УДК 517.9

В. М. Горбачук (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ),
М. Л. Горбачук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРОСТОРИ ГЛАДКИХ ТА УЗАГАЛЬНЕНИХ ВЕКТОРІВ ГЕНЕРАТОРА АНАЛІТИЧНОЇ ПІВГРУПИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

For a strongly continuous analytic semigroup $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ of linear operators in a Banach space $\mathfrak{B}$ we investigate some locally convex spaces of smooth and generalized vectors of its generator A, as well as the extensions and restrictions of this semigroup to these spaces. We extend Lagrange's result on the representation of a translation group in the form of exponential series to the case of these semigroups and solve the Hille problem on description of the set of all vectors $x \in \mathfrak{B}$ for which there exists $\lim_{n\to\infty}\left(I + \dfrac{tA}{n}\right)^n x$ and this limit coincides with $e^{tA}x$. Moreover, we present a short survey of particular problems whose solutions are necessary for the introduction of the above-mentioned spaces, namely, the description of all maximal dissipative (self-adjoint) extensions of a dissipative (symmetric) operator; the representation of solutions to operator-differential equations on an open interval and the analysis of their boundary values, and the existence of solutions to an abstract Cauchy problem in various classes of analytic vector-valued functions.

Для сильно непрерывной аналитической полугруппы $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ линейных операторов в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ исследованы некоторые локально-выпуклые пространства гладких и обобщенных векторов ее генератора A, а также ее расширения и сужения на эти пространства. На такие полугруппы распространен результат Лагранжа о представлении группы сдвигов экспоненциальным рядом и решена проблема Хилле описания множества элементов $x \in \mathfrak{B}$, для которых существует $\lim_{n\to\infty}\left(I + \dfrac{tA}{n}\right)^n x$ и этот предел совпадает с $e^{tA}x$. Кроме того, приведен краткий обзор конкретных проблем, решение которых нуждается во введении указанных выше пространств, а именно: описания максимальных диссипативных (самосопряженных) расширений диссипативного (симметрического) оператора; представления решений дифференциально-операторных уравнений на открытом интервале и изучения их граничных значений; существования решений абстрактной задачи Коши в различных классах аналитических вектор-функций.

1. Вступ. Нехай $\mathfrak{B}$ — банахів простір із нормою $\|\cdot\|$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел, $E(\mathfrak{B})$ $(L(\mathfrak{B}))$ — множина всіх замкнених (неперервних) лінійних операторів в $\mathfrak{B}$, $\mathcal{D}(\cdot)$, $\mathcal{R}(\cdot)$, $\rho(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot)$, $\sigma_c(\cdot)$ і $\sigma_r(\cdot)$ — області визначення та значень, резольвентна множина, спектр, точковий, неперервний та залишковий спектри оператора. Нехай також $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ — C_0-півгрупа лінійних неперервних операторів $U(t)$ в $\mathfrak{B}$, тобто:

1) $U(0) = I$ (I — тотожний оператор в $\mathfrak{B}$);
2) $\forall t, s \geq 0\colon U(t+s) = U(t)U(s)$;
3) $\forall x \in \mathfrak{B}\colon \lim_{t\to 0}\|U(t)x - x\| = 0$.

Позначимо через A генератор цієї півгрупи:

$$Ax = \lim_{t\to 0}\frac{U(t)x - x}{t}, \qquad \mathcal{D}(A) = \left\{x \in \mathfrak{B}\colon \lim_{t\to 0}\frac{U(t)x - x}{t} \ \text{ існує}\right\}.$$

Як відомо (див. [1]), оператор A належить $E(\mathfrak{B})$. Він є неперервним тоді і тільки тоді, коли $U(t) \to I$, $t \to 0$, в рівномірній операторній топології. У подальшому C_0-півгрупу, що генерується оператором A, позначатимемо $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$.

Півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ називається аналітичною з кутом аналітичності $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, якщо e^{tA} допускає продовження до оператор-функції e^{zA}, аналітичної в секторі $\Sigma(\theta) = \{z \in \mathbb{C}\colon |\arg z| < \theta\}$, сильно неперервної вздовж довільного променя із $\Sigma(\theta)$ з початком у точці 0. За додаткової умови

$$\forall \psi \subset (0,\theta) \quad \forall z \in \Sigma(\psi)\colon \ \left\| e^{tA} \right\| \le M_\psi, \quad 0 < M_\psi = \mathrm{const},$$

півгрупа $\left\{ e^{tA} \right\}_{t\ge 0}$ називається обмеженою аналітичною.

Як показано в [1], має місце таке твердження.

Твердження 1. *Для того щоб півгрупа* $\left\{ e^{tA} \right\}_{t\ge 0}$ *була обмеженою аналітичною, необхідно і достатньо, щоб*

$$\forall t > 0 \quad \forall x \in \mathfrak{B} \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon \ e^{tA}x \in \mathcal{D}(A^n) \qquad i \qquad \left\| A^n e^{tA} \right\| \le \frac{c^n n!}{t^n}, \quad 0 < c = \mathrm{const}. \tag{1}$$

Зауважимо, що достатньо, аби нерівність (1) виконувалась лише для $t \in (0,1]$.

Не зменшуючи загальності у подальшому вважатимемо $\left\{ e^{tA} \right\}_{t\ge 0}$ півгрупою стиску.

Твердження 2. *Нехай A — генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи і $A \notin L(\mathfrak{B})$. Тоді*

$$\forall t > 0\colon \ 0 \in \sigma_c \left(e^{tA} \right).$$

Доведення. З аналітичності півгрупи $\left\{ e^{tA} \right\}_{t\ge 0}$ і включення $\mathcal{R}(e^{t'A}) \subset \mathcal{R}(e^{tA})$ при $t' > t$ випливає, що $0 \notin \sigma_p \left(e^{tA} \right) \bigcup \sigma_r \left(e^{tA} \right)$.

Припустимо тепер, що існує $t_0 > 0$ таке, що $0 \in \rho \left(e^{t_0 A} \right)$. Тоді

$$\forall x \in \mathfrak{B} \quad \exists \gamma > 0\colon \ \left\| e^{t_0 A} x \right\| \ge \gamma \|x\|.$$

Звідси і з (1) одержуємо оцінку

$$\forall x \in \mathcal{D}(A)\colon \ \|Ax\| \le \frac{1}{\gamma} \left\| e^{t_0 A} A x \right\| \le \frac{c}{\gamma t_0} \|x\|,$$

яка зумовлює включення $A \in L(\mathfrak{B})$, а це суперечить накладеній на A умові.

Твердження 2 доведено.

Якщо оператор A належить $L(\mathfrak{B})$, то для будь-якого $x \in \mathfrak{B}$ вектор-функція $e^{tA}x$ допускає продовження до цілої $\mathfrak{B}$-значної функції $e^{zA}x$, $z \in \mathbb{C}$, експоненціального типу і цю функцію можна визначити за оператором A двома способами:

$$e^{zA}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} A^n x \tag{2}$$

або

$$e^{zA}x = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{zA}{n} \right)^n x. \tag{3}$$

У випадку, коли $\mathfrak{B} = \mathbb{C}$, формули (2) і (3) навів Л. Ейлер [2]. З часом вони були поширені багатьма математиками (див. [3–6]) на неперервні оператори у довільному банаховому просторі, причому збіжність у правих частинах виконується в рівномірній операторній топології. Якщо ж $A \notin L(\mathfrak{B})$, то зображення (2) і (3) мають місце не для всіх $x \in \mathfrak{B}$. Можна навести приклад C_0-півгрупи, для якої вони є правильними лише при $x = 0$. З огляду на це постає питання: за яких умов на C_0-півгрупу існують локально-опуклі простори X_0, X_0':

$$X_0 \subset \mathfrak{B} \subset X_0'$$

такі, що зазначені вкладення є щільними і неперервними, на елементах яких права частина в (2) збігається у топологіях цих просторів? Така постановка часто-густо зустрічається в різних математичних задачах. Наприклад, якщо $\mathfrak{B} = \widetilde{C}([0, 2\pi])$ — простір неперервних 2π-періодичних функцій, то зображення

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{ikt}, \qquad c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{2\pi} x(t) \, e^{-ikt} \, dt,$$

має місце не для всіх $x \in \widetilde{C}([0, 2\pi])$. Але покладаючи $X_0 = \widetilde{D}$, де $\widetilde{D}$ — локально-опуклий простір нескінченно диференційовних 2π-періодичних функцій, і $X_0' = \widetilde{D}'$, де $\widetilde{D}'$ — простір 2π-періодичних розподілів (див. [7]), одержуємо ланцюжок щільних і неперервних вкладень $\widetilde{D} \subset \widetilde{C}\big([0, 2\pi]\big) \subset \widetilde{D}'$, до того ж тригонометричні ряди функцій з $\widetilde{D}$ і $\widetilde{D}'$ збігаються в топологіях цих просторів відповідно.

Варто також нагадати, що ще у 1772 р. Ж. Лагранж (див. [8]) навів формулу

$$x(t+s) = \exp\left(t \frac{d}{ds}\right) x(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{d^k x(s)}{ds^k},$$

з якої видно, що група зсувів $U(t)x(s) = x(s+t)$ зображується виразом (2) як експонента від її генератора — оператора диференціювання. Що ж до надання їй сенсу для довільної C_0-групи, тобто усвідомлення, що саме слід розуміти під e^{tA}, де A — генератор цієї групи, то знадобилось майже два століття, щоб з'явилась теорія півгруп лінійних неперервних операторів у банаховому просторі — одне з найважливіших досягнень математики XX століття. Лагранжеве обґрунтування наведеного зображення для групи зсувів випливало із даного ним означення функції: „Будь-яка функція скрізь, за винятком, можливо, окремих значень аргументу, зображується рядом Тейлора”.

Якщо розглядати формулу (2) у різних функціональних просторах, таких, наприклад, як $L^p(\mathbb{R})$, $C_b(\mathbb{R})$ тощо, то можна переконатись, що її ліва частина визначена на всьому просторі, а ряд у правій частині — лише на певних класах цілих функцій, щільних у розглядуваних просторах. Тому слушним є питання про те, чи існує для довільної C_0-півгрупи у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ щільний у ньому топологічний підпростір X, на елементах x якого формула (2) має сенс, тобто її права частина збігається до $e^{tA}x$ у топології цього підпростору.

Для довільної унітарної групи у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ зображення (2) на щільній у $\mathfrak{H}$ множині векторів випливає з теореми Стоуна [9] про спектральне зображення такої групи. Для C_0-групи у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ проблема про можливість її зображення у вигляді (2) на щільній у $\mathfrak{B}$ множині векторів була поставлена А. М. Колмогоровим і розв'язана І. М. Гельфандом у випадку, коли ця група є обмеженою (див. [10]). Для довільної C_0-групи в $\mathfrak{B}$ її розв'язок наведено в [11].

Проблема існування простору $X_0 \subset \mathfrak{B}$, на елементах x якого C_0-півгрупа в $\mathfrak{B}$ зображується у вигляді (3), була поставлена Е. Хілле (1946 р.). Як було зазначено ним у [12], „поширити формулу (3) на сильний випадок (тобто коли генератор A півгрупи не є обмеженим), мабуть, надзвичайно важко: ймовірно, що навіть для $x \in C^{\infty}(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ границя (3) не завжди існує". Зауважимо, що в [11] для C_0-групи в $\mathfrak{B}$ встановлено, що така границя існує тоді і тільки тоді, коли x — цілий вектор її генератора A, тобто X_0 є ні чим іншим, як простором цілих векторів оператора A.

Основна мета даної роботи — для аналітичної C_0-півгрупи в $\mathfrak{B}$ відшукати топологічні простори X_0 та X_0' зі щільними і неперервними вкладеннями $X_0 \subset \mathfrak{B} \subset X_0'$, на елементах яких допускається зображення (2), збіжне у топологіях цих просторів. Подібне питання розглядалось у [13], але воно стосувалось лише півгруп лінійних операторів, дія яких не виходить за межі $\mathfrak{B}$, і збіжності ряду (2) в топології підпросторів цілих векторів їх генераторів. Ми також розв'язуємо проблему Хілле і, більш того, наводимо короткий огляд деяких конкретних проблем математики, повний розв'язок яких потребував додаткового введення специфічних локально-опуклих просторів.

2. Простори $\mathfrak{B}_{(+)}$ та $\mathfrak{B}_{\{+\}}$. У цьому пункті припускатимемо, що оператор $A \in E(\mathfrak{B})$ задовольняє такі умови:

a) A є генератором обмеженої аналітичної C_0-півгрупи стиску $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$;

b) $A \notin L(\mathfrak{B})$;

c) $A^{-1} \in L(\mathfrak{B})$.

Із твердження 2 випливає, що

$$\forall t > 0\colon\ e^{tA}x = 0 \Longrightarrow x = 0 \qquad \text{і} \qquad \overline{\mathcal{R}\left(e^{tA}\right)} = \mathfrak{B},$$

а отже, оператор e^{tA} має обернений $e^{-tA} := \left(e^{tA}\right)^{-1}$.

На множині $\mathfrak{B}_t = \mathcal{R}\left(e^{tA}\right)$ введемо норму $\|x\|_t = \left\|e^{-tA}x\right\|$. Оскільки $e^{-tA} \in E(\mathfrak{B})$ і $\overline{\mathcal{R}\left(e^{tA}\right)} = \mathfrak{B}$, простір $\mathfrak{B}_t$ є банаховим відносно $\|\cdot\|_t$. Більш того, простір $\mathfrak{B}_t$, $t > 0$, щільно і неперервно вкладений у $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$. Позначимо через $V_s(t)$ звуження оператора e^{tA} на $\mathfrak{B}_s$: $V_s(t) := e^{tA}\restriction_{\mathfrak{B}_s}$.

Теорема 1. *Множина $\{V_s(t)\}_{t\geq 0}$ утворює обмежену аналітичну C_0-півгрупу у просторі $\mathfrak{B}_s$ з генератором $A_s = A\restriction_{\mathfrak{B}_s}$.*

Доведення. Із включення $\mathcal{R}\left(e^{(s+t)A}\right) \subset \mathcal{R}\left(e^{sA}\right)$ для довільних $t, s > 0$ і нерівності

$$\left\|e^{tA}x\right\|_s = \left\|e^{-sA}e^{tA}x\right\| = \left\|e^{tA}e^{-sA}x\right\| \leq \left\|e^{-sA}x\right\| = \|x\|_s$$

випливає, що $\{V_s(t)\}_{t\geq 0}$ — півгрупа стиску в $\mathfrak{B}_s$. Оскільки $y = e^{-sA}x \in \mathfrak{B}$ для $x \in \mathfrak{B}_s$, то співвідношення

$$\left\|e^{tA}x - x\right\|_s = \left\|e^{-sA}\left(e^{tA}x - x\right)\right\| = \left\|e^{tA}y - y\right\|$$

свідчать про те, що $\{V_s(t)\}_{t\geq 0}$ — C_0-півгрупа у просторі $\mathfrak{B}_s$, а її генератором A_s є звуження A на $\mathfrak{B}_s$. На підставі твердження 1 маємо

$$\forall x \in \mathfrak{B}_s \quad \exists c > 0\colon\ \left\|A_s^n V_s(t)x\right\|_s = \left\|A^n e^{tA}x\right\|_s = \left\|e^{-sA}A^n e^{tA}x\right\| \leq \frac{c^n}{t^n}n!\left\|e^{-sA}x\right\| = \frac{c^n}{t^n}n!\|x\|_s,$$

а отже, півгрупа $\{V_s(t)\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною в $\mathfrak{B}_s$.

Теорему 1 доведено.

Враховуючи, що $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ — півгрупа стиску, одержуємо

$$\forall t \geq 0 \quad \forall s \geq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{B}_s \colon \; \|x\|_s = \left\| e^{-sA} x \right\| = \left\| e^{tA} e^{-(t+s)A} x \right\| \leq \left\| e^{-(t+s)A} x \right\| = \|x\|_{t+s}.$$

Ця нерівність і включення $\mathcal{R}\left(e^{(t+s)A}\right) \subseteq \mathcal{R}\left(e^{sA}\right)$ зумовлюють неперервне вкладення

$$\forall t \geq 0 \quad \forall s \geq 0 \colon \; \mathfrak{B}_{s+t} \subseteq \mathfrak{B}_s.$$

Позначимо через $\mathfrak{B}'_s$ простір, спряжений до $\mathfrak{B}_s$. Із півгрупової властивості e^{sA} і аналітичності півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t \geq 0}$ випливає, що для довільного лінійного неперервного функціонала $F \in \mathfrak{B}'_s$

$$F\left(e^{sA} x\right) = 0 \Longrightarrow F\left(e^{tA} x\right) = 0 \qquad \text{при} \quad t \geq s.$$

Звідси робимо висновок, що $\mathfrak{B}_t$ щільно вкладається в $\mathfrak{B}_s$ і

$$V_{s'}(t) = V_s(t) \restriction_{\mathfrak{B}_{s'}} \qquad \text{при} \quad s' > s > 0. \tag{4}$$

Покладемо

$$\mathfrak{B}_{(+)} = \bigcap_{s \geq 0} \mathfrak{B}_s, \qquad \mathfrak{B}_{\{+\}} = \bigcup_{s \geq 0} \mathfrak{B}_s$$

і введемо у цих просторах топологію проективної та, відповідно, індуктивної границі банахових просторів $\mathfrak{B}_s$:

$$\mathfrak{B}_{(+)} = \operatorname*{proj\,lim}_{s \to \infty} \mathfrak{B}_s, \qquad \mathfrak{B}_{\{+\}} = \operatorname*{ind\,lim}_{s \to 0} \mathfrak{B}_s.$$

Оскільки індуктивна границя $\mathfrak{B}_{\{+\}}$ є регулярною (див. [14]), то збіжність $x_n \to x$, $n \to \infty$, у цьому просторі означає збіжність $x_n \to x$ у деякому $\mathfrak{B}_s$. Що ж до простору $\mathfrak{B}_{(+)}$, то збіжність у ньому рівносильна збіжності у кожному $\mathfrak{B}_s$. Аналогічно обмеженість, неперервність, диференційовність, аналітичність вектор-функції $y(t)$ зі значеннями в $\mathfrak{B}_{\{+\}}$ $\left(\mathfrak{B}_{(+)}\right)$ означає наявність відповідної властивості у деякому (кожному) просторі $\mathfrak{B}_s$. Очевидно також, що

$$\mathfrak{B}_{(+)} = \operatorname*{proj\,lim}_{\mathbb{N} \ni n \to \infty} \mathfrak{B}_n, \qquad \mathfrak{B}_{\{+\}} = \operatorname*{ind\,lim}_{n \to \infty} \mathfrak{B}_{1/n}.$$

Таким чином, $\mathfrak{B}_{(+)}$ — зчисленно-нормований простір [15].

Теорема 2. *Простір $\mathfrak{B}_{(+)}$ є щільним у $\mathfrak{B}$, а вкладення $\mathfrak{B}_{n+1}$ у $\mathfrak{B}_n$ — строгим для довільного $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.*

Доведення. Врахувавши щільність вкладення $\mathfrak{B}_{n+1}$ у $\mathfrak{B}_n$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}_0$, виберемо за індукцією для довільного фіксованого $x_0 \in \mathfrak{B}$ та $\varepsilon > 0$ вектори $x_n \in \mathfrak{B}_n$, $n \in \mathbb{N}$, такі, що $\|x_{n+1} - x_n\|_n \leq \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Тоді

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|x_{n+1} - x_n\|_n + \|x_n - x_{n-1}\|_{n-1} + \ldots + \|x_1 - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \tag{5}$$

до того ж

$$\forall k \geq 1 \quad \forall m > n \geq k \colon \; \|x_{n+1} - x_n\|_k + \ldots + \|x_m - x_{m-1}\|_k \leq$$
$$\leq \|x_{n+1} - x_n\|_n + \ldots + \|x_m - x_{m-1}\|_{m-1} \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^m} \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Таким чином,

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists y_k \in \mathfrak{B}_k \colon \; \|x_n - y_k\|_k \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Очевидно, що y_k не залежить від k, тобто $y_k = y$ $(k \in \mathbb{N})$, а тому $y \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_k$. Переходячи в (5) до границі при $n \to \infty$, одержуємо $\|y - x_0\| < \varepsilon$, а отже, $\overline{\mathfrak{B}_{(+)}} = \mathfrak{B}$.

Припустимо тепер, що вкладення $\mathfrak{B}_{n+1}$ в $\mathfrak{B}_n$ не є строгим. Це означає, що

$$\exists \gamma > 0\colon\ \|x\|_{n+1} \le \gamma \|x\|_n \Longleftrightarrow \left\| e^{-(n+1)A} x \right\| \le \gamma \left\| e^{-nA} x \right\|.$$

Оскільки $\overline{\mathcal{R}\left(e^{nA}\right)} = \mathfrak{B}$, то

$$\forall y \in \mathfrak{B}\colon\ \left\| e^{-A} y \right\| \le \gamma \|y\|,$$

тобто $0 \in \rho\left(e^{A}\right)$, що суперечить (див. твердження 2) умові b) на оператор A.

Теорему 2 доведено.

Твердження 3. *Для довільного* $x \in \mathfrak{B}_{(+)}$ *існують* $x_s, y_s \in \mathfrak{B}_{(+)}$ $(s \ge 0)$ *такі, що*

$$x = e^{sA} x_s, \qquad x = e^{-sA} y_s.$$

Доведення. Оскільки для будь-якого фіксованого $t > 0$

$$\forall s \ge 0\colon\ \mathfrak{B}_{t+s} = \mathcal{R}\big(e^{(t+s)A}\big) \subset \mathfrak{B}_s,$$

то

$$\mathfrak{B}_{(+)} = \bigcap_{s \ge 0} \mathfrak{B}_s = \bigcap_{s \ge 0} \mathfrak{B}_{t+s} = \bigcap_{s \ge t} \mathfrak{B}_{s-t}. \tag{6}$$

Беручи до уваги взаємну однозначність відображення $e^{tA}\colon \mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}_t$ (теорема 2) і рівність (6), одержуємо

$$\mathfrak{B}_{(+)} = e^{tA} \mathfrak{B}_{(+)}.$$

Твердження 3 доведено.

Позначимо через $\{V(t)\}_{t \ge 0}$ звуження півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t \ge 0}$ на простір $\mathfrak{B}_{(+)}\colon V(t) = e^{tA} \restriction_{\mathfrak{B}_{(+)}}$. Неважко переконатись, що його генератор $A_+ = A \restriction_{\mathfrak{B}_{(+)}}$. Нагадаємо (див. [1]), що довільна півгрупа $\{T(t)\}_{t \ge 0}$ у локально-опуклому просторі X називається одностайно неперервною, якщо для будь-якої його півнорми $p(x)$ існує півнорма $q(x)$ така, що

$$\forall x \in X \quad \forall t \ge 0\colon\ p\left(T(t)x\right) \le q(x).$$

Теорема 3. *Нехай* $\left\{e^{tA}\right\}_{t \ge 0}$ — *обмежена аналітична* C_0*-півгрупа стиску в* $\mathfrak{B}$. *Тоді півгрупа* $\{V(t)\}_{t \ge 0}$ *є одностайно неперервною в* $\mathfrak{B}_{(+)}$, *а її генератор* A_+ — *неперервний оператор, визначений на всьому просторі* $\mathfrak{B}_{(+)}$.

Доведення. Із твердження 3 випливає, що $V(t)$ взаємно однозначно відображає простір $\mathfrak{B}_{(+)}$ сам на себе і $\forall x \in \mathfrak{B}_{(+)}\colon\ V^{-1}(t)x = e^{-tA}x$. Неважко бачити, що за теоремою 1 у локально-опуклому просторі $\mathfrak{B}_{(+)}$ для $V(t)$ виконуються півгрупові властивості 2 і 3 п. 1. Із твердження 3 також отримуємо

$$\forall x \in \mathfrak{B}_{(+)} \quad \forall s > 0\colon\ \|V(t)x - x\|_s = \left\| \left(e^{tA} - I\right) e^{-sA} e^{2sA} x_{2s} \right\| \le$$
$$\le \left\| \left(e^{(t+s)A} - e^{sA}\right) x_{2s} \right\| \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to 0,$$

а отже, $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ — C_0-півгрупа у просторі $\mathfrak{B}_{(+)}$. Співвідношення

$$\forall s,t\geq 0\colon\ \left\|e^{tA}x\right\|_s=\left\|e^{-sA}e^{tA}x\right\|\leq\left\|e^{-sA}x\right\|=\|x\|_s$$

підтверджує одностайну неперервність півгрупи $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}_{(+)}$.

Оскільки за умовою півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною, то на підставі твердження 1 маємо

$$\forall\varepsilon>0\quad\forall x\in\mathfrak{B}_{(+)}\colon\ \|Ax\|_s=\left\|e^{-sA}Ax\right\|=\left\|Ae^{\varepsilon A}e^{-(s+\varepsilon)A}x\right\|\leq\frac{c}{\varepsilon}\|x\|_{s+\varepsilon}.$$

Звідси робимо висновок, що оператор $A_+=A\restriction_{\mathfrak{B}_{(+)}}$ є неперервним у просторі $\mathfrak{B}_{(+)}$. Рівність

$$\left\|\left(\frac{V(t)-I}{t}-A_+\right)x\right\|_s=\left\|\left(\frac{V(t)-I}{t}-A\right)e^{-sA}x\right\|,\quad t>0,$$

показує, що A_+ — генератор півгрупи $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}_{(+)}$, що й завершує доведення теореми.

Для $t\in\mathbb{R}$ покладемо

$$\widetilde{V}(t)=\begin{cases}V(t) & \text{при}\quad t\geq 0,\\ V^{-1}(-t) & \text{при}\quad t<0.\end{cases}$$

З доведення теореми 3 випливає такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Якщо $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ — обмежена аналітична C_0-півгрупа у просторі $\mathfrak{B}$, то її звуження $\left\{V(t)\right\}_{t\geq 0}$ на $\mathfrak{B}_{(+)}$ допускає продовження до C_0-групи $\left\{\widetilde{V}(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ у цьому просторі.*

Твердження 3 і той факт, що $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ — півгрупа стиску, обумовлюють співвідношення

$$\forall x\in\mathfrak{B}_{(+)}\quad\forall s'>s>0\quad\forall k\in\mathbb{N}\colon$$

$$\left\|A^kx\right\|_s=\left\|e^{-sA}A^ke^{s'A}x_{s'}\right\|=\left\|e^{(s'-s)A}A^kx_{s'}\right\|\leq\frac{c^kk!}{(s'-s)^k}\|x\|_{s'},$$

звідки для довільних $n,m\in\mathbb{N}$, $m>n$, та $z\in\mathbb{C}\colon\ |z|<\dfrac{s'-s}{2c}$ маємо

$$\left\|\sum_{k=n}^m\frac{z^k}{k!}A^kx\right\|_s\leq\sum_{k=n}^m\frac{|z|^k}{k!}\left\|A^kx\right\|_s\leq\sum_{k=n}^m\frac{|z|^k}{k!}\frac{c^kk!}{(s'-s)^k}\|x\|_{s'}\leq\frac{1}{2^{n-1}}\|x\|_{s'},\quad x\in\mathfrak{B}_{(+)}.$$

Отже, послідовність

$$V_n(z)x=\sum_{k=0}^n\frac{z^k}{k!}A^kx\qquad\text{при}\quad |z|<\frac{s'-s}{2c}$$

є фундаментальною в $\mathfrak{B}_{(+)}$ і внаслідок секвенціальної повноти простору $\mathfrak{B}_{(+)}$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{k!}A^kx$ збігається у цьому просторі. Враховуючи, що s' і s можна вибрати так, щоб величина $s'-s$ була як завгодно великою, приходимо до висновку, що послідовність операторів $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{z^k}{k!}A^k$ сильно збігається до оператора $\exp(zA)$ рівномірно на кожному компакті з $\mathbb{C}$, а оператор-функція $\exp(zA)$ є цілою у просторі $\mathfrak{B}_{(+)}$.

Неважко переконатись, що вектор-функція $y(t) = \exp(tA)x$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), \quad t \in (0, \infty),$$
$$y(0) = x,$$

а оскільки A генерує C_0-півгрупу в $\mathfrak{B}$, то

$$y(t) = \exp(tA)x = e^{tA}x.$$

Беручи до уваги наслідок 1, приходимо до такого твердження.

Наслідок 2. *За умов наслідку* 1 $V(t)$ *допускає продовження до цілої оператор-функції* $\exp(zA)$ *у просторі* $\mathfrak{B}_{(+)}$.

3. Простори $\mathfrak{B}_{(-)}$ та $\mathfrak{B}_{\{-\}}$. У цьому пункті на оператор A накладаються такі ж умови, як і в попередньому.

Позначимо через $\mathfrak{B}_{-t}$ $(t > 0)$ поповнення $\mathfrak{B}$ за нормою

$$\|x\|_{-t} = \left\|e^{tA}x\right\|$$

і покладемо $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$. При $t' > t \geq 0$ маємо щільне й неперервне вкладення $\mathfrak{B}_{-t} \subseteq \mathfrak{B}_{-t'}$. Щоб переконатися в цьому, достатньо довести порівнянність і узгодженість норм $\|\cdot\|_{-t}$ та $\|\cdot\|_{-t'}$ в $\mathfrak{B}$. Оскільки $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ — півгрупа стиску, то перша властивість випливає із співвідношення

$$\|x\|_{-t'} = \left\|e^{t'A}x\right\| = \left\|e^{(t'-t)A}e^{tA}x\right\| \leq \left\|e^{tA}x\right\| = \|x\|_{-t}.$$

Припустимо тепер, що $\mathfrak{B} \ni x_m \to 0$ $(m \to \infty)$ у просторі $\mathfrak{B}_{-t'}$ і послідовність $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ є фундаментальною в $\mathfrak{B}_{-t}$. Останнє означає фундаментальність послідовності $\left\{e^{tA}x_m\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ в $\mathfrak{B}$, а отже, $e^{tA}x_m$ збігається в $\mathfrak{B}$ до деякого елемента $y \in \mathfrak{B}$, звідки

$$0 = \lim_{m\to\infty} e^{t'A}x_m = \lim_{m\to\infty} e^{(t'-t)A}e^{tA}x_m = e^{(t'-t)A}y.$$

На підставі твердження 2 робимо висновок, що $y = 0$.

Таким чином, для довільних $t' > t > 0$ маємо щільне і неперервне вкладення

$$\mathfrak{B}_{-t} \subset \mathfrak{B}_{-t'}.$$

Зауважимо, що це вкладення є строгим, оскільки в протилежному випадку

$$\forall x \in \mathfrak{B}_{-t'}\colon\ \|x\|_{-t'} \geq c\|x\|_{-t} \implies \forall y \in \mathfrak{B}\colon\ \left\|e^{(t'-t)A}y\right\| \geq c\|y\|,$$

а це, за твердженням 2, означало б неперервність оператора A.

Із нерівності $\left\|e^{tA}\right\| \leq 1$, щільності $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}_{-s}$ і співвідношення

$$\forall t \geq 0 \quad \forall s > 0 \quad \forall x \in \mathfrak{B}\colon\ \left\|e^{tA}x\right\|_{-s} \leq \|x\|_{-s}$$

випливає, що $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ допускає неперервне продовження до півгрупи $\{U_s(t)\}_{t\geq 0}$ у просторі $\mathfrak{B}_{-s}$, причому

$$\|U_s(t)\|_{\mathfrak{B}_{-s}} \leq 1. \tag{7}$$

Теорема 4. *Оператор $U_t(t)$ ізометрично відображає $\mathfrak{B}_{-t}$ на $\mathfrak{B}$, і для будь-якого фіксованого $s>0$ $\{U_s(t)\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною C_0-півгрупою стиску у просторі $\mathfrak{B}_{-s}$. Більш того,*

$$\forall s' > s > 0\colon\ U_{s'}(t)\restriction_{\mathfrak{B}_{-s}} = U_s(t). \tag{8}$$

Доведення. Припустимо, що $x\in\mathfrak{B}_{-t}$. Тоді існує послідовність $\{x_n\in\mathfrak{B}\}_{n\in\mathbb{N}}: x_n\to x$ в $\mathfrak{B}_{-t}$ така, що

$$\|U_t(t)x_n - U_t(t)x_m\| = \left\|e^{tA}x_n - e^{tA}x_m\right\| = \|x_n - x_m\|_{-t}\to 0 \qquad \text{при}\quad n,m\to\infty.$$

Оскільки норми $\|\cdot\|$ та $\|\cdot\|_{-t}$ узгоджені і $e^{tA}\mathfrak{B} = \mathcal{R}\left(e^{tA}\right)$, то $U(t)x_n\to U(t)x$ в $\mathfrak{B}$, тобто

$$U_t(t)\mathfrak{B}_{-t}\subseteq\overline{\mathcal{R}\left(e^{tA}\right)}$$

(замикання розуміється у просторі $\mathfrak{B}$).

Покажемо, що має місце й протилежне включення. Справді, нехай $x\in\overline{\mathcal{R}\left(e^{tA}\right)}$. Тоді

$$\exists y_n\in\mathfrak{B}\quad (n\in\mathbb{N})\colon\ e^{tA}y_n\to x \qquad \text{при}\quad n\to\infty.$$

Із співвідношення

$$\|y_n - y_m\|_{-t} = \left\|e^{tA}y_n - e^{tA}y_m\right\| = \|U_t(t)y_n - U_t(t)y_m\|\to 0 \qquad \text{при}\quad n,m\to\infty$$

внаслідок узгодженості норм $\|\cdot\|$ та $\|\cdot\|_{-t}$ маємо

$$\exists y\in\mathfrak{B}_{-t}\colon\ U_t(t)y = x,$$

тобто

$$\overline{\mathcal{R}\left(e^{tA}\right)}\subseteq U_t(t)\mathfrak{B}_{-t},$$

а отже, $U_t(t)\mathfrak{B}_{-t} = \overline{\mathcal{R}\left(e^{tA}\right)}$. Враховуючи, що внаслідок аналітичності півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ $\overline{\mathcal{R}\left(e^{tA}\right)} = \mathfrak{B}$, одержуємо

$$U_t(t)\mathfrak{B}_{-t} = \mathfrak{B}.$$

З того, що $\|U_t(t)x\| = \left\|e^{tA}x\right\| = \|x\|_{-t}$ для довільного $x\in\mathfrak{B}$, і щільності $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}_{-t}$ випливає, що

$$\forall x\in\mathfrak{B}_{-t}\colon\ \|U_t(t)x\| = \|x\|_{-t}.$$

Аналогічно, внаслідок щільності $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}_{-s}$ і неперервності $U_s(t)$ в $\mathfrak{B}_{-s}$ робимо висновок, що

$$\forall x\in\mathfrak{B}_{-s}\quad \forall t_1,t_2\geq 0\colon\ e^{t_1A}e^{t_2A}x = e^{(t_1+t_2)A}x$$

і

$$U_s(t)x - x\to 0 \qquad \text{при}\quad t\to 0.$$

Таким чином, $\{U_s(t)\}_{t\geq 0}$ — півгрупа стиску в $\mathfrak{B}_{-s}$. Позначимо через A_{-s} її генератор. Оскільки півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною в $\mathfrak{B}$, то

$$\forall x\in\mathfrak{B}\colon\ \left\|A_{-s}^n U_s(t)x\right\|_{-s} = \left\|A^n e^{tA}x\right\|_{-s} = \left\|e^{sA}A^n e^{tA}x\right\| \leq \frac{c^n n!}{t^n}\left\|e^{sA}x\right\| = \frac{c^n n!}{t^n}\|x\|_{-s},$$

звідки, завдяки щільності $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}_{-s}$, випливає обмежена аналітичність півгрупи $U_s(t)$ у просторі $\mathfrak{B}_{-s}$. Беручи також до уваги, що

$$\forall s' > s > 0\colon\ U_{s'}(t) \restriction_{\mathfrak{B}} = U_s(t) \restriction_{\mathfrak{B}},$$

і неперервність $U_{s'}(t)$ в $\mathfrak{B}_{-s'}$, приходимо до (8).

Теорему 4 доведено.

Тепер покладемо

$$\mathfrak{B}_{\{-\}} = \operatorname{ind}\lim_{t\to\infty} \mathfrak{B}_{-t}, \qquad \mathfrak{B}_{(-)} = \operatorname{proj}\lim_{t\to 0} \mathfrak{B}_{-t}.$$

Очевидно, що

$$\mathfrak{B}_{\{-\}} = \operatorname{ind}\lim_{n\to\infty} \mathfrak{B}_{-n}, \qquad \mathfrak{B}_{(-)} = \operatorname{proj}\lim_{n\to\infty} \mathfrak{B}_{-\frac{1}{n}},$$

а тому простір $\mathfrak{B}_{(-)}$ є зліченно-нормованим. Оскільки оператор A не обмежений, то вкладення

$$\mathfrak{B}_{-t} \subset \mathfrak{B}_{-t'} \qquad \text{при} \quad t < t'$$

є строгим.

У просторі $\mathfrak{B}_{\{-\}}$ визначимо півгрупу

$$\left\{\check{U}(t)x = U_s(t)x\right\}_{t\geq 0}, \qquad \text{якщо} \quad x \in \mathfrak{B}_{-s}.$$

Співвідношення (8) гарантує коректність такого означення. За теоремою 4 $\left\{\check{U}(t)\right\}_{t\geq 0}$ є аналітичною C_0-півгрупою і $\check{U}(t) \restriction_{\mathfrak{B}} = e^{tA}$. Генератор $\check{A}$ цієї півгрупи є розширенням A в $\mathfrak{B}_{\{-\}}$.

У просторі $\mathfrak{B}_{(-)}$ розглянемо півгрупу

$$\left\{\hat{U}(t)x = U_s(t)x\right\}_{t\geq 0} \qquad \forall s \geq 0.$$

Завдяки (8) це означення не залежить від вибору s, а отже, також є коректним. Згідно з теоремою 4, $\left\{\hat{U}(t)\right\}_{t\geq 0}$ — аналітична C_0-півгрупа в $\mathfrak{B}_{(-)}$ і $\hat{U}(t)\mathfrak{B}_{(-)} \subset \mathfrak{B}$ при $t > 0$. Позначимо через $\hat{A}$ генератор цієї півгрупи.

Теорема 5. *Півгрупа* $\left\{\hat{U}(t)\right\}_{t\geq 0}$ *є одностайно неперервною в* $\mathfrak{B}_{(-)}$ *і має такі властивості*:

(i) $\forall t > 0\colon\ \hat{U}(t)\mathfrak{B}_{(-)} \subset \mathfrak{B}$;

(ii) $\forall t \geq 0\ \forall x \in \mathfrak{B}\colon\ \hat{U}(t)x = e^{tA}x$;

(iii) $\forall t, s > 0\ \forall x \in \mathfrak{B}_{(-)}\colon\ \hat{U}(t+s)x = e^{tA}\hat{U}(s)x = e^{sA}\hat{U}(t)x$.

Її генератор $\hat{A}$ *визначений і неперервний на всьому просторі* $\mathfrak{B}_{(-)}$, *а також* $\hat{A} \restriction_{\mathcal{D}(A)} = A$.

Доведення. Одностайна неперервність $\left\{\hat{U}(t)\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}_{(-)}$, а також властивості (i) – (iii) випливають безпосередньо з теореми 4. Крім того, для будь-якого $t > 0$ існує таке $t' > 0$, що оператор $\hat{A}$ діє неперервно з $\mathfrak{B}_{-t'}$ в $\mathfrak{B}_{-t}$; за t' можна взяти будь-яке число з інтервалу $(0, t)$, оскільки

$$\forall x \in \mathcal{D}(A)\colon\ \|Ax\|_{-t} = \left\|e^{tA}Ax\right\| = \left\|Ae^{(t-t')A}e^{At'}x\right\| \leq \frac{c}{t-t'}\left\|e^{t'A}Ax\right\| = \frac{c}{t-t'}\|x\|_{-t'}.$$

Тому оператор A допускає продовження за неперервністю $\hat{A}$ на увесь простір $\mathfrak{B}_{(-)}$.

Доведемо тепер, що $\hat{A}\restriction_{\mathcal{D}(A)} = A$. Справді,

$$\forall x \in \mathcal{D}(A)\colon\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{(t+\Delta t)A}x - e^{tA}x}{\Delta t} \qquad \text{існує у просторі} \quad \mathfrak{B}.$$

Поготів, у просторі $\mathfrak{B}_{(-)}$ існує границя

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{U(t+\Delta t)x - U(t)x}{\Delta t} = \hat{A}x = Ax.$$

Теорему 5 доведено.

4. Простори нескінченно диференційовних векторів замкненого оператора. Нехай $A \in E(\mathfrak{B})$. Припустимо, що $0 \in \rho(A)$. Не обмежуючи загальності можемо вважати, що

$$\forall x \in \mathcal{D}(A)\colon\ \|Ax\| \geq \|x\| \tag{9}$$

та

$$A \notin L(\mathfrak{B}). \tag{10}$$

Позначимо через $\mathfrak{B}^n = \mathfrak{B}^n(A)$ множину $\mathcal{D}(A^n)$. Ця множина утворює банахів простір $\mathfrak{B}^n$ відносно норми $\|x\|_{\mathfrak{B}^n} = \|A^n x\|$, відомий (див. [16]) як абстрактний соболєвський простір. Замкненість оператора A і співвідношення (9) обумовлюють нерівність

$$\|A^n x\| \leq \left\|A^{n+1}x\right\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(A^{n+1}),$$

а отже, щільне й неперервне вкладення

$$\mathfrak{B}^{n+1} \subset \mathfrak{B}^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Його строгість доводиться від супротивного. Дійсно, припустимо, що для деякого $n \in \mathbb{N}_0$ $\mathfrak{B}^{n+1} = \mathfrak{B}^n$ топологічно. Тоді

$$\exists c_n > 0 \quad \forall x \in \mathfrak{B}^{n+1}\colon\ \|x\|_{\mathfrak{B}^{n+1}} \leq c_n \|x\|_{\mathfrak{B}^n}.$$

Оскільки $\mathcal{R}(A^n) = \mathfrak{B}$, то

$$\forall y \in \mathfrak{B}\colon\ \|Ay\| \leq c_n \|y\|,$$

тобто $A \in L(\mathfrak{B})$, що суперечить (10).

Позначимо через $\mathfrak{B}^{-n}$ поповнення $\mathfrak{B}$ за нормою

$$\|x\|_{\mathfrak{B}^{-n}} = \left\|A^{-n}x\right\|.$$

Із співвідношень (9), (10) випливає щільне і неперервне строге вкладення

$$\mathfrak{B}^{-n} \subset \mathfrak{B}^{-(n+1)}.$$

Теорема 6. *Нехай A — генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t \geq 0}$ в $\mathfrak{B}$. Тоді*

$$\forall t > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon\ \mathfrak{B}^{-n} \subset \mathfrak{B}_{-t}$$

щільно і неперервно.

Доведення. Для підтвердження щільності й неперервності зазначеного вкладення достатньо довести порівнянність і узгодженість норм $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}^{-n}}$ та $\|\cdot\|_{-t}$. Перша з цих властивостей зумовлюється співвідношенням

$$\|x\|_{-t} = \left\|e^{tA}x\right\| = \left\|e^{tA}A^nA^{-n}x\right\| \le \frac{c^n n!}{t^n}\left\|A^{-n}x\right\| = c_n\|x\|_{\mathfrak{B}^{-n}},$$

котре є наслідком твердження 1.

Припустимо тепер, що послідовність $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ збігається у просторі $\mathfrak{B}_{-t}$ до 0 при $k\to\infty$ і є фундаментальною в $\mathfrak{B}^{-n}$. Тоді послідовність $\{A^{-n}x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ є фундаментальною в $\mathfrak{B}$, а тому збігається до деякого вектора $y\in\mathfrak{B}$. З іншого боку, завдяки неперервності оператора $e^{tA}A^n$ в $\mathfrak{B}$ при $t>0$ приходимо до висновку, що

$$A^ne^{tA}A^{-n}x_k \to A^ne^{tA}y \qquad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Враховуючи, що

$$A^ne^{tA}A^{-n}x_k = e^{tA}x_k \to 0 \qquad \text{в} \quad \mathfrak{B},$$

одержуємо $A^ne^{tA}y=0$. Оскільки $0\in\rho(A)$, то $e^{tA}y=0$. За твердженням 2 $y=0$, а тому норми $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}^{-n}}$ і $\|\cdot\|_{-t}$ узгоджені. Таким чином, $\mathfrak{B}^{-n}\subseteq\mathfrak{B}_{-t}$ щільно і неперервно. Якби $\mathfrak{B}^{-n}=\mathfrak{B}_{-t}$, то існувала б така стала $d_n>0$, що

$$\forall x\in\mathfrak{B}\colon\ \|x\|_{\mathfrak{B}^{-n}} \le d_n\|x\|_{-t}.$$

Тоді, взявши до уваги, що $\mathcal{R}(A^n)=\mathfrak{B}$, і можливість зображення довільного елемента $y\in\mathfrak{B}$ у вигляді $y=A^nx$, одержали б оцінку

$$\|y\| \le d_n\left\|e^{tA}A^{-n}y\right\| \quad \forall y\in\mathfrak{B},$$

з якої випливає, що $\left(e^{tA}A^{-n}\right)^{-1}\in L(\mathfrak{B})$, що суперечить твердженню 2 і умові (10).

Теорему 6 доведено.

Покладемо

$$\mathfrak{B}^{\infty} = \operatorname*{proj\,lim}_{n\to\infty}\mathfrak{B}^n, \qquad \mathfrak{B}^{-\infty} = \operatorname*{ind\,lim}_{n\to\infty}\mathfrak{B}^{-n}.$$

Виходячи із викладеного вище, отримуємо ланцюжок попарно неперервних і щільних вкладень

$$\mathfrak{B}_{(+)}\subset\mathfrak{B}_{\{+\}}\subset\mathfrak{B}^{\infty}\subset\mathfrak{B}\subset\mathfrak{B}^{-\infty}\subset\mathfrak{B}_{\{-\}}\subset\mathfrak{B}_{(-)}.$$

Оскільки всі банахові простори $\mathfrak{B}^n$ відмінні один від одного у зліченно-нормованому просторі $\mathfrak{B}^{\infty}$, то (див. [15]) для довільної монотонно неспадної послідовності $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можна підібрати $x\in\mathfrak{B}^{\infty}$ так, що

$$\|x\|_{\mathfrak{B}^n} = \|A^nx\| \ge m_n.$$

З огляду на це розглянемо деякі підпростори з $\mathfrak{B}^{\infty}$, для елементів x яких послідовність $\{A^nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ має певний порядок зростання при $n\to\infty$, і з'ясуємо їх зв'язок із просторами $\mathfrak{B}_{(+)}$, $\mathfrak{B}_{\{+\}}$, $\mathfrak{B}_{(-)}$ та $\mathfrak{B}_{\{-\}}$.

Для числа $\beta\ge 0$ покладемо

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}} = \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \operatorname*{ind\,lim}_{\alpha\to\infty}\mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A) = \bigcup_{\alpha>0}\mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A),$$

$$\mathfrak{G}_{(\beta)} = \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \operatorname*{proj\,lim}_{\alpha\to 0} \mathfrak{G}_\beta^\alpha(A) = \bigcap_{\alpha>0} \mathfrak{G}_\beta^\alpha(A),$$

де

$$\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A) = \left\{ x \in \mathfrak{B}^\infty \;\middle|\; \exists c = c(x) > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0 \colon\ \|A^k x\| \le c\alpha^k k^{k\beta} \right\}$$

— банахів простір відносно норми

$$\|x\|_{\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A)} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\|A^k x\|}{\alpha^k k^{k\beta}}.$$

Оскільки $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}$ є регулярною індуктивною границею просторів $\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A)$, то збіжність послідовності в $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}$ означає її збіжність в $\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A)$ при деякому $\alpha > 0$, тоді як збіжність в $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ рівносильна збіжності в $\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A)$ при кожному додатному α.

Очевидно, що для довільних $\lambda \ne 0,\ \mu \in \mathbb{C}$

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(\lambda A + \mu I) = \mathfrak{G}_{\{\beta\}}, \qquad \mathfrak{G}_{(\beta)}(\lambda A + \mu I) = \mathfrak{G}_{(\beta)},$$

і за умови, що $\beta_1 < \beta_2$,

$$\mathfrak{G}_{(\beta_1)} \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta_1\}} \subseteq \mathfrak{G}_{(\beta_2)} \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta_2\}}.$$

Більш того, для будь-якого многочлена $P(\lambda)$

$$P(A)\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A), \qquad P(A)\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{(\beta)}(A),$$

і якщо $0 \in \rho\left(P(A)\right)$, то

$$P(A)\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A), \qquad P(A)\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \mathfrak{G}_{(\beta)}(A).$$

Простори $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$, $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ та $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ називають просторами аналітичних [17], цілих [18] та цілих експоненціального типу [19] векторів оператора A. Як показано в [20], має місце таке твердження.

Твердження 4. *Нехай генератор A належить $E(\mathfrak{B})$. Тоді для довільного $x \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$, $0 < \beta \le 1$, ряд $\sum_{k=0}^\infty \dfrac{z^k}{k!} A^k x$ збігається у просторі $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ рівномірно на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$ і вектор-функція*

$$\exp(zA)x = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!} A^k x$$

є цілою в $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$. Якщо A генерує обмежену аналітичну з кутом θ C_0-півгрупу, то $\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}$ при $\beta > 1 - \dfrac{2\theta}{\pi}$ і

$$\forall t > 0 \quad \forall x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)\colon\ \exp(tA)x = \begin{cases} e^{tA}x & \text{при} \quad t \ge 0, \\ \left(e^{-tA}\right)^{-1} x & \text{при} \quad t < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Якщо ж $x \in \mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$, то існує таке $r = r(x)$, що (11) виконується при $t \in (0, r)$.

Теорема 7. *Припустимо, що A — генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$. Тоді*

$$\mathfrak{G}_{(1)} = \mathfrak{B}_{(+)}, \qquad \mathfrak{G}_{\{1\}} = \mathfrak{B}_{\{+\}},$$

причому топології відповідних пар просторів є еквівалентними.

Доведення. Нехай $x \in \mathfrak{G}_{(1)}$. Тоді за твердженням 4

$$x = e^{tA}x_t \quad \forall t > 0, \qquad \text{де} \quad x_t = \exp(-tA)x \in \mathfrak{G}_{(1)},$$

тобто

$$x \in \bigcap_{t>0} \mathcal{R}\left(e^{tA}\right) = \mathfrak{B}_{(+)}$$

і

$$\|x\|_t = \left\|e^{-tA}x\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(-A)^k x\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\left\|A^k x\right\| \leq$$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|A^n x\|}{\alpha^n n!} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha t)^k \leq 2\|x\|_{\mathfrak{G}_1^\alpha} \quad \forall \alpha < \frac{1}{2t}. \tag{12}$$

Припустимо тепер, що $x \in \mathfrak{B}_{(+)} = \bigcap\limits_{t>0} \mathcal{R}\left(e^{tA}\right)$. Тоді для довільного $t > 0$ існує таке $g_t \in \mathfrak{B}$, що $x = e^{tA}g_t$. За твердженням 1

$$\|A^n x\| = \left\|A^n e^{tA} g_t\right\| \leq \frac{c^n n!}{t^n}\left\|e^{-tA}x\right\| = \frac{c^n n!}{t^n}\|x\|_t,$$

тобто $x \in \mathfrak{G}_1^{c/t}$ і

$$\|x\|_{\mathfrak{G}_1^{c/t}} \leq \|x\|_t. \tag{13}$$

Таким чином, $\mathfrak{B}_{(+)} = \mathfrak{G}_{(1)}$. Згідно із співвідношеннями (12) і (13), які виконуються для довільного $t > 0$, топології цих просторів еквівалентні.

Якщо $x \in \mathfrak{G}_{\{1\}}$, то за твердженням 4 $\exp(zA)x$ є локально аналітичною вектор-функцією, тобто існує таке $r > 0$, що ця функція є аналітичною в крузі $O_r = \{z \in \mathbb{C} \colon\ |z| < r\}$. У цьому випадку співвідношення (12), а отже, й (13) виконуються лише для $t \in (0, r)$. Користуючись ними, неважко помітити еквівалентність топологій просторів $\mathfrak{G}_{\{1\}}$ та $\mathfrak{B}_{\{+\}}$.

Теорему 7 доведено.

Тепер розглянемо випадок, коли простір $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ є гільбертовим зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ і нормою $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$. При розв'язуванні багатьох задач математичного аналізу замість пари просторів — основного і спряженого до нього — часто-густо звертаються до трійки щільно й неперервно вкладених один в одного гільбертових просторів. Наведемо коротку схему побудови такої трійки.

Нехай $\mathfrak{H}_0$ — гільбертів простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел, а $\mathfrak{H}_+$ — щільна в ньому множина, котра сама утворює гільбертовий простір відносно іншого скалярного добутку, причому

$$\forall f \in \mathfrak{H}_+ \colon\ \|f\|_{\mathfrak{H}_0} \leq \|f\|_{\mathfrak{H}_+}.$$

Простір $\mathfrak{H}_+$ називається позитивним, а його елементи називаються основними векторами. Кожний елемент $f \in \mathfrak{H}_0$ породжує антилінійний неперервний функціонал l_f над $\mathfrak{H}_+$ за формулою

$$\forall g \in \mathfrak{H}_+ : \ \ l_f(g) = (f, g)_{\mathfrak{H}_0}.$$

Позначимо через $\mathfrak{H}_-$ поповнення $\mathfrak{H}_0$ за новою нормою

$$\|f\|_{\mathfrak{H}_-} = \|l_f\| = \sup_{g \in \mathfrak{H}_+} \frac{|(f, g)_{\mathfrak{H}_0}|}{\|g\|_{\mathfrak{H}_+}} \leq \|f\|_{\mathfrak{H}_0}.$$

Елементи цього простору називаються узагальненими векторами, а сам простір $\mathfrak{H}_-$ називається негативним. Як показано в [21], він є гільбертовим і збігається зі спряженим до $\mathfrak{H}_+ : \mathfrak{H}_- = \mathfrak{H}_+'$. Таким чином, маємо трійку неперервно і щільно вкладених один в одного гільбертових просторів

$$\mathfrak{H}_+ \subseteq \mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{H}_-,$$

норми яких задовольняють умову

$$\forall f \in \mathfrak{H}_+ : \ \|f\|_{\mathfrak{H}_+} \geq \|f\|_{\mathfrak{H}_0} \geq \|f\|_{\mathfrak{H}_-}. \tag{14}$$

Для $f \in \mathfrak{H}_-$ і $g \in \mathfrak{H}_+$ визначений „скалярний добуток” $(f, g)_{\mathfrak{H}_0}$ — білінійна форма, яка при $f \in \mathfrak{H}_0$ збігається зі скалярним добутком в $\mathfrak{H}_0$. Для нього також виконується нерівність Коші–Буняковського

$$|(f, g)_{\mathfrak{H}_0}| \leq \|f\|_{\mathfrak{H}_-} \|g\|_{\mathfrak{H}_+}.$$

Більш того, для довільного антилінійного неперервного функціонала l над $\mathfrak{H}_+$ існує єдиний вектор $f \in \mathfrak{H}_-$, за допомогою якого цей функціонал набирає вигляду

$$\forall g \in \mathfrak{H}_+ : \ \ l(g) = l_f(g) = (f, g)_{\mathfrak{H}_0}.$$

Нехай тепер $C \in E(\mathfrak{H}_0) : \ \mathcal{R}(C) = \mathfrak{H}_0$ і

$$\forall f \in \mathcal{D}(C) : \ \ \|Cf\|_{\mathfrak{H}_0} \geq \|f\|_{\mathfrak{H}_0}. \tag{15}$$

Тоді $\mathfrak{H}_+ = \mathcal{D}(C)$ є гільбертовим простором відносно скалярного добутку

$$(f, g)_{\mathfrak{H}_+} = (Cf, Cg)_{\mathfrak{H}_0} \quad \big(f, g \in \mathcal{D}(C)\big),$$

причому нерівність (15) означає, що

$$\forall f \in \mathcal{D}(C) : \ \ \|f\|_{\mathfrak{H}_0} \leq \|f\|_{\mathfrak{H}_+}, \tag{16}$$

тобто $\mathfrak{H}_+ = \mathcal{D}(C)$ — позитивний простір у вкладенні $\mathfrak{H}_+ \subseteq \mathfrak{H}_0$. Неважко переконатись, що в цьому випадку негативний простір $\mathfrak{H}_-$ є ні чим іншим, як поповненням $\mathfrak{H}_0$ за нормою $\|f\|_{\mathfrak{H}_-} = \left\|C^{-1}f\right\|_{\mathfrak{H}_0}$, породженою скалярним добутком

$$(f, g)_{\mathfrak{H}_-} = \left(C^{-1}f, C^{-1}g\right)_{\mathfrak{H}_0} \quad \big(f, g \in \mathfrak{H}_0\big).$$

Якщо за оператор C взяти e^{-tA} ($t > 0$ фіксоване), де A — генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи в $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}_0$, то $C = e^{-tA}$ задовольняє умову (15) і простір $\mathfrak{B}_t$ є позитивним відносно $\mathfrak{H}_0$, а $\mathfrak{B}_{-t}$ — відповідним негативним.

Розглянемо сім'ю гільбертових просторів $\mathfrak{H}_\tau$, де τ перебігає впорядковану множину T, щільно й неперервно вкладених в $\mathfrak{H}_0$ і таких, що

$$\forall f \in \mathfrak{H}_\tau: \ \|f\|_{\mathfrak{H}_\tau} \geq \|f\|_{\mathfrak{H}_0}.$$

Припустимо також, що при $\tau_1 < \tau_2$, $\mathfrak{H}_{\tau_1} \supseteq \mathfrak{H}_{\tau_2}$ $(\mathfrak{H}_{\tau_1} \subset \mathfrak{H}_{\tau_2})$, ці вкладення є щільними й неперервними і $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}_{\tau_1}} \leq \|\cdot\|_{\mathfrak{H}_{\tau_2}}$ $\left(\|\cdot\|_{\mathfrak{H}_{\tau_1}} \geq \|\cdot\|_{\mathfrak{H}_{\tau_2}}\right)$.

Покладемо

$$\mathfrak{H}_{\mathrm{pr}} = \operatorname{proj}\lim_{\tau \in T} \mathfrak{H}_\tau, \qquad \mathfrak{H}_{\mathrm{ind}} = \operatorname{ind}\lim_{\tau \in T} \mathfrak{H}_\tau.$$

Зауважимо, що індуктивна границя $\mathfrak{H}_{\mathrm{ind}}$ є регулярною [14]. Як показано в [21], має місце таке твердження.

Твердження 5. *Нехай $\mathfrak{H}_{\mathrm{pr}}$ $(\mathfrak{H}_{\mathrm{ind}})$ — проективна (індуктивна) границя гільбертових просторів $\mathfrak{H}_\tau$, $\tau \in T$, пов'язаних з $\mathfrak{H}_0$ і $\mathfrak{H}_{-\tau}$ ланцюжком*

$$\mathfrak{H}_\tau \subseteq \mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{H}_{-\tau}, \qquad \|f\|_{\mathfrak{H}_\tau} \geq \|f\|_{\mathfrak{H}_0} \geq \|f\|_{\mathfrak{H}_{-\tau}}.$$

Тоді для спряженого до $\mathfrak{H}_{\mathrm{pr}}$ $(\mathfrak{H}_{\mathrm{ind}})$ простору $\mathfrak{H}'_{\mathrm{pr}}$ $(\mathfrak{H}'_{\mathrm{ind}})$ виконується топологічна рівність

$$\mathfrak{H}'_{\mathrm{pr}} = \operatorname{ind}\lim_{\tau \in T} \mathfrak{H}_{-\tau} \quad \left(\mathfrak{H}'_{\mathrm{ind}} = \operatorname{proj}\lim_{\tau \in T} \mathfrak{H}_{-\tau}\right)$$

(*простори $\mathfrak{H}'_{\mathrm{pr}}$ та $\mathfrak{H}'_{\mathrm{ind}}$ наділені сильною топологією спряженого простору*).

Як і у випадку гільбертових просторів, можна надати сенс виразу $(f,g)_{\mathfrak{H}_0}$ для $f \in \mathfrak{H}_{\mathrm{pr}}$, $g \in \mathfrak{H}'_{\mathrm{pr}}$ $(f \in \mathfrak{H}_{\mathrm{ind}},\ g \in \mathfrak{H}'_{\mathrm{ind}})$, а саме: якщо $f \in \mathfrak{H}_{\mathrm{pr}}$, $g \in \mathfrak{H}'_{\mathrm{pr}}$ $(f \in \mathfrak{H}_{\mathrm{ind}},\ g \in \mathfrak{H}'_{\mathrm{ind}})$, тобто $f \in \mathfrak{H}_\tau$ при довільному (деякому) $\tau \in T$, то $(f,g)_{\mathfrak{H}_0}$ слід розуміти як розширення за неперервністю скалярного добутку з $\mathfrak{H}_0 \times \mathfrak{H}_0$ на $\mathfrak{H}_\tau \times \mathfrak{H}_{-\tau}$. Зрозуміло, що $(f,g)_{\mathfrak{H}_0}$ — неперервна білінійна форма на $\mathfrak{H}_{\mathrm{pr}} \times \mathfrak{H}'_{\mathrm{pr}}$ $(\mathfrak{H}_{\mathrm{ind}} \times \mathfrak{H}'_{\mathrm{ind}})$. Виходячи із викладеного вище і враховуючи твердження 5, отримуємо таку теорему.

Теорема 8. *Нехай A — генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$. Тоді*

$$\mathfrak{H}'_{(+)} = \mathfrak{H}_{\{-\}}, \qquad \mathfrak{H}'_{\{+\}} = \mathfrak{H}_{(-)}.$$

З теорем 7 і 8 випливає такий наслідок.

***Наслідок* 3.** *Якщо A генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, то*

$$\mathfrak{G}'_{(1)} = \mathfrak{H}_{\{-\}}, \qquad \mathfrak{G}'_{\{1\}} = \mathfrak{H}_{(-)}.$$

5. Поширення на аналітичні C_0-півгрупи зображення Лагранжа для групи зсувів. Має місце таке твердження.

Теорема 9. *Нехай A — генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t \geq 0}$ у банаховому просторі $\mathfrak{B}$. Тоді для довільного $x \in \mathfrak{B}_{(+)}$ ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} A^k x \tag{17}$$

збігається у просторі $\mathfrak{B}_{(+)}$ (а отже, й у просторі $\mathfrak{B}$) до $\exp(zA)$ рівномірно на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$. Навпаки, якщо ряд (17) *збігається у просторі $\mathfrak{B}$ рівномірно на будь-якому компакті $K \subset \mathbb{C}$, то $x \in \mathfrak{B}_{(+)}$. Для довільного $x \in \mathfrak{B}$ цей ряд збігається рівномірно на кожному $K \subset \mathbb{C}$ до $e^{zA}x$ у просторі $\mathfrak{B}_{\{-\}}$.*

Доведення. Рівномірна збіжність у просторі $\mathfrak{B}_{(+)}$ на будь-якому компакті $K \subset \mathbb{C}$ ряду (17) до $\exp(zA)$ випливає з твердження 4 і теореми 7. Збіжність цього ряду у просторі $\mathfrak{B}$ в точці $z = t \in (0, \infty)$ обумовлює оцінку

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon \ \left\| \frac{t^k}{k!} A^k x \right\| \leq c_t.$$

Оскільки $t \in (0, \infty)$ є довільним, то $x \in \mathfrak{G}_{(1)} = \mathfrak{B}_{(+)}$.

Нехай тепер $x \in \mathfrak{B}$. За твердженням 1

$$A^k e^{sA} x \in \mathfrak{B} \quad (s > 0) \qquad \text{і} \qquad \left\| A^k e^{sA} x \right\| \leq \frac{c^k k!}{s^k}.$$

Тоді

$$\forall m > n \quad \forall t < \frac{s}{2c}\colon \ \left\| \sum_{k=n}^{m} \frac{t^k}{k!} A^k x \right\|_{-s} =$$

$$= \left\| \sum_{k=n}^{m} \frac{t^k}{k!} A^k e^{sA} x \right\| \leq \sum_{k=n}^{m} \left(\frac{|t|c}{s} \right)^k \leq \frac{1}{2^{n-1}} \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а отже, ряд (17) збігається у просторі $\mathfrak{B}_{-s}$ при $|z| < \dfrac{s}{2c}$, і для кожного компакта $K \subset \mathbb{C}$ можна підібрати s так, щоб цей ряд рівномірно збігався на ньому в $\mathfrak{B}_{-s}$, а тому й у просторі $\mathfrak{B}_{\{-\}} = \operatorname{ind\,lim}_{s \to \infty} \mathfrak{B}_{-s}$.

Нехай тепер $x \in \mathfrak{B}$. Внаслідок щільності $\mathfrak{B}_{(+)}$ в $\mathfrak{B}$ існує послідовність $x_n \in \mathfrak{B}_{(+)}$, яка збігається до x в $\mathfrak{B}$. Для довільного $z\colon |z| < \dfrac{s}{2c}$ маємо

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} A^k (x - x_n) \right\|_{-s} = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} A^k e^{sA} (x - x_n) \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{zc}{s} \right|^k \|x - x_n\| \leq 2\|x - x_n\|.$$

Беручи до уваги, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x_n = e^{tA} x_n,$$

і неперервність e^{tA} в $\mathfrak{B}$, робимо висновок, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x = e^{tA} x.$$

Теорему 9 доведено.

6. Розв'язок проблеми Хілле. Має місце таке твердження.

Теорема 10. *Нехай генератор A належить $E(\mathfrak{B})$. Тоді для довільного $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ послідовність $\left\{ \left(I + \dfrac{zA}{n} \right)^n x \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ збігається при $n \to \infty$ до $\exp(zA)x$ у просторі $\mathfrak{B}_{(+)}$ рівномірно на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$. Навпаки, якщо A — генератор C_0-півгрупи стиску $\left\{ e^{tA} \right\}_{t \geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ і послідовність $\left\{ \left(I + \dfrac{zA}{n} \right)^n x \right\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in \mathfrak{B}^{\infty}$, збігається у просторі $\mathfrak{B}$ рівномірно на будь-якому компакті $K \subset \mathbb{C}$, то x належить $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.*

Доведення. Припустимо, що $x \in \mathfrak{G}_{(1)} = \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, де $A \in E(\mathfrak{B})$. Для $k \in \mathbb{N}$ покладемо

$$c_j(k) = \begin{cases} \dfrac{k(k-1)\ldots(k-j+1)}{k^j} & \text{при} \quad 1 \leq j \leq k, \quad c_0(k) = 1, \\ 0 & \text{при} \quad k < j. \end{cases}$$

Тоді $c_j(k) \leq 1 \ (j \in \mathbb{N})$, $c_j(k) \to 1$ при $k \to \infty$ і

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j(k) z^j}{j!} A^j x = \left(I + \frac{zA}{k}\right)^k x. \tag{18}$$

Позначимо через $S_n(k, z)x$ частинну суму ряду з (18):

$$S_n(k, z)x = \sum_{j=0}^{n} \frac{c_j(k) z^j}{j!} A^j x.$$

Очевидно, що

$$\|S_{n+m}(k, z)x - S_n(k, z)x\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{c_j(k) z^j}{j!} A^j x \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{c_j(k) |z|^j}{j!} \left\|A^j x\right\| \leq \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{|z|^j \left\|A^j x\right\|}{j!}.$$

Оскільки x — цілий вектор оператора A, то $\sum_{j=n+1}^{n+m} \dfrac{|z|^j \left\|A^j x\right\|}{j!} \to 0$ при $n \to \infty$, а тому

$$\left\|S_{n+m}(k, z)x - S_n(k, z)x\right\| \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Рівномірна відносно $k \in \mathbb{N}$ та $z \in K$ збіжність ряду в (18) дозволяє перейти до границі при $k \to \infty$ під знаком суми цього ряду, внаслідок чого одержуємо

$$\lim_{n \to \infty} \left(I + \frac{zA}{n}\right)^n x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} A^j x = \exp(zA)x.$$

Нехай тепер послідовність $\left(I + \dfrac{zA}{n}\right)^n x$ $(n \in \mathbb{N},\ x \in \mathfrak{B}^{\infty})$ збігається в $\mathfrak{B}$ при $z = t < 0$ (t є фіксованим). Тоді

$$\exists M_t > 0 \colon \left\| \left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x \right\| \leq M_t.$$

Оскільки $\left\{e^{tA}\right\}_{t \geq 0}$ — півгрупа стиску, то

$$\forall k, n \in \mathbb{N} \colon \left\| \left(I + \frac{tA}{n}\right)^{-k} \right\| \leq 1$$

при $t < 0$, а тому для $k \leq n$ маємо

$$\left\|\left(I+\frac{tA}{n}\right)^k x\right\| = \left\|\left(I+\frac{tA}{n}\right)^{k-n}\left(I+\frac{tA}{n}\right)^n x\right\| \leq \left\|\left(I+\frac{tA}{n}\right)^n x\right\| \leq M_t.$$

Звідси

$$\left\|\left(\frac{tA}{n}\right)^n x\right\| = \left\|\left(\left(I+\frac{tA}{n}\right)-I\right)^n x\right\| =$$

$$= \left\|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\left(I+\frac{tA}{n}\right)^k x\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k M_t = 2^n M_t,$$

а отже,

$$\forall n\in\mathbb{N}\colon\ \|A^n x\| \leq M_t\left(\frac{2}{|t|}\right)^n n^n.$$

З формули Стірлінга і того, що $t<0$ може бути яким завгодно, одержуємо

$$\forall \alpha>0 \quad \exists c=c(\alpha)\colon\ \|A^n x\| \leq c\alpha^n n!,$$

тобто $x\in\mathfrak{G}_{(1)}$.

Теорему 10 доведено.

Тепер підтвердимо, що гіпотеза Хілле, яка стверджує, що „навіть при $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}(A^n)$ границя $\lim_{n\to\infty}\left(I+\dfrac{tA}{n}\right)^n x$ може не існувати" є істинною, і, більш того, наведемо приклади аналітичних півгруп, для яких ця границя не існує навіть на просторах усіх аналітичних векторів генераторів цих півгруп.

Отже, розглянемо півгрупу $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$, де $A=A^*$, $A=-B$, B — додатний оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$. Неважко переконатись, що вектори вигляду $x=e^{-B}g$, $g\in\mathfrak{H}$, є аналітичними для оператора A. Доведемо, що існують такі вектори $g\in\mathfrak{H}$, що для $x=e^{-B}g$

$$\left\|\left(I+\frac{tA}{n}\right)^n x\right\| = \left\|\left(I-\frac{tB}{n}\right)^n x\right\| \to\infty \qquad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Нехай E_λ — спектральна функція оператора B. Тоді

$$\left\|\left(I-\frac{tB}{n}\right)^n x\right\|^2 = \int\limits_0^\infty\left(1-\frac{t\lambda}{n}\right)^{2n} d(E_\lambda x,x) \geq \int\limits_n^{2n}\left(1-\frac{t\lambda}{n}\right)^{2n} d(E_\lambda x,x).$$

Оскільки

$$\forall t>1 \quad \forall\lambda\in[n,2n]\colon\ \left(1-\frac{1}{t}\right)^{2n}\left(\frac{t\lambda}{n}\right)^{2n} \leq \left(1-\frac{t\lambda}{n}\right)^{2n},$$

то для довільного $x=e^{-B}g$, $g\in\mathfrak{H}$, маємо

$$\left\|\left(I-\frac{tB}{n}\right)^n x\right\|^2 \geq \int\limits_n^{2n}\left(I-\frac{t\lambda}{n}\right)^{2n} d(E_\lambda x,x) \geq \left(1-\frac{1}{t}\right)^{2n}\int\limits_n^{2n}\left(\frac{t\lambda}{n}\right)^{2n} e^{-2\lambda}\, d(E_\lambda g,g).$$

Враховуючи, що функція $\varphi_n(\lambda) = \left(\dfrac{t\lambda}{n}\right)^{2n} e^{-2\lambda}$ монотонно спадає на (n, ∞) і $\varphi_n(2n) = \left(\dfrac{2t}{e^2}\right)^{2n}$, і підбираючи $g \in \mathfrak{H}$ так, щоб $\displaystyle\int_n^{2n} d(E_\lambda g, g) > \frac{1}{n^2}$, одержуємо

$$\forall t > 10\colon\ \left\|\left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x\right\|^2 = \left\|\left(I - \frac{tB}{n}\right)^n x\right\|^2 \geq \frac{1}{n^2}\left(\frac{18}{e^2}\right)^{2n} \to \infty \qquad \text{при} \quad n \to \infty,$$

що й потрібно було довести.

7. Застосування до розв'язування задачі Коші для абстрактного параболічного рівняння. З огляду на застосування зазначений вище результат насправді вказує шлях побудови C_0-півгрупи $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ за її генератором A, тому що розв'язок задачі Коші

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), \quad t \in (0, \infty),$$
$$y(0) = x \in \mathfrak{B}$$

записується у вигляді $y(t) = U(t)x$, якщо ця проблема поставлена коректно. Є кілька підходів до такої побудови. Вкажемо два з них:

a) $U(t)x = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{tA}{n}\right)^{-n} x$, $x \in \mathfrak{B}$ (Ейлер – Хілле);

b) $U(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$, $e^{tA_\lambda}x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{k!} A_\lambda^k x$, $x \in \mathfrak{B}$, де оператор $A_\lambda = \lambda^2 R_\lambda(A) - \lambda I$ обмежений і $A_\lambda \to A$ при $\lambda \to \infty$ (Іосіда).

В усіх тих підходах C_0-півгрупа $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ відновлюється не безпосередньо за її генератором A, а за деякими функціями від нього, такими, наприклад, як резольвента $R_\lambda(A)$ (в a)) або наближення A_λ (в b)), відшукання яких часто-густо є нетривіальним. Головною перевагою підходу, запропонованого в теоремах 9, 10, є те, що розв'язки наведеної вище задачі Коші з початковими даними x — цілими векторами оператора A — можна записати за допомогою степенів цього оператора. За твердженням 4 множина $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ є щільною в $\mathfrak{B}$, якщо півгрупа $\left\{U(t) = e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є аналітичною, тобто розглядуване рівняння є абстрактним параболічним. Тому для довільного $x \in \mathfrak{B}$ існує послідовність $\{x_n \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, така, що

$$\forall t \in [0, \infty)\colon\ U(t)x_n \to U(t)x \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Більш того, ця збіжність є рівномірною на $[0, \infty)$ і точний розв'язок задачі Коші може бути зображений у вигляді

$$y(t) = U(t)x = \lim_{n\to\infty} U(t)x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x_n.$$

У випадку, коли $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, ми розглядаємо вектор-функцію

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k x$$

як наближений розв'язок цієї задачі. Беручи до уваги, що

$$\forall\alpha > 0 \quad \exists c_\alpha > 0\colon\ \|A^n x\| \le c_\alpha \alpha^n n!,$$

одержуємо

$$\|y(t) - y_n(t)\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\|A^k x\| \le c_\alpha \sum_{k=n+1}^{\infty} t^k \alpha^k = c_\alpha (t\alpha)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} (t\alpha)^k.$$

Виберемо α так, щоб $t\alpha \le \dfrac{1}{2}$. Тоді

$$\|y(t) - y_n(t)\| \le c_\alpha 2^{-n}.$$

Крім того, $y_n(0) = x$.

Таким чином, $y_n(t)$ — наближений розв'язок розглядуваної задачі Коші на $\left[0, \dfrac{1}{2\alpha}\right]$. Оскільки α може набувати довільного значення з $(0,\infty)$, то вектор-функція $y_n(t)$ є наближеним розв'язком цієї задачі на кожному інтервалі $[0,b]$, $0 \le b < \infty$. Для відхилу $y_n'(t) - Ay_n(t)$ на цьому інтервалі маємо

$$\|y_n'(t) - Ay_n(t)\| \le \left\|\frac{t^n}{n!}A^{n+1}x\right\| \le c_\alpha (n+1) t^n \alpha^{n+1} = \alpha c_\alpha (n+1) 2^{-n}.$$

Розглянемо тепер випадок, коли x — будь-який вектор з $\mathfrak{B}$. Має місце таке твердження.

Теорема 11. *Нехай A — генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{U(t) = e^{tA}\right\}_{t\ge 0}$, а $y(t)$ — розв'язок задачі Коші з $x \in \mathfrak{B}$. Тоді*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \forall b > 0 \quad \exists n, m \in \mathbb{N}\colon\ \left\|y(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k x_m\right\| < \varepsilon, \quad t \in [0,b].$$

Доведення. Оскільки $\overline{\mathfrak{G}_{(1)}(A)} = \mathfrak{B}$, то для довільного $x \in \mathfrak{B}$ існує $x_m \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, $m \in \mathbb{N}$, таке, що

$$\|x - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді для $t \in [0,\infty)$

$$\left\|y(t) - e^{tA}x_m\right\| \le \|x - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

З рівномірної збіжності ряду $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{k!} A^k x_m$ випливає існування такого $n \in \mathbb{N}$, що

$$\sup_{t\in[0,b]} \left\|e^{tA}x_m - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k x_m\right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

звідки

$$\sup_{t\in[0,b]} \left\|y(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k x_m\right\| \le$$

$$\le \sup_{t\in[0,b]} \left\|y(t) - e^{tA}x_m\right\| + \sup_{t\in[0,b]} \left\|e^{tA}x_m - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k x_m\right\| < \varepsilon.$$

Теорему 11 доведено.

Зауважимо, що на основі теореми 10 неважко довести, що розв'язок сформульованої вище задачі Коші може бути наближений вектор-функціями

$$y_{nm}(t) = \left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x_m, \quad x_m \in \mathfrak{G}_{(1)}(A).$$

8. Питання щільності просторів гладких векторів замкненого оператора. Введення локально-опуклих просторів гладких та узагальнених векторів замкненого оператора у банаховому просторі пов'язане з необхідністю розв'язання конкретних задач, які не допускали розв'язання в рамках теорії банахових просторів. Для деяких операторів, таких як, наприклад, диференціювання або множення на незалежну змінну, ці простори були побудовані, головним чином, у першій половині XX століття (простори Жевре, Адамара, Л. Шварца, Гельфанда і Шилова та ін.). Їх побудова для різних класів абстрактних замкнених операторів припадає на другу половину того самого століття. Однією з основних задач, що тут виникає, є доведення нетривіальності цих просторів, а точніше, їх щільності у вихідному просторі, в якому задано оператор. Особливий інтерес у цьому напрямку викликає робота Нельсона [17], де для замкненого оператора у гільбертовому просторі визначено простір аналітичних векторів і доведено таке твердження.

Теорема 12. *Самоспряженість замкненого симетричного оператора A у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ рівносильна щільності в $\mathfrak{H}$ простору аналітичних векторів цього оператора:* $\overline{\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)} = \mathfrak{H}$.

Зазначений результат спричинив потік різноманітних узагальнень фахівцями зі спектральної теорії операторів. Так, для напівобмеженого замкненого оператора A в $\mathfrak{H}$ було встановлено (див. [22]) еквівалентність самоспряженості A і щільності $\mathfrak{G}_{\{2\}}(A)$ в $\mathfrak{H}$; для замкненого секторіального оператора A з числовою областю в секторі $\left\{z \in \mathbb{C}\colon\, |\arg z| < \alpha\frac{\pi}{2},\ 0 \le \alpha \le 1\right\}$ — рівносильність його максимальної секторіальності зі щільністю в $\mathfrak{H}$ простору $\mathfrak{G}_{\{2-\alpha\}}(A)$ (див. [23]). Детальніше про застосування цих результатів див. у [24]. Що ж до щільності деяких просторів гладких векторів оператора $A \in E(\mathfrak{B})$, то тут основна увага була приділена операторам, які генерують деякі класи C_0-півгруп у банаховому просторі $\mathfrak{B}$. Ще у 1939 р. Гельфанд [10] довів щільність множини всіх аналітичних векторів генератора обмеженої C_0-групи в $\mathfrak{B}$ і показав як побудувати таку групу безпосередньо за її генератором. Для довільної C_0-групи у банаховому просторі в [11] доведено щільність у $\mathfrak{B}$ просторів $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ з $\beta > 0$, а також показано, що існують C_0-групи, для яких $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \{0\}$, але за умови неквазіаналітичності групи, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left\|e^{tA}\right\|}{1+t^2}\, dt < \infty,$$

простір $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ є щільним у $\mathfrak{B}$. У 1972 р. Білс [25] навів умови на оператор $A \in E(\mathfrak{B})$ в термінах поведінки його резольвенти, достатні для того, щоб $\overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)} = \mathfrak{B}$ $(\beta > 1)$. Зокрема, ці умови задовольняють генератори C_0-півгруп. У роботі [26] наведено умови на резольвенту оператора A, за яких $\overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)} = \mathfrak{B}$ при $\beta \ge 0$, звідки, як наслідок, випливає, що для аналітичної півгрупи з кутом аналітичності θ рівність $\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}$ виконується при $\beta > 1 - \dfrac{2\theta}{\pi}$.

Варто зазначити, що простір $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ цілих векторів експоненціального типу оператора $A \in E(\mathfrak{B})$ відіграє важливу роль у теорії наближень. Він є джерелом для наближення тригонометричними і алгебраїчними поліномами, цілими функціями експоненціального типу, кореневими векторами компактного оператора тощо. Доведення його щільності є певною мірою узагальненням класичних теорем Вейєрштрасса про можливість наближення неперервних (неперервних періодичних) функцій алгебраїчними (тригонометричними) многочленами. Для обмеженої C_0-групи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ щільність $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ у цьому просторі було доведено в [19] і, як зазначалось вище, результат був поширений на довільні неквазіаналітичні C_0-групи. Що стосується аналітичних C_0-півгруп, то, як показано в [27], серед них існують півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ з кутом аналітичності $\dfrac{\pi}{2}$, для яких $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)=\{0\}$. Але якщо

$$\int\limits_0^1 \ln\ln M(s)\,ds<\infty, \qquad M(s)=\sup_{\mathrm{Im}\lambda\geq s}\|R_\lambda(A)\|\,,$$

то $\overline{\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)}=\mathfrak{B}$.

9. Структура розв’язків диференціально-операторних рівнянь всередині інтервалу та їх поведінка при наближенні до його кінців. Однією з основних у теорії диференціальних рівнянь є проблема опису всіх розв’язків рівняння всередині області та їх дослідження при наближенні до межі. Для звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами ця проблема була розв’язана у XVIII столітті і її розв’язок часто-густо використовується при постановці різноманітних задач для таких рівнянь. Що стосується рівнянь із частинними похідними, то її розв’язання ще далеко не завершене навіть для рівнянь класичної математичної фізики.

В роботі [28] зазначена проблема досліджується для рівняння

$$\left(\frac{d}{dt}-A\right)^n\left(\frac{d}{dt}+A\right)^m y(t)=0, \qquad t\in\mathcal{I}, \quad n,m\in\mathbb{N}_0, \quad n+m\geq 1, \tag{19}$$

де $\mathcal{I}=(0,\infty)$ або $(-\infty,\infty)$, A — генератор аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ у банаховому просторі $\mathfrak{B}$. Варто зазначити, що конкретні реалізації простору $\mathfrak{B}$, оператора A та $m,\ n$ у рівнянні (19) містять у собі чимало класів рівнянь із частинними похідними в різних функціональних просторах. Зауважимо, що випадки $n=1,\ m=0$ та $n=m=1$ за умови, що A — напівобмежений зверху самоспряжений оператор у гільбертовому просторі, розглянуто в [29] і в [30, 31], коли A — генератор обмеженої аналітичної півгрупи у банаховому просторі. Перш ніж перейти до викладу основних результатів для рівняння (19), продемонструємо їх на рівнянні

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-A^2\right)y(t)=0, \tag{20}$$

де $A\in E(\mathfrak{B})$, і покажемо, які труднощі виникають при відшуканні зображення його загального розв’язку всередині інтервалу $(0,\infty)$.

Формально довільний розв’язок рівняння (20) має вигляд

$$y(t)=\exp(tA)f_1+\frac{\sinh(tA)}{A}f_2, \tag{21}$$

де $f_1,\ f_2$ — довільні вектори з $\mathfrak{B}$. Щоб надати сенс цьому виразу, потрібно з’ясувати, що саме розуміється під $\exp(tA)$ та $\dfrac{\sinh(tA)}{A}$ і яку множину F мають перебігати вектори $f_1,\ f_2$, щоб одержати всі розв’язки на інтервалі $(0,\infty)$.

Якщо $A \in L(\mathfrak{B})$, то $\exp(tA)$ і $\dfrac{\sinh(tA)}{A}$ можна визначити, наприклад, за допомогою рядів

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \qquad \text{та} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} A^{2k}}{(2k+1)!},$$

які збігаються рівномірно на довільному компакті $K \in \mathbb{C}$. Тоді неважко довести, що загальний розв'язок рівняння (20) задається формулою (21), де $f_1, f_2 \in \mathfrak{B}$.

Якщо ж A не обмежений, то побудова цих функцій від оператора A у загальному випадку не розв'язана ще й понині. Це по-перше. А по-друге, якщо навіть у деяких випадках можна визначити зазначені функції від оператора A, то немає гарантії, що вираз (21) з $f_1, f_2 \in \mathfrak{B}$ дасть усі розв'язки рівняння (20). Іноді множина F є вужчою за $\mathfrak{B}$, а іноді потрібно вийти за межі простору $\mathfrak{B}$.

Випадок, коли в рівнянні (20) A^2 — самоспряжене розширення мінімального оператора, породженого у просторі $L_2(a,b)$ виразом $\dfrac{d^2}{dx^2}$, уперше був розглянутий Даламбером, Ейлером та Д. Бернуллі ще в середині XVIII століття при описі розв'язків рівняння коливання струни. Вже тоді постало питання про те, як визначити відповідні функції від оператора A (формулою Даламбера або тригонометричним рядом Д. Бернуллі) і що потрібно взяти за множину F. Це питання упродовж тривалого часу дискутувалось багатьма математиками, що привело до виникнення важливих понять аналізу, таких як, наприклад, функція, збіжність, інтеграл тощо, і розвитку нових розділів математики — спектральної теорії операторів, теорії півгруп.

Іншим відомим прикладом, що привернув до себе велику увагу, було рівняння Лапласа $\Bigg($частинний випадок (20), коли за A^2 береться самоспряжене розширення мінімального оператора, породженого у просторі $L_2(a,b)$ диференціальним виразом $-\dfrac{d^2}{dx^2}\Bigg)$, для якого питання зображення загального розв'язку по суті еквівалентне можливості зображення довільної гармонічної (аналітичної) у відкритій області функції інтегралом Пуассона (Коші). Оскільки не кожна така функція має граничне значення у звичайному розумінні або в L_p, то стало зрозуміло, що множина F повинна бути ширшою за простір неперервних функцій або L_p. Пошуки цієї множини привели до появи таких понять, як класи Гарді та гіперфункція.

Спочатку сформулюємо основні результати для рівняння (19) на інтервалі $(0,\infty)$. Вектор-функція $y(t)\colon\ (0,\infty) \mapsto \mathcal{D}(A^{n+m})$ називається розв'язком рівняння (19) на інтервалі $(0,\infty)$, якщо вона є $n+m$ разів неперервно диференційовною на цьому інтервалі і задовольняє там це рівняння. Зауважимо, що жодні умови на її поведінку в околі нуля не накладаються. В роботі [28] встановлено таку теорему.

Теорема 13. *Нехай A — генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ і $0 \in \rho(A)$. Вектор-функція $y(t)$ є розв'язком рівняння* (19) *на $(0,\infty)$ тоді і тільки тоді, коли вона допускає зображення*

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k \widehat{U}(t) f_k + \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA) g_k, \tag{22}$$

де $\widehat{U}(t)$ визначено в теоремі 5, *$f_k \in \mathfrak{B}_{(-)}$, $g_k \in \mathfrak{B}_{(+)}$.*

З теореми 13, зображення (22) та наслідку 2 випливають такі твердження.

***Наслідок* 4.** *Будь-який розв'язок рівняння* (19) *на інтервалі* $(0,\infty)$ *є аналітичною вектор-функцією зі значеннями в* $\mathfrak{B}_{\{+\}}$.

***Наслідок* 5.** *Кожний розв'язок рівняння* (19) *на інтервалі* $(0,\infty)$ *і його похідні довільного порядку мають граничні значення у просторі* $\mathfrak{B}_{(-)}$.

Природно постає питання: за яких умов на розв'язок $y(t)$ рівняння (19) на інтервалі $(0,\infty)$ усі $f_k,\ k=0,1,\ldots,n-1$, в його зображенні (22) належать вихідному простору $\mathfrak{B}$? Відповідь дає наступна теорема.

Теорема 14. *Якщо простір* $\mathfrak{B}$ *є рефлексивним, то вектори* $f_k,\ k=0,1,\ldots,n-1$, *у зображенні* (22) *розв'язку* $y(t)$ *рівняння* (19) *на інтервалі* $(0,\infty)$ *належать простору* $\mathfrak{B}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\left\|\left(\frac{d}{dt}-A\right)^k y(t)\right\|<\infty \qquad \text{при} \quad t\in(0,1), \quad k=0,1,\ldots,n-1. \tag{23}$$

Умова (23) рівносильна існуванню граничних значень вектор-функцій $\left(\dfrac{d}{dt}-A\right)^k y(t),\ k=$ $=0,1,\ldots,n-1$, у просторі $\mathfrak{B}$. У випадку, коли $n=1, m=0$, а простір $\mathfrak{B}$ є рефлексивним, необхідною і достатньою умовою існування граничного значення в точці 0 розв'язку $y(t)$ в $\mathfrak{B}$ є його обмеженість в околі нуля, а отже, неперервність в точці 0. Як показано в [32], це, взагалі кажучи, не так при $n>1$. Наприклад, для бігармонічної функції $\left(A^2=-\dfrac{d^2}{dx^2}\right)$ з обмеженості в середньому квадратичному ще не випливає існування її граничного значення.

Оскільки простір $\mathfrak{B}_{(-)}$ є зліченно-нормованим, що складається із строго вкладених один в одного банахових просторів, то (див. [15]) для довільної монотонно неспадної на $[0,1]$ функції $\gamma(t):\ \gamma(t)\to 0$ при $t\to 0$

$$\exists x\in\mathfrak{B}_{(-)}:\ \ \lim_{t\to 0}\gamma(t)\left\|\widehat{U}(t)x\right\|=\infty,$$

тобто $\left\|\widehat{U}(t)x\right\|\to\infty$ як завгодно швидко. Звідси, а також із зображення (22) і обмеженості $\left\|\sum_{k=0}^{m-1} t^k\exp(-tA)g_k\right\|$ в околі нуля робимо висновок, що існують розв'язки рівняння (19), які при наближенні до точки 0 мають який завгодно порядок зростання. Тому постає питання про те, за яких умов на вектори $f_0,f_1,\ldots,f_{n-1}\in\mathfrak{B}_{(-)}$ розв'язок вигляду $\sum_{k=0}^{n-1} t^k\widehat{U}(t)f_k$ має певний порядок зростання при наближенні до точки 0, точніше, як саме описуються розв'язки рівняння (19) із наперед заданим порядком зростання в околі нуля.

В роботі [29] для $n=1,\ m=0$, а також $n=1,\ m=1$ розглянуто випадок будь-якої особливості в нулі розв'язків рівняння (19), коли оператор $-A$ є додатним самоспряженим у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$. В [30, 31] отримані результати поширено на випадок, коли A — генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи лінійних операторів у банаховому просторі.

Варто зазначити, що теореми 13, 14 дають змогу не тільки одержати як частинний випадок низку класичних результатів, що стосуються опису граничних значень аналітичних і гармонічних функцій (див. [33]), але й у значній мірі їх уточнити і поширити на інші об'єкти, зокрема на розв'язки еліптичних та параболічних рівнянь у функціональних просторах.

Тепер перейдемо до дослідження поведінки на нескінченності розв'язків рівняння (19) на інтервалі $(0,\infty)$. Для цього покладемо

$$s = s(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re} \lambda. \tag{24}$$

Оскільки за припущенням півгрупа $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ є аналітичною і $0 \in \rho(A)$, то $s < 0$, $s = \omega(A)$, де $\omega(A) = \overline{\lim}_{t \to \infty} \dfrac{\ln \|e^{tA}\|}{t}$. Має місце така теорема (див. [16]).

Теорема 15 (аналог теореми Фрагмена – Ліндельофа)**.** *Нехай* $\gamma < -s$ *і* $y(t)$ — *розв'язок рівняння* (19) *на інтервалі* $(0, \infty)$. *Тоді*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln \|y(t)\|}{t} < \gamma \implies \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln \|y(t)\|}{t} < -\gamma.$$

Нагадаємо, що класичний принцип Фрагмена – Ліндельофа для гармонічних функцій полягає в тому, що якщо гармонічна в півсмузі $[0,1] \times (0, \infty)$ функція $u(x,y)$, рівна нулю на частині границі цієї півсмуги, утвореної півпрямими, тобто

$$\forall y > 0\colon\ u(0,y) = u(1,y) = 0,$$

є обмеженою в цій півсмузі, то вона прямує до нуля експоненціально при $y \to \infty$. В роботі [34] цей принцип був поширений на розв'язки $u(x_1, \ldots, x_n, y)$ у півциліндрі $D_0 \times (0, \infty)$ (D_0 — обмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$) рівняння $Lu = 0$, де L — еліптичний оператор будь-якого порядку з незалежними від y коефіцієнтами, які задовольняють нульові граничні умови на частині границі, що міститься у півпросторі $y > 0$. Теорема 14 також дає змогу значно розширити клас диференціальних рівнянь і тип граничних умов, на які можна поширити зазначений принцип.

Розглянемо тепер рівняння (19) на всій осі $(-\infty, \infty)$.

Теорема 16. *Нехай* A — *генератор обмеженої аналітичної* C_0-*групи і* $0 \in \rho(A)$. *Вектор-функція* $y(t)\colon (-\infty, \infty) \mapsto \mathcal{D}(A^{n+m})$ *є розв'язком рівняння* (19) *на* $(-\infty, \infty)$ *тоді і тільки тоді, коли вона допускає зображення вигляду* (22), *в якому* $f_k, g_k \in \mathfrak{B}_{(+)}$. *Вектори* f_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, *та* g_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, *визначаються однозначно за* $y(t)$.

З цієї теореми випливає такий наслідок.

***Наслідок* 6.** *Будь-який розв'язок рівняння* (19) *на* $(-\infty, \infty)$ *може бути продовжений до цілої вектор-функції у просторі* $\mathfrak{B}_{(+)}$.

Звідси приходимо до висновку, що простір усіх розв'язків рівняння (19) на $(-\infty, \infty)$ є нескінченновимірним і для них здійснюється аналог принципу Фрагмена – Ліндельофа.

Теорема 17. *Нехай* $y(t)$ — *розв'язок рівняння* (19) *на* $(-\infty, \infty)$. *Якщо існують число* $\gamma \in (0, -s)$ (s *визначається формулою* (24)) *і стала* $c = c(\gamma)$ *такі, що*

$$\forall t \in (-\infty, \infty)\colon\ \ \|y(t)\| \leq c e^{\gamma |t|},$$

то $y(t) \equiv 0$.

***Наслідок* 7** (аналог теореми Ліувілля)**.** *Припустимо, що* $y(t)$ — *розв'язок рівняння* (19) *на* $(-\infty, \infty)$. *Тоді*

$$\sup_{t \in (-\infty, \infty)} \|y(t)\| < \infty \implies y(t) \equiv 0.$$

Зауважимо, що випадки $n = 1$, $m = 0$; $n = 0$, $m = 1$; $n = m > 1$ розглянуто в [35].

10. Про аналітичні розв'язки диференціально-операторних рівнянь у банаховому просторі. Нехай $A \in E(\mathfrak{B})$. Розглянемо задачу Коші

$$\begin{aligned} &\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), \quad t \in (0, \infty), \\ &y(0) = y_0 \in \mathfrak{B}. \end{aligned} \tag{25}$$

Вектор-функцію $y(t)\colon \mathbb{R}^+ = [0, \infty) \mapsto \mathcal{D}(A)$ назвемо сильним розв'язком задачі (25), якщо $y(t) \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathfrak{B})$ і задовольняє (25). У випадку, коли $A \in L(\mathfrak{B})$, задача (25) є однозначно розв'язною для будь-якого $y_0 \in \mathfrak{B}$ і її розв'язок

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k y_0}{k!} \tag{26}$$

є цілою $\mathfrak{B}$-значною вектор-функцією експоненціального типу. Це, взагалі кажучи, не так, коли A належить $E(\mathfrak{B})$. У зв'язку з цим виникає потреба описати всі початкові дані y_0, для яких відповідні розв'язки належать до певного класу з множини $\mathfrak{A}_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{B})$ всіх аналітичних в околі нуля $\mathfrak{B}$-значних функцій (окіл залежить від функції). При цьому збіжність в $\mathfrak{A}_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{B})$ послідовності $\{x_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}}$ до вектор-функції $x(\lambda)$ означає, що існує окіл нуля U, в якому всі вектор-функції $x_n(\lambda)$ є аналітичними, і $\|x_n(\lambda) - x(\lambda)\| \to 0$, $n \to \infty$, рівномірно на кожному компакті $K \subset U$. Через $\mathfrak{A}_c(\mathfrak{B})$ позначимо множину всіх цілих вектор-функцій із значеннями в $\mathfrak{B}$. Під збіжністю в $\mathfrak{A}_c(\mathfrak{B})$ розуміється збіжність в $\mathfrak{A}_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{B})$ з тією лише відмінністю, що спільним околом аналітичності для всіх $x_n(\lambda)$ повинна бути вся комплексна площина $\mathbb{C}$. Символом $\mathfrak{A}_e(\mathfrak{B})$ позначатимемо підмножину з $\mathfrak{A}_c(\mathfrak{B})$ усіх цілих вектор-функцій експоненціального типу. Збіжність в $\mathfrak{A}_e(\mathfrak{B})$ — це збіжність в $\mathfrak{A}_c(\mathfrak{B})$ з додатковою умовою обмеженості послідовності типів усіх $x_n(\lambda)$.

Нагадаємо, що ціла вектор-функція $y(\lambda)$ має скінченний порядок, якщо існує таке число $k \in (0, \infty)$, що $\|y(\lambda)\| \le \exp\left(|\lambda|^k\right)$ при достатньо великих $|\lambda|$. Точна нижня межа $p = p(y)$ множини таких k називається порядком $y(\lambda)$. Говорять, що ціла вектор-функція $y(\lambda)$ порядку p має скінченний тип, якщо при достатньо великих $|\lambda|$ виконується нерівність $\|y(\lambda)\| \le$ $\le \exp\left(\gamma|\lambda|^p\right)$ з деяким $\gamma \in (0, \infty)$. Точна нижня межа таких γ називається її типом. Ціла вектор-функція $y(\lambda)$, що має порядок $p < 1$ або $p = 1$ і скінченний тип, називається цілою вектор-функцією експоненціального типу. Тип $s = s(y)$ цілої вектор-функції експоненціального типу, на відміну від загального випадку, обчислюється за формулою

$$s = \overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} \frac{\ln\|y(\lambda)\|}{|\lambda|}.$$

Отже, у випадку $p < 1$ тип такої функції завжди вважається рівним нулеві, тоді як при $p = 1$ його значення обчислюється так само, як у загальному випадку.

Задачу Коші (25) назвемо локально розв'язною в класі аналітичних вектор-функцій, якщо існує вектор-функція $y(t)$ з класу $\mathfrak{A}_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{B})$, яка є розв'язком цієї задачі на проміжку $[0, b]$ з деяким $b > 0$. Як показано в [35], має місце таке твердження.

Теорема 18. *Задача* (25) *є однозначно локально розв'язною в класі аналітичних вектор-функцій тоді і тільки тоді, коли* $y_0 \in \mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$. *Якщо ця умова виконується, то розв'язок* $y(t)$ *має вигляд* (26). *Більш того, за цієї умови задача* (25) *є не лише розв'язною, але й коректно* *розв'язною в тому розумінні, що збіжність* $y_0^i \to y_0,\ i \to \infty$, *послідовності* $\{y_0^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *початкових даних у просторі* $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$ *зумовлює збіжність послідовності* $\{y_i(t)\}_{i\in\mathbb{N}}$ *відповідних розв'язків задачі до* $y(t)$ *у просторі* $\mathfrak{A}_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{B})$. *Для існування розв'язку задачі* (25) *в* $\mathfrak{A}_c(\mathfrak{B})$ *необхідно і достатньо, щоб* $y_0 \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, *причому збіжність* $y_0^i \to y_0,\ i \to \infty$, *в* $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ *зумовлює збіжність послідовності* $\{y_i(t)\}_{i\in\mathbb{N}}$ *до* $y(t)$ *у просторі* $\mathfrak{A}_c(\mathfrak{B})$.

З'ясуємо тепер, за яких умов розв'язок задачі (25) належить до класу цілих вектор-функцій скінченного порядку й скінченного типу.

Будемо говорити, що цілий вектор x оператора A має скінченний порядок, якщо

$$\exists\gamma \in (-\infty, 1)\colon\ \|A^n x\| \le n^{n\gamma}$$

для достатньо великих $n > n_0(\gamma)$. Точну нижню межу $\rho = \rho(x)$ таких γ назвемо порядком вектора x. Цілий вектор x оператора A порядку $\rho > 0$ має, за означенням, скінченний тип $\sigma = \sigma(x)$, якщо

$$\exists\alpha > 0\colon\ \|A^n x\| \le \alpha^n n^{\rho} \qquad \text{при} \quad n > n_0(\alpha)$$

($n_0(\alpha)$ достатньо велике). Точну нижню межу таких α назвемо типом вектора x порядку ρ. Має місце така теорема (див. [35]).

Теорема 19. *Задача* (25) *є розв'язною в класі цілих вектор-функцій скінченного порядку* $p \ge 1$ *і скінченного типу* s *тоді і тільки тоді, коли порядок* ρ *і тип* σ *вектора* y_0 *є скінченними, причому порядки і типи розв'язку* $y(t)$ *та його початкового значення* y_0 *пов'язані між собою формулами*

$$p = \frac{1}{1-\rho}, \qquad s = \frac{(\sigma e)^p}{ep}. \tag{27}$$

Для того щоб задача (25) *мала розв'язок у класі цілих вектор-функцій експоненціального типу, необхідно і достатньо, щоб* y_0 *був цілим вектором експоненціального типу оператора* A, *до того ж тип* s *розв'язку* $y(t)$ *збігається з типом* σ *вектора* y_0.

Теорема 19 показує, що існування нетривіального розв'язку рівняння (25) у класі цілих вектор-функцій скінченного порядку p і скінченного типу s рівносильне співвідношенню $\mathfrak{G}_{\{\rho\}}(A) \ne \{0\}$($\rho$ визначається за формулою (27)).

Проте існують такі оператори A, для яких $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$, а отже, і $\mathfrak{G}_{\{\rho\}}(A)$ з $\rho < 1$ складаються лише з нульового вектора, і серед них є навіть генератори C_0-півгруп, наприклад, $A = iC$, де C — простий максимальний симетричний оператор у гільбертовому просторі. Для цих півгруп задача (25) є рівномірно коректною, тобто однозначно розв'язною для $y_0 \in \mathcal{D}(A)$ і такою, що якщо $y_0^i \to 0,\ i \to \infty$, в $\mathfrak{B}$, то $\|y_i(t)\| \to 0$ рівномірно на кожному компакті $K \subset \mathbb{R}^+$ ($y_i(t)$ — розв'язок, що відповідає початковому значенню y_0^i). Таким чином, задача (25) може бути рівномірно коректною, тоді як розглядуване в ній рівняння не матиме жодного нетривіального аналітичного в околі нуля розв'язку. Трапляються й протилежні випадки, коли задача (25) не є рівномірно коректною, а будь-який розв'язок зазначеного рівняння є аналітичним в околі нуля, тобто відповідна задача Коші є локально розв'язною в класі аналітичних вектор-функцій, і навіть, більш того, вона є коректною в сенсі теореми 18. Це відбувається, наприклад, тоді, коли оператор $-A$ генерує аналітичну C_0-півгрупу. Справа в тім, що у визначенні рівномірної коректності $\mathcal{D}(A)$ не є повним нормованим простором відносно збіжності в $\mathfrak{B}$, на відміну від теореми 19, де простір початкових даних є повним відносно фігуруючої там збіжності.

Позначимо через S множину всіх розв'язків рівняння в (25), а через S_p, $1 \leq p < \infty$, — ту її частину, яка складається з розв'язків, кожен з яких допускає продовження до цілої вектор-функції порядку не вище p і скінченного типу. Природно виникає питання про те, за яких умов на оператор A множина S_p є щільною в S в тому розумінні, що для довільного розв'язку $y(t)$ цього рівняння існує послідовність $\{y_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ розв'язків з S_p така, що $\|y(t) - y_n(t)\| \to 0$, $n \to \infty$, рівномірно на кожному компакті $K \in \mathbb{R}^+$. Щодо сформульованого питання має місце така теорема.

Теорема 20. *Нехай A — генератор аналітичної C_0-півгрупи в $\mathfrak{B}$ з кутом аналітичності $\theta \leq \dfrac{\pi}{2}$. Тоді при $p > \dfrac{\pi}{2\theta}$ множина S_p є щільною в S. Що ж до множини S_1, то існують аналітичні C_0-півгрупи з кутом $\dfrac{\pi}{2}$, для яких $S_1 = \{0\}$.*

Теорема 18 дає змогу розглянути з операторної точки зору питання про локальну аналітичну розв'язність задачі Коші для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними, коефіцієнти яких так само, як і початкові дані, є аналітичними функціями. Ще С. Ковалевська (див., наприклад, [36]) показала, що для таких систем, на відміну від випадку звичайних диференціальних рівнянь, зазначена розв'язність не завжди можлива. Нею було знайдено клас локально розв'язних у класі аналітичних вектор-функцій систем (так званих систем Ковалевської). Виявляється, що задачу Коші для системи Ковалевської з коефіцієнтами, не залежними від часу, можна записати у вигляді (25), де роль A відіграє диференціальний оператор першого порядку з аналітичними коефіцієнтами, для якого аналітичні функції є його аналітичними векторами. Тому теорему Ковалевської у цьому випадку можна розглядати як наслідок теореми 18 (її достатньої частини) при $n = 1$. Що ж до систем, які не належать до згаданого вище класу, то приклад Ковалевської

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},$$

$$u(0,x) = \frac{1}{1-x}$$

демонструє, що теорема Ковалевської, взагалі кажучи, для них не має місця. Хоча початкова функція $\dfrac{1}{1-x}$ у прикладі і є аналітичною в околі нуля, але вона не є аналітичним вектором для оператора A — максимального оператора, породженого у просторі $C([-a,a])$, $0 < a < 1$, виразом $\dfrac{d^2}{dx^2}$, тобто не виконується необхідна частина теореми 18. В цьому випадку простір аналітичних векторів оператора A збігається з множиною цілих функцій порядку не вище 2 (див. [37]).

11. Поведінка на нескінченності розв'язків абстрактних параболічних рівнянь. Розглянемо рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), \quad t \in [0,\infty), \tag{28}$$

де $A \in E(\mathfrak{B})\colon \overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{B}$.

Вектор-функція $y(t)\colon [0,\infty) \mapsto \mathfrak{B}$ називається слабким розв'язком рівняння (28), якщо $y(t) \in C([0,\infty),\mathfrak{B})$ і

$$\forall t \in [0,\infty)\colon \int_0^t y(s)\,ds \in \mathcal{D}(A) \qquad \text{і} \qquad y(t) - y(0) = A\int_0^t y(s)\,ds.$$

Слабкий розв'язок $y(t)$ рівняння (28) є сильним тоді і тільки тоді, коли $y(t) \in C^1([0,\infty), \mathfrak{B})$.

Якщо A — генератор C_0-півгрупи в $\mathfrak{B}$, то, як показано в [38], множина всіх слабких розв'язків рівняння (28) описується формулою

$$y(t) = e^{tA} y_0 \quad \forall y_0 \in \mathfrak{B}. \tag{29}$$

За умови, що вектор y_0 перебігає множину $\mathcal{D}(A)$, вираз (29) дає всі сильні розв'язки цього рівняння.

Будемо говорити, що рівняння (28) є рівномірно стійким, якщо

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \tag{30}$$

і рівномірно експоненціально стійким, якщо

$$\exists \omega > 0\colon \ \lim_{t\to\infty} e^{\omega t} y(t) = 0 \tag{31}$$

для довільного слабкого розв'язку $y(t)$ цього рівняння.

У випадку скінченновимірного $\mathfrak{B}$ рівномірна й експоненціальна стійкості рівняння (28) еквівалентні. Це, взагалі кажучи, не так, якщо $\dim \mathfrak{B} = \infty$. В [39] доведено таке твердження.

Теорема 21. *Для того щоб рівняння* (28) *було рівномірно стійким, необхідно, щоб* $0 \in \sigma_c(A) \bigcup \rho(A)$. *Якщо це рівняння рівномірно експоненціально стійке, то* $0 \in \rho(A)$. *Якщо ж рівняння* (28) *є рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійким, то* $0 \in \sigma_c(A)$. *У випадку, коли півгрупа* $\left\{e^{tA}\right\}_{t\ge 0}$ *є обмеженою аналітичною, всі сформульовані вище умови також є достатніми.*

Виявляється, що коли рівняння (28) є рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійким, його слабкі розв'язки можуть мати який завгодно порядок прямування до нуля на нескінченності. Точніше, має місце така теорема.

Теорема 22. *Нехай* A — *генератор* C_0*-півгрупи в* $\mathfrak{B}$ *і* $\gamma(t) > 0$ — *неперервна на* $[0,\infty)$ *функція така, що* $\gamma(t) \downarrow 0$ *при* $t \to \infty$. *Якщо*

$$\forall x \in \mathfrak{B} \quad \exists c = c(x) > 0\colon \ \left\|e^{tA} x\right\| \le c\gamma(t), \tag{32}$$

то рівняння (28) *є рівномірно експоненціально стійким. За умови аналітичності півгрупи* $\left\{e^{tA}\right\}_{t\ge 0}$ *достатньо, щоб нерівність* (32) *виконувалась лише на множині* $\mathfrak{B}_{\{+\}}$ *аналітичних векторів оператора* A.

З цієї теореми випливає, що якщо

$$\forall x \in \mathfrak{B} \quad \exists c = c(x) \quad \text{і} \quad \omega_x > 0\colon \ \left\|e^{tA} x\right\| \le c e^{-\omega_x t},$$

то

$$\exists c > 0 \quad \exists \omega > 0\colon \ \left\|e^{tA}\right\| \le c e^{-\omega t},$$

а отже, рівняння (28) є рівномірно експоненціально стійким. Вона також підтверджує, що порядок прямування до нуля на нескінченності слабких розв'язків рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійкого рівняння (28) може бути довільним. Оскільки кожен такий розв'язок однозначно визначається своїм початковим значенням $y(0)$, то постає питання про те, які саме початкові дані відповідають певній швидкості спадання розв'язку на нескінченності. Виявляється, що коли півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\ge 0}$ є обмеженою аналітичною, а рівняння (28) — рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійким, то $0 \in \sigma_c(A)$ (див. теорему 21), тобто існує обернений до A оператор A^{-1}, який, як показано в [40], також генерує аналітичну півгрупу з тим самим, що і в A, кутом аналітичності. В роботі [41] встановлено таке твердження.

Теорема 23. *Нехай A — генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ і $0 \in \sigma_c(A)$. Тоді для слабких розв'язків рівняння* (28) *виконуються такі співвідношення еквівалентності:*

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \lim_{t\to\infty} t^n y(t) = 0 \iff y(0) \in C^{\infty}\left(A^{-1}\right),$$

$$\exists a > 0\colon \lim_{t\to\infty} e^{a\sqrt{t}} y(t) = 0 \iff y(0) \in \mathfrak{B}_{\{+\}}\left(A^{-1}\right),$$

$$\forall a > 0\colon \lim_{t\to\infty} e^{a\sqrt{t}} y(t) = 0 \iff y(0) \in \mathfrak{B}_{(+)}\left(A^{-1}\right),$$

$$\exists a > 0\colon \lim_{t\to\infty} e^{at} y(t) = 0 \iff y(0) \in \mathfrak{G}_{\{0\}}\left(A^{-1}\right)$$

($\mathfrak{G}_{\{0\}}\left(A^{-1}\right)$ — *простір цілих векторів експоненціального типу оператора A^{-1}*).

Література

1. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
2. *Euler L.* Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus // Comment. Acad. Sci. Petropolit. – 1728. – **3**. – P. 124 – 137.
3. *Peano G.* Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari // Atti Reale Acad. Sci. Torino. – 1887. – **22**. – P. 293 – 302.
4. *Nathan D. S.* One-parameter groups of transformations in abstract vector spaces // Duke Math. J. – 1935. – **1**. – P. 518 – 526.
5. *Nagumo M.* Einige analitische Untersuchungen in linearen, metrischen Ringen // Jap. J. Math. – 1936. – **13**. – P. 59 – 80.
6. *Yosida K.* On the group embedded in the metrical complete ring // Jap. J. Math. – 1936. – **13**. – P. 7 – 26.
7. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. – М.: Мир, 1965. – 412 с.
8. *Lagrange J. L.* Nouvelle espèce de calcul // Nouv. Mém. Acad. Rou. Sci. Bell.-Lett. – 1772. – **3**. – P. 185 – 218.
9. *Stone M. H.* On one-parameter unitary groups in Hilbert space // Ann. Math. – 1932. – **33**. – P. 643 – 648.
10. *Гельфанд И. М.* Об однопараметрических группах операторов в нормированном пространстве // Докл. АН СССР. – 1939. – **25**, № 9. – С. 713 – 718.
11. *Горбачук В. М., Горбачук М. Л.* Зображення групи лінійних операторів у банаховому просторі на множині цілих векторів її генератора // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5. – С. 584 – 591.
12. *Хилле Э., Филлипс Р. С.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830 с.
13. *Gorbachuk M. L., Gorbachuk V. M.* The representation of a C_0-semigroup of linear operators in a Banach space on the set of entire vectors of its generator // Integr. Equat. Oper. Theory. – 2016. – **85**, № 4. – P. 497 – 512.
14. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
15. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – Т. 2. – 307 с.
16. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations. – Berlin; New York: Springer, 2000. – 540 p.
17. *Nelson E.* Analytic vectors // Ann. Math. – 1959. – **70**, № 3. – P. 572 – 615.
18. *Goodman R. W.* Analytic and entire vectors for representation of the Lie groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – **143**. – P. 55 – 76.
19. *Радыно Я. В.* Пространство векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. – 1983. – **27**, № 9. – С. 791 – 793.
20. *Gorbachuk V. M.* On solutions of parabolic and elliptic type differential equations on $(-\infty, \infty)$ in a Banach space // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 2. – P. 177 – 183.
21. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978. – 360 с.

22. *Nussbaum A. E.* A note on quasi-analytic vectors // Stud. Math. – 1969. – **33**. – P. 305 – 309.
23. *Koutry A. El.* Vecteurs α-quasi analytiques et semi-groups analytiques // C. r. Acad. sci. Paris. – 1989. – **309**, Ser. 1. – P. 767 – 769.
24. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Гармонический анализ. Самосопряженность. – М.: Мир, 1978. – 395 с.
25. *Beals R.* Semigroups and abstract Gevrey spaces // J. Funct. Anal. – 1972. – **10**, № 3. – P. 300 – 308.
26. *Gorbachuk M. L., Mokrousov Yu. G.* On density of some sets of infinitely differentiable vectors of a closed operator on a Banach space // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2002. – **8**, № 1. – P. 23 – 29.
27. *Горбачук М. Л.* Про аналітичні розв'язки диференціально-операторних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 5. – С. 596 – 607.
28. *Горбачук В. М.* Структура розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на нескінченному інтервалі // Доп. НАН України. – 2016. – № 2. – С. 7 – 12.
29. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные значения решений некоторых классов дифференциальных уравнений // Мат. сб. – 1977. – **101**, № 1. – С. 124 – 150.
30. *Князюк А. В.* Граничные значения решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 9. – С. 12 – 14.
31. *Князюк А. В.* Граничные значения решений эволюционных уравнений в банаховом пространстве: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1985. – 15 с.
32. *Михайлов В. П.* О существовании предельных значений решений полигармонического уравнения на границе области // Мат. сб. – 1996. – **187**, № 11. – С. 89 – 114.
33. *Komatsu H.* Ultradistributions. I // J. Facul. Sci. Univ. Tokyo. – 1973. – **20**, № 1. – P. 25 – 105.
34. *Lax P. D.* A Phragmen – Lindelöf theorem in harmonic analysis and its application to some questions in the theory of elliptic equations // Communs Pure and Appl. Math. – 1957. – **10**. – P. 361 – 389.
35. *Gorbachuk M., Gorbachuk V.* On extensions and restrictions of semigroups of linear operators in a Banach space and their applications // Math. Nachr. – 2012. – **285**, № 14-15. – P. 1860 – 1879.
36. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
37. *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Boundary value problems for operator differential equations. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1991. – 347 p.
38. *Ball J. M.* Strongly continuous semigroups, weak solutions, and the variation of constants formula // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – **63**. – P. 370 – 373.
39. *Горбачук В. М.* Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторных уравнений // ДАН СССР. – 1989. – **308**, № 1. – С. 23 – 28.
40. *Laubenfels R.* Powers of generators of holomorphic semigroups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1987. – **99**. – P. 105 – 108.
41. *Gorbachuk M. L., Gorbachuk V. I.* On behavior at infinity of solutions of parabolic differential equations in a Banach space // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2014. – **20**, № 3. – P. 274 – 283.

Одержано 29.11.16