УДК 517.5

У. З. Грабова, І. В. Кальчук, Т. А. Степанюк (Східноєвроп. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ІЗ КЛАСІВ $W^r_\beta H^\alpha$ ІНТЕГРАЛАМИ ВЕЙЄРШТРАСА

We investigate the asymptotic behavior of the least upper bounds of the approximations of functions from the classes $W^r_\beta H^\alpha$ by Weierstrass integrals in the uniform metric.

Исследовано асимптотическое поведение точных верхних граней приближений функций из классов $W^r_\beta H^\alpha$ интегралами Вейерштрасса в равномерной метрике.

Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається рівністю $\|f\|_L = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

Нехай далі $f \in L$ і її ряд Фур'є має вигляд

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Якщо $r \geq 0$, β — фіксоване дійсне число, а ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то функцію φ називають (r,β)-похідною функції f у сенсі Вейля – Надя і позначають через f^r_β. Множину всіх функцій f, які мають (r,β)-похідну, позначають через W^r_β (див., наприклад, [1], гл. 3, § 6, 7]). При $\beta = r$ похідні Вейля – Надя f^r_β майже скрізь збігаються з похідними в сенсі Вейля f^r_r. Якщо, крім того, $\beta = r$, $r \in \mathbb{N}$, то f^r_β майже скрізь збігаються зі звичайними r-похідними $f^{(r)}$ функції f.

Якщо $f \in W^r_\beta$, і при цьому $f^r_\beta \in H^\alpha$, тобто f^r_β задовольняє умову Ліпшиця порядку α:

$$|f^r_\beta(x+h) - f^r_\beta(x)| \leq |h|^\alpha, \qquad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 \leq h \leq 2\pi, \quad x \in \mathbb{R},$$

то кажуть, що f належить класу $W^r_\beta H^\alpha$. При $\alpha = 0$ вважають, що $W^r_\beta H^0 = W^r_{\beta,\infty}$. При $r = \beta$ отримуємо клас $W^r H^\alpha$ функцій f із похідною порядку $r > 0$ в сенсі Вейля, яка задовольняє умову Ліпшиця порядку α.

Розглянемо крайову задачу (в одиничному крузі) для рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4}{\partial x^4} = 0. \tag{1}$$

Розв'язок рівняння (1), що задовольняє крайову умову

$$u\,(\rho, x)\Big|_{\rho=1} = f(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi, \tag{2}$$

де $f(x)$ — сумовна 2π-періодична функція, далі позначатимемо $W(\rho; f; x) = u(\rho, x)$. Тоді розв'язок крайової задачі (1), (2) можемо записати у вигляді

$$W(\rho; f; x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^{k^2}\cos kt\right\}dt, \quad 0 \le \rho < 1. \tag{3}$$

Величину (3) називають інтегралом Вейєрштрасса функції f (див., наприклад, [2, с. 150]). Поклавши у правій частині (3) $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, величину $W(\rho; f; x)$ запишемо у вигляді

$$W_\delta(f; x) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k^2}{\delta}}\cos kt\right\}dt, \quad \delta > 0.$$

Розглянемо величину

$$\mathcal{E}(F; W_\delta)_C = \sup_{f\in F}\|f(x) - W_\delta(f; x)\|_C, \tag{4}$$

де $F \subseteq C$ — заданий клас функцій.

Задачу про відшукання асимптотичної рівності для величини (4) називають задачею Колмогорова – Нікольського для методу $W_\delta(f; x)$ на класі F у рівномірній метриці.

Апроксимативні властивості інтегралів Вейєрштрасса вперше досліджувались у роботі П. П. Коровкіна [3]; саме він розв'язав задачу Колмогорова – Нікольського для наближення інтегралами Вейєрштрасса на класах Зигмунда Z_α, де

$$Z_\alpha := \left\{f \in C\colon |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \le 2|h|^\alpha\right\}, \qquad 0 \le \alpha \le 2, \quad |h| \le 2\pi.$$

Дослідження, пов'язані з розв'язанням даної задачі на класах Зигмунда, були продовжені в роботах Л. І. Баусова [4] та Л. П. Фалалєєва [5], а на класах Соболєва — в роботах Л. І. Баусова [6] та В. О. Баскакова [7].

На класах функцій, які задаються за допомогою введеного Степанцем поняття (ψ, β)-похідної (означення класів див., наприклад, в [1], гл. III, § 7 – 9), задача Колмогорова – Нікольського в метриці простору C для методу $W_\delta(f; x)$ у залежності від параметрів, що визначають дані класи, розв'язана в роботах [8, 9].

Але до цього часу апроксимативні властивості інтегралів Вейєрштрасса на класах $W^r_\beta H^\alpha$ не були досліджені. Тому метою даної роботи є вивчення асимптотичної поведінки величин $\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; W_\delta)_C$ при $\delta \to \infty$.

Як і в роботі [10], для інтеграла Вейєрштрасса при $r > 0$ і $\delta > 0$ розглянемо функцію

$$\tau(u) = \tau_\delta(r, u)\colon = \begin{cases}(1 - e^{-u^2})\delta^{\frac{r}{2}}, & 0 \le u \le \dfrac{1}{\sqrt{\delta}},\\ (1 - e^{-u^2})u^{-r}, & u \ge \dfrac{1}{\sqrt{\delta}},\end{cases} \tag{5}$$

перетворення Фур'є якої

$$\hat{\tau}_\beta(t) := \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

є сумовним на всій числовій осі (цей факт доведено в роботі [8]).

Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $r > 0,\ 0 \le \alpha < 1,\ r + \alpha \le 2$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді при* $\delta \to \infty$ *має місце рівність*

$$\mathcal{E}(W_\beta^r H^\alpha; W_\delta)_C = \frac{\gamma(\alpha)}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}} A(\alpha,\tau) + O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{1+r}{2}}} + \frac{1}{\delta}\right), \tag{6}$$
$$2^{\alpha-1} \le \gamma(\alpha) \le 1,$$

де величина $A(\alpha,\tau)$ *означена співвідношенням*

$$A(\alpha,\tau) = A(\alpha,\beta,\tau) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^\alpha \left|\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| dt, \tag{7}$$

і для неї справджується оцінка

$$A(\alpha,\tau) = \begin{cases} O(1), & r+\alpha < 2, \\ O(\ln\delta), & r+\alpha = 2. \end{cases} \tag{8}$$

Доведення. Згідно з теоремою 2 з роботи Л. І. Баусова [11], якщо для функції $\tau(u)$ інтеграл (7) є збіжним, то при $r > 0,\ r+\alpha \le 2,\ \beta \in \mathbb{R}$ і $\delta \to \infty$ справджується рівність

$$\mathcal{E}(W_\beta^r H^\alpha; W_\delta)_C = \frac{\gamma(\alpha)}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}} A(\alpha,\tau) + O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}} a(\alpha,\tau)\right), \tag{9}$$
$$2^{\alpha-1} \le \gamma(\alpha) \le 1, \quad 0 \le \alpha < 1,$$

де

$$a(\alpha,\tau) = a(\alpha,\beta,\tau) := \int\limits_{|t| \ge \frac{\sqrt{\delta}\pi}{2}} |t|^\alpha\, |\widehat{\tau}_\beta(t)| dt. \tag{10}$$

Щоб скористатись рівністю (9), потрібно довести збіжність інтеграла (7). Згідно з теоремою 1 [11, с. 6], для збіжності інтеграла (7) необхідно і достатньо, щоб збігалися інтеграли

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right|, \qquad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right|, \qquad \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1)\left|d\tau'(u)\right|, \tag{11}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du, \qquad \int\limits_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du. \tag{12}$$

Для оцінювання першого інтеграла з (11), як і при доведенні леми 1 [12], розіб'ємо проміжок $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ на дві частини: $\left[0; \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ і $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}; \frac{1}{2}\right]$. Врахувавши, що при $u \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ і $\delta > 4$

$$\tau''(u) = 2e^{-u^2}\delta^{\frac{r}{2}}(1-2u^2) \ge 0,$$

а також нерівність

$$e^{-u^2} \leq 1, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

отримаємо співвідношення

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} \left|d\tau'(u)\right| = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} d\tau'(u) \leq 2\delta^{\frac{r}{2}} \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} (u^{1-\alpha} - 2u^{3-\alpha})du \leq \frac{K}{\delta^{1-\frac{r+\alpha}{2}}}. \tag{14}$$

Тут і далі через K будемо позначати сталі, взагалі кажучи, різні в різних співвідношеннях.

Нехай тепер $u \in \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}; \frac{1}{2}\right]$. Покладемо

$$\tau_1(u) = \left(1 - e^{-u^2} - u^2\right) u^{-r}, \quad \tau_2(u) = u^{2-r},$$

тоді $\tau(u) = \tau_1(u) + \tau_2(u)$ і

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| \leq \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau_1'(u)| + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau_2'(u)|. \tag{15}$$

Оцінимо перший інтеграл із правої частини нерівності (15). Оскільки

$$\tau_1''(u) = r(r+1)(1 - e^{-u^2} - u^2)u^{-r-2} - 4ru^{-r}(e^{-u^2} - 1) + 2(e^{-u^2} - 2u^2 e^{-u^2} - 1)u^{-r},$$

то, враховуючи нерівності

$$e^{-u^2} + u^2 - 1 \leq \frac{u^4}{2}, \qquad 1 - e^{-u^2} \leq u^2, \qquad 2u^2 e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1 \leq 3u^2, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

одержуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau_1'(u)| \leq r(r+1) \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{-1-r-\alpha} \left(-1 + e^{-u^2} + u^2\right) du +$$

$$+4r \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha} \left(1 - e^{-u^2}\right) du + 2 \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha} \left(-e^{-u^2} + 2u^2 e^{-u^2} + 1\right) du \leq$$

$$\leq \frac{r(r+1)}{2} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{3-r-\alpha} du + 4r \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{3-r-\alpha} du + 6 \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{3-r-\alpha} du \leq K, \quad r + \alpha \leq 2. \tag{17}$$

Встановимо тепер оцінку другого інтеграла з правої частини нерівності (15). Враховуючи, що $\tau_2''(u) = (2-r)(1-r)u^{-r}$, маємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} \left|d\tau_2'(u)\right| = (2-r)(|1-r|) \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha} du =$$

$$= \begin{cases} O(1), & r+\alpha<2, \\ \dfrac{1}{2}(2-r)(r-1)\ln\delta + O(1), & r+\alpha=2. \end{cases} \tag{18}$$

Об'єднуючи співвідношення (14), (15), (17) і (18), отримуємо оцінку

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right| = \begin{cases} O(1), & r+\alpha<2, \\ \dfrac{1}{2}(2-r)(r-1)\ln\delta + O(1), & r+\alpha=2. \end{cases} \tag{19}$$

Оцінимо другий інтеграл з (11). Враховуючи, що при $u \geq \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}$

$$\tau''(u) = (2-4r)e^{-u^2}u^{-r} - 4e^{-u^2}u^{2-r} + r(r+1)(1-e^{-u^2})u^{-2-r}, \tag{20}$$

а також (13) та другу з нерівностей (16), одержуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right| \leq \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right| \leq K. \tag{21}$$

Використовуючи співвідношення (20), другу з нерівностей (16) і нерівності

$$u^2e^{-u^2} \leq 1, \qquad u^4e^{-u^2} \leq 1, \quad u\in\mathbb{R}, \tag{22}$$

неважко переконатися, що має місце така оцінка третього з інтегралів (11):

$$\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1)\left|d\tau'(u)\right| \leq \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} u\left|d\tau'(u)\right| \leq K. \tag{23}$$

Як і при встановленні оцінки (36) із [13], для оцінювання першого інтеграла із (12) розіб'ємо проміжок $[0;\infty)$ на три частини $\left[0;\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\dfrac{1}{\sqrt{\delta}};1\right]$ та $[1;\infty)$. Використавши співвідношення (5) і другу з нерівностей (16), отримаємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{\left(1-e^{-u^2}\right)\delta^{\frac{r}{2}}}{u^{1+\alpha}}du \leq \delta^{\frac{r}{2}}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha}du \leq \frac{K}{\delta^{1-\frac{r+\alpha}{2}}}. \tag{24}$$

Далі із (5), враховуючи першу з нерівностей (16), маємо

$$\left|\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du - \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} \frac{u^{2-r}}{u^{1+\alpha}}du\right| \leq \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} \frac{\left|1-e^{-u^2}-u^2\right|}{u^{1+\alpha}}u^{-r}du \leq$$

$$\leq \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} \frac{u^4}{2u^{1+\alpha}}u^{-r}du \leq K, \quad r+\alpha\leq 2.$$

Звідси

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} u^{1-r-\alpha} du + O(1) = \begin{cases} O(1), & r+\alpha < 2, \\ \dfrac{1}{2}\ln\delta + O(1), & r+\alpha = 2. \end{cases} \tag{25}$$

Нехай $u \in [1;\infty)$. Із формули (5) випливає, що

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du \le \int\limits_{1}^{\infty} u^{-1-r-\alpha} du \le K. \tag{26}$$

Об'єднуючи формули (24)–(26), отримуємо

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \begin{cases} O\left(1\right), & r+\alpha < 2, \\ \dfrac{1}{2}\ln\delta + O\left(1\right), & r+\alpha = 2. \end{cases} \tag{27}$$

Оцінимо тепер другий інтеграл із (12). Як і при встановленні формули (30) із роботи [14], можна показати, що для функції $\tau(u)$, заданої за допомогою співвідношення (5), має місце рівність

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{\big|\tau(1-u)-\tau(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}} du = \int\limits_{0}^{1} \frac{\big|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}} du +$$

$$+O\left(|\tau(0)| + |\tau(1)| + \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right| + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}\big|d\tau'(u)\big| + \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1)\big|d\tau'(u)\big| \right), \tag{28}$$

де $\lambda(u) = e^{-u^2}$. Оскільки

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{\big|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}} du = \int\limits_{0}^{1} \frac{\big|e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2}\big|}{u^{1+\alpha}} du = O(1),$$

то з урахуванням співвідношень (19), (21) і (23) із (28) отримуємо

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \begin{cases} O(1), & r+\alpha < 2, \\ O\left(\ln\delta\right), & r+\alpha = 2. \end{cases} \tag{29}$$

Таким чином, за теоремою 1 роботи [11] інтеграл $A(\alpha,\tau)$ є збіжним. Отже, має місце рівність (9). З нерівностей (1.12) та (1.13) роботи [11] із урахуванням формул (19), (21), (23), (27) та (29) одержимо співвідношення (8).

Оцінимо залишковий член у правій частині рівності (9). Для цього запишемо перетворення Фур'є $\widehat{\tau}_\beta(t)$ у вигляді

$$\widehat{\tau}_\beta(t)=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty}\right)\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du. \tag{30}$$

Зінтегруємо двічі частинами інтеграли з правої частини рівності (30):

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=\frac{1}{t}\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\delta^{\frac{r}{2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{t^2}\frac{2}{\sqrt{\delta}}e^{-\frac{1}{\delta}}\delta^{\frac{r}{2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\frac{1}{t^2}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}\tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du, \tag{31}$$

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=-\frac{1}{t}\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\delta^{\frac{r}{2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{t^2}\left(\frac{2}{\sqrt{\delta}}e^{-\frac{1}{\delta}}\delta^{\frac{r}{2}}-r\delta^{\frac{1+r}{2}}\big(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\big)\right)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{t^2}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty}\tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du. \tag{32}$$

Підставляючи (31) і (32) в (30), одержуємо

$$\widehat{\tau}_\beta(t)=\frac{1}{\pi t^2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)r\delta^{\frac{1+r}{2}}\big(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\big)-\frac{1}{\pi t^2}\int\limits_0^{\infty}\tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du,$$

звідки

$$|\widehat{\tau}_\beta(t)|\le\frac{1}{\pi t^2}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}+\int\limits_1^{\infty}\right)|\tau''(u)|du+\frac{1}{t^2}\frac{K}{\delta^{\frac{1-r}{2}}}. \tag{33}$$

Встановимо оцінки інтегралів із правої частини співвідношення (33). Врахувавши, що $\tau''(u)\ge 0$ на $\left[0;\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ $(\delta>4)$, і нерівність (13), дістанемо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}|\tau''(u)|du=\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}\tau''(u)du=$$

$$=2\delta^{\frac{r}{2}}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}e^{-u^2}\left(1-2u^2\right)du\le 2\delta^{\frac{r}{2}}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}\left(1-2u^2\right)du\le\frac{K}{\delta^{\frac{1-r}{2}}}. \tag{34}$$

Нехай $u \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{\delta}};1\right]$. Міркуючи, як і при оцінюванні першого інтеграла з (11) на проміжку $\left[\dfrac{1}{\sqrt{\delta}};\dfrac{1}{2}\right]$, можна показати, що

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} |\tau''(u)|du = O\left(1+\frac{1}{\delta^{\frac{1-r}{2}}}\right). \qquad (35)$$

Нехай тепер $u \in [1;\infty)$. Із співвідношення (20) та нерівностей (22) випливає, що

$$\int\limits_{1}^{\infty} |\tau''(u)|du = O(1). \qquad (36)$$

Об'єднуючи формули (33)–(36), одержуємо

$$|\widehat{\tau}_\beta(t)| = \frac{1}{t^2}O\left(1+\frac{1}{\delta^{\frac{1-r}{2}}}\right).$$

Звідси

$$a(\alpha,\tau) = \int\limits_{|t|\geq\frac{\sqrt{\delta}\pi}{2}} |t|^\alpha\,|\widehat{\tau}_\beta(t)|dt = O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{1-\alpha}{2}}}+\frac{1}{\delta^{\frac{2-(r+\alpha)}{2}}}\right). \qquad (37)$$

Із співвідношень (9) та (37) випливає рівність (6).

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай* $0<\alpha<1$. *Тоді при* $\delta\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(H^\alpha;W_\delta\right)_C = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\frac{1}{\delta^{\frac{\alpha}{2}}} + O\left(\frac{e^{\frac{-\delta\pi^2}{16}}}{\sqrt{\delta}}\right). \qquad (38)$$

Доведення. З теореми 2 роботи Л. І. Баусова [11] випливає, що для $0<\alpha<1$ при $\delta\to\infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}\left(H^\alpha;W_\delta\right)_C = \frac{1}{\delta^{\frac{\alpha}{2}}}A(\alpha) + O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{\alpha}{2}}}a_\delta(\alpha)\right), \qquad (39)$$

де

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|^\alpha\left|\int\limits_0^\infty e^{-u^2}\cos utdu\right|dt,$$

$$a_\delta(\alpha) = \int\limits_{|t|\geq\frac{\sqrt{\delta}\pi}{2}}|t|^\alpha\left|\int\limits_0^\infty e^{-u^2}\cos utdu\right|dt.$$

Встановимо оцінку інтеграла $A(\alpha)$. Використавши формулу [15, с. 494]

$$\int\limits_0^\infty e^{-\beta x^2}\cos bx dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\exp\left(-\frac{b^2}{4\beta}\right), \quad \operatorname{Re}\beta > 0,$$

та формулу (860.17) [16]

$$\int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-\frac{t^2}{4}}dt = 2^\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right), \quad \alpha > -1, \tag{40}$$

отримаємо

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty |t|^\alpha \left|\int\limits_0^\infty e^{-u^2}\cos utdu\right| dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-\frac{t^2}{4}}dt = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right). \tag{41}$$

Встановимо тепер оцінку інтеграла $a_\delta(\alpha)$. З урахуванням (40) запишемо

$$a_\delta(\alpha) = 2\int\limits_{\frac{\sqrt{\delta}\pi}{2}}^\infty t^\alpha\left|\int\limits_0^\infty e^{-u^2}\cos utdu\right|dt = 2\sqrt{\pi}\int\limits_{\frac{\sqrt{\delta}\pi}{2}}^\infty t^\alpha e^{-\frac{t^2}{4}}dt. \tag{42}$$

Для оцінки останнього інтеграла скористаємось рівністю (26) [17]

$$\int\limits_m^\infty e^{-\sigma t^k}t^\nu dt = \frac{e^{-\sigma m^k}}{\sigma k}m^{\nu+1-k}\left(1+\Theta_{\sigma,m}^{k,\nu}\frac{|\nu+1-k|}{\sigma k}\frac{1}{m^k}\right), \quad |\Theta_{\sigma,m}^{k,\nu}| \le \frac{14}{13}, \tag{43}$$

де $\sigma > 0,\ k > 0,\ \nu\in\mathbb{R}$ і $m \ge \left(\dfrac{14|\nu+1-k|}{\sigma k}\right)^{\frac{1}{k}}$.

З (43) випливає, що при $\delta\to\infty$ справедливою є оцінка

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{\delta}\pi}{2}}^\infty t^\alpha e^{-\frac{t^2}{4}}dt = O\left(\frac{e^{-\frac{1}{4}(\frac{\sqrt{\delta}\pi}{2})^2}}{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{\delta}\pi}{2}\right)^{\alpha-1}\right) = O\left(e^{-\frac{\delta\pi^2}{16}}\delta^{\frac{\alpha-1}{2}}\right). \tag{44}$$

На підставі формул (39), (41), (42) і (44) отримаємо рівність (38).

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
3. *Коровкин П. П.* О наилучшем приближении функций класса Z_2 некоторыми линейными операторами // Докл. АН СССР. – 1959. – **127**, № 3. – С. 143 – 149.
4. *Баусов Л. И.* О приближении функций класса Z_α положительными методами суммирования рядов Фурье // Успехи мат. наук. – 1961. – **16**, № 3. – С. 143 – 149.
5. *Фалалеев Л. П.* О приближении функций обобщенными операторами Абеля – Пуассона // Сиб. мат. журн. – 2001. – **42**, № 4. – С. 926 – 936.
6. *Баусов Л. И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I // Изв. вузов. Математика. – 1965. – **46**, № 3. – С. 15 – 31.

7. *Баскаков В. А.* О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля – Пуассона // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 2. – С. 169 – 180.
8. *Kharkevych Yu. I., Kal'chuk I. V.* Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Weierstrass integrals // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 7. – P. 1059 – 1087.
9. *Kal'chuk I. V.* Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Weierstrass operators // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 9. – P. 1342 – 1363.
10. *Kharkevych Yu. I., Zhyhallo T. V.* Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals // Ukr. Math. J. – 2004. – **56**, № 9. – P. 1509 – 1525.
11. *Баусов Л. И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, II // Изв. вузов. – 1996. – **46**, № 3. – С. 3 – 17.
12. *Zhyhallo T. V., Kharkevych Yu. I.* Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, № 11. – P. 1757 – 1779.
13. *Zhyhallo T. V., Kharkevych Yu. I.* Approximation of functions from the class C^ψ_β by Poisson integrals in the uniform metric // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, № 12. – P. 1893 – 1914.
14. *Кальчук І. В., Харкевич Ю. І.* Апроксимативні властивості бігармонічних інтегралів Пуассона на класах $W^r_\beta H^\alpha$ // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 11. – С. 1493 – 1504.
15. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматиз, 1963. – 1100 с.
16. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1973. – 228 с.
17. *Serdyuk A. S., Stepaniuk T. A.* Uniform approximations by Fourier sums on classes of generalized Poisson integrals // Arxiv preprint, arXiv:1603.01891. – 2016. – 31 p.

Одержано 25.10.16