]. *Для довільної функції f, аналітичної в крузі $K_R = \{z \colon |z| \leq R\}$, $0 < R < < \infty$, і довільного нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору $\mathcal{H}$ існують елементи $x_0, y_0 \in \mathcal{H}$ та лінійний обмежений оператор $A \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, норма якого $\|A\| < \dfrac{1}{R}$ і такий, що для будь-якого $z \in K_R$*

$$f(z) = \bigl(\mathcal{R}_z(A)x_0, y_0\bigr). \tag{25}$$

Зауваження. Зображення (25) буде еквівалентним зображенню (24), якщо в якості білінійної форми взяти

$$\langle x, y \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (x, e_m)(y, e_m),$$

де $\{e_p\}_{p \in \mathbb{Z}_+}$ — ортонормований базис простору $\mathcal{H}$.

Аналогічний результат було встановлено в [4] для випадку цілих функцій.

Теорема 5 [4]. *Для довільної цілої функції f і довільного нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору $\mathcal{H}$ існують елементи $x_0, y_0 \in \mathcal{H}$ та лінійний обмежений оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ з нульовим спектральним радіусом такий, що має місце зображення*

$$f(z) = \bigl(\mathcal{R}_z(A)x_0, y_0\bigr). \tag{26}$$

Якщо при цьому ціла функція має порядок $\rho > 0$, то оператор A можна вибрати так, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \frac{C}{n^{\frac{1}{\rho}}}, \tag{27}$$

де C — стала.

Ці питання досліджувалися також у [10], де було розглянуто, зокрема, випадок зображень вигляду (25) з необмеженими операторами A.

Як і в одновимірному випадку, у випадку більших розмірностей задача про узагальнені моментні зображення також може бути сформульована в термінах лінійних операторів (див. [5, 6]). А саме, якщо має місце узагальнене моментне зображення вигляду (16) і у просторі $\mathcal{X}$ існують комутуючі між собою лінійні оператори $A_j : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $j = \overline{1, d}$, такі, що

$$A_j x_{\mathbf{k}} = x_{\mathbf{k} + \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{j}}}, \qquad j = \overline{1, d}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d,$$

де $\boldsymbol{\delta}_j = (\delta_{j,1}, \delta_{j,2}, \ldots, \delta_{j,d})$, $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$ а у просторі $\mathcal{Y}$ існують лінійні оператори $A_j^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$, $j = \overline{1, d}$, спряжені відповідно до операторів $A_j, j = \overline{1, d}$, відносно білінійної форми $\langle \cdot, \cdot \rangle$, то зображення вигляду (16) буде еквівалентним зображенню

$$s_{\mathbf{k}} = \langle A_1^{k_1} A_2^{k_2} \ldots A_d^{k_d} x_{\mathbf{0}}, y_{\mathbf{0}} \rangle, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d. \tag{28}$$

Якщо при цьому простори $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ є банаховими, білінійна форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — роздільно неперервною, а оператори $A_j, j = \overline{1, d}$, — обмеженими, то ряд

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_d^{k_d}$$

буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції f від d змінних, яку можна записати у вигляді

$$f(\mathbf{z}) = \langle \mathcal{R}_{z_1}(A_1)\mathcal{R}_{z_2}(A_2)\ldots\mathcal{R}_{z_d}(A_d)x_0, y_0\rangle.$$

Теореми 4 та 5 можуть бути поширені на випадок функцій кількох змінних.

Теорема 6. *Для довільної функції f, аналітичної в полікрузі $K_{\mathbf{R}} = K_{R_1} \times K_{R_2} \times \ldots \times K_{R_d}$, $0 < R_j < \infty$, $j = \overline{1,d}$, і довільного нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору $\mathcal{H}$ існують елементи $x_0, y_0 \in \mathcal{H}$ та лінійні обмежені оператори $A_j\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, що комутують між собою, норми яких $\|A_j\| < \dfrac{1}{R_j}$, $j = \overline{1,d}$, і такі, що для будь-якого $\mathbf{z} \in K_{\mathbf{R}}$*

$$f(\mathbf{z}) = \langle \mathcal{R}_{z_1}(A_1)\mathcal{R}_{z_2}(A_2)\ldots\mathcal{R}_{z_d}(A_d)x_0, y_0\rangle. \qquad (29)$$

Доведення. Нехай функція f в околі початку координат зображується степеневим рядом

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_d^{k_d}.$$

За умов теореми за нерівністю Коші – Адамара

$$|s_{\mathbf{k}}| \le \frac{M}{(R_1+\varepsilon_1)^{k_1}(R_2+\varepsilon_2)^{k_2}\ldots(R_d+\varepsilon_1)^{k_d}},$$

де $M = \sup_{\mathbf{z}\in K_{\mathbf{R}}} |f(\mathbf{z})|$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_d > 0$ (див. [11, c. 62]).

Зафіксуємо деякі числа $\tilde{R}_j \in (R_j, R_j + \varepsilon_j)$, $j = \overline{1,d}$, і для довільного ортонормованого базису $\{e_p\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ простору $\mathcal{H}$ розглянемо d-вимірну послідовність елементів

$$x_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\tilde{R}_1^{k_1}\tilde{R}_2^{k_2}\ldots\tilde{R}_d^{k_d}} e_{c^d(\mathbf{k})}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d.$$

Визначимо на елементах базису $\{e_p\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ дію лінійних операторів A_j, $j = \overline{1,d}$,

$$A_j e_m = \frac{1}{\tilde{R}_j} e_{c^d(l_1(m), l_2(m), \ldots, l_j(m)+1, \ldots, l_d(m))}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Легко бачити, що, по-перше,

$$A_j x_{\mathbf{k}} = x_{\mathbf{k}+\boldsymbol{\delta}_j}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d,$$

і, по-друге,

$$\|A_j\| = \frac{1}{\tilde{R}_j} < \frac{1}{R_j}.$$

Крім того, очевидно, що оператори $A_j, j = \overline{1,d}$, комутують між собою.

Визначимо тепер елемент $y_0 \in \mathcal{H}$ у вигляді суми ряду

$$y_0 = \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{R}_1^{l_1(p)} \ldots \tilde{R}_d^{l_d(p)} \overline{s}_{l_1(p), l_2(p), \ldots, l_d(p)} e_p.$$

Переконаємося, що $y_0 \in \mathcal{H}$. Дійсно,

$$\|y_0\|^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{R}_1^{2l_1(p)} \ldots \tilde{R}_d^{2l_d(p)} |s_{l_1(p), l_2(p), \ldots, l_d(p)}|^2 < \infty.$$

З іншого боку,

$$(x_{\mathbf{k}}, y_0) = \left(\frac{1}{\tilde{R}_1^{k_1} \tilde{R}_2^{k_2} \ldots \tilde{R}_d^{k_d}} e_{c^d(\mathbf{k})}, \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{R}_1^{l_1(p)} \ldots \tilde{R}_d^{l_d(p)} \overline{s}_{l_1(p), l_2(p), \ldots, l_d(p)} e_p \right) = s_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d,$$

а отже, справедливим є зображення (28).

Приклад. Нехай функція f визначається зображенням

$$f(\mathbf{z}) = \int\limits_{\mathbb{I}^d} \prod_{p=1}^{d} \frac{1}{1 - \dfrac{z_p t_p}{R_p}} d\mu(\mathbf{t}), \tag{30}$$

де $\mathbb{I}^d = [0,1]^d$, а μ — борелівська міра на $\mathbb{I}^d$.

Тоді в якості операторів $A_j, j = \overline{1,d}$, можна взяти оператори множення на незалежні змінні

$$(A_j \varphi)(\mathbf{t}) = \frac{t_j}{R_j} \varphi(\mathbf{t}),$$

норми яких відповідно дорівнюють

$$\|A_j\| = \frac{1}{R_j}.$$

Теорема 7. *Для довільної цілої функції f d змінних та будь-якого нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору $\mathcal{H}$ існують елементи $x_0, y_0 \in \mathcal{H}$ та лінійні обмежені комутуючі між собою оператори $A_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $j = \overline{1,d}$, з нульовим спектральним радіусом такі, що*

$$f(\mathbf{z}) = \big(\mathcal{R}_{z_1}(A_1)\mathcal{R}_{z_2}(A_2) \ldots \mathcal{R}_{z_d}(A_d) x_0, y_0\big).$$

При цьому якщо порядки зростання функції f (див. [11, *с.* 390]) *за змінними $z_j, j = \overline{1,d}$, дорівнюють відповідно $\rho_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, то оператори $A_j, j = \overline{1,d}$, можна вибрати так, що для будь-якого $p \in \mathbb{N}$*

$$\sqrt[p]{\|A_j^p\|} \leq \frac{C_j}{p^{\frac{1}{\rho_j}}}, \quad j = \overline{1,d}, \tag{31}$$

де $C_j, j = \overline{1,d}$, — сталі.

Доведення. Нехай функція f зображується степеневим рядом

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}.$$

З умов теореми випливає, що

$$\varlimsup_{|\mathbf{k}| \to \infty} \sqrt[|\mathbf{k}|]{|s_{\mathbf{k}}|} = 0, \quad \text{де} \quad |\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \ldots + k_d.$$

Тому можна вибрати монотонно спадну до нуля послідовність додатних чисел $\{\gamma_p\}_{p \in \mathbb{Z}_+}$ таку, що для будь-якого $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$

$$\sqrt[|\mathbf{k}|]{|s_{\mathbf{k}}|} \leq \gamma_{|\mathbf{k}|},$$

і, отже,

$$|s_{\mathbf{k}}| \leq \left(\gamma_{|\mathbf{k}|}\right)^{|\mathbf{k}|}.$$

Для довільного ортонормованого базису $\{e_p\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ при довільному $\lambda > 1$ розглянемо d-вимірну послідовність елементів

$$x_{\mathbf{k}} = \left(\lambda\gamma_{|\mathbf{k}|}\right)^{|\mathbf{k}|} e_{c^d(\mathbf{k})}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d,$$

і визначимо на елементах базису $\{e_p\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ лінійні оператори $A_j, j = \overline{1,d}$,

$$A_j e_p = \lambda \frac{\left(\gamma_{|\mathbf{l}(p)|+1}\right)^{|\mathbf{l}(p)|+1}}{\left(\gamma_{|\mathbf{l}(p)|}\right)^{|\mathbf{l}(p)|}} e_{c^d(\mathbf{l}(p)+\boldsymbol{\delta}_j)}. \tag{32}$$

Тоді будемо мати

$$A_j x_{\mathbf{k}} = x_{\mathbf{k}+\boldsymbol{\delta}_j}, \qquad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d, \quad j = \overline{1,d}.$$

З рівності (32) отримаємо

$$A_j^m e_p = \lambda^m \frac{\left(\gamma_{|\mathbf{l}(p)|+m}\right)^{|\mathbf{l}(p)|+m}}{\left(\gamma_{|\mathbf{l}(p)|}\right)^{|\mathbf{l}(p)|}} e_{c^d(\mathbf{l}(p)+m\boldsymbol{\delta}_j)},$$

а отже,

$$\|A_j^m\| = \sup_{p\in\mathbb{Z}_+} \lambda^m \frac{\left(\gamma_{|\mathbf{l}(p)|+m}\right)^{|\mathbf{l}(p)|+m}}{\left(\gamma_{|\mathbf{l}(p)|}\right)^{|\mathbf{l}(p)|}} \leq (\lambda\gamma_m)^m$$

і

$$\sqrt[m]{\|A_j^m\|} \leq \lambda\gamma_m \to 0 \quad \text{при } m \to \infty,$$

тобто оператори $A_j, j = \overline{1,d}$, мають нульовий спектральний радіус.

Покладаючи

$$y_0 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda\gamma_p)^p} s_{\mathbf{l}(p)} e_p,$$

отримуємо

$$\|y_0\|^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda\gamma_p)^{2p}} |s_{\mathbf{l}(p)}|^2 \leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2p}} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} < \infty.$$

Отже, $y_0 \in \mathcal{H}$.

З іншого боку,

$$(x_{\mathbf{k}}, y_0) = \left((\lambda\gamma_{\mathbf{k}})^{\mathbf{k}} e_{c^d(\mathbf{k})}, \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda\gamma_p{}^p} s_{\mathbf{l}(p)} e_p \right) = s_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d,$$

а тому справедливим є зображення (28).

Якщо порядки зростання функції f за змінними z_j, $j = \overline{1,d}$, відповідно дорівнюють ρ_j, $j = \overline{1,d}$, то

$$|s_{\mathbf{k}}| \leq \frac{C_j^{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|^{\left(\frac{k_1}{\rho_1}+\frac{k_2}{\rho_2}+\ldots+\frac{k_d}{\rho_d}\right)}} \leq \prod_{j=1}^{d}\left(\frac{C_j}{k_j^{\frac{1}{\rho_j}}}\right)^{k_j}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d,$$

де $C_j > 0,\ j = \overline{1,d},$ — деякі сталі.

Покладемо при деякому фіксованому $\lambda > 1$

$$x_{\mathbf{k}} = \lambda^{|\mathbf{k}|} \prod_{j=1}^{d}\left(\frac{1}{k_j^{\frac{1}{\rho_j}}}\right)^{k_j} e_{c^d(\mathbf{k})}.$$

На векторах базису $\{e_p\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ покладемо

$$A_j e_p = \lambda \left(\frac{l_j(p)^{l_j(p)}}{(l_j(p)+1)^{l_j(p)+1}}\right)^{\frac{1}{\rho_j}} e_{c^d(\mathbf{l}(p)+\boldsymbol{\delta}_j)}.$$

Тоді отримаємо

$$A_j x_{\mathbf{k}} = x_{\mathbf{k}+\boldsymbol{\delta}_j}, \qquad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d, \quad j = \overline{1,d},$$

$$A_j^m e_p = \lambda^m \left(\frac{l_j(p)^{l_j(p)}}{(l_j(p)+m)^{l_j(p)+m}}\right)^{\frac{1}{\rho_j}} e_{c^d(\mathbf{l}(p)+m\boldsymbol{\delta}_j)}$$

і, отже,

$$\|A_j^m\| = \sup_{p\in\mathbb{Z}_+} \lambda^m \left(\frac{l_j(p)^{l_j(p)}}{(l_j(p)+m)^{l_j(p)+m}}\right)^{\frac{1}{\rho_j}} \leq \left(\frac{\lambda}{m^{\rho_j}}\right)^m,$$

звідки і випливає нерівність (31).

Література

1. *Дзядик В. К.* Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. – 1981. – № 6. – С. 8 – 12.
2. *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 222 с.
3. *Дзядык В. К., Голуб А. П.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде. – Киев, 1981. – С. 3–15. – (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 81.58).
4. *Голуб А. П.* Теоремы существования обобщенных моментных представлений // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 881 – 888.
5. *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 8. – С. 1035 – 1058.
6. *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Багатовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде для функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 9. – С. 1166 – 1174.
7. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
9. *Аров Д. З.* Пассивные линейные стационарные динамические системы // Сиб. мат. журн. – 1979. – **20**, № 2. – С. 211 – 228.
10. *Радзиевский Г. В.* Теоремы существования обобщенных по Дзядыку моментных представлений // Мат. заметки. – 2004. – **75**, № 2. – С. 253 – 260.
11. *Фукс Б. А.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. – М.: Физматгиз, 1962. – 420 с.
12. *Лелон П., Груман Л.* Целые функции многих комплексных переменных. – М.: Мир, 1989. – 348 с.

Одержано 21.12.16