УДК 517.51

В. Д. Галан (Терноп. нац. пед. ун-т),
І. О. Шевчук (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ТОЧНА СТАЛА В НЕРІВНОСТІ ДЗЯДИКА ДЛЯ ПОХІДНОЇ ВІД АЛГЕБРАЇЧНОГО ПОЛІНОМА

For natural k and $n \geq 2k$, we determine the exact constant $c(n,k)$ in the Dzyadyk inequality

$$\|P_n'\varphi_n^{1-k}\|_{C[-1,1]} \leq c(n,k)n\|P_n\varphi_n^{-k}\|_{C[-1,1]}$$

for the derivative P_n' of an algebraic polynomial P_n of degree $\leq n$, where

$$\varphi_n(x) := \sqrt{n^{-2}+1-x^2}.$$

Namely,

$$c(n,k) = \left(1+k\frac{\sqrt{1+n^2}-1}{n}\right)^2 - k.$$

Для натуральных k и $n \geq 2k$ найдена точная постоянная $c(n,k)$ в неравенстве Дзядыка

$$\|P_n'\varphi_n^{1-k}\|_{C[-1,1]} \leq c(n,k)n\|P_n\varphi_n^{-k}\|_{C[-1,1]}$$

для производной P_n' многочлена P_n степени не больше n, где

$$\varphi_n(x) := \sqrt{n^{-2}+1-x^2},$$

а именно,

$$c(n,k) = \left(1+k\frac{\sqrt{1+n^2}-1}{n}\right)^2 - k.$$

1. Вступ. Нехай

$$\|f\| := \|f\|_{C[-1,1]} = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|$$

— рівномірна норма функції $f \in C[-1,1]$, $\mathcal{P}_n$ — простір алгебраїчних поліномів степеня не вищого за n з дійсними коефіцієнтами,

$$\varphi(x) := \sqrt{1-x^2} \qquad \text{та} \qquad \varphi_n(x) := \sqrt{n^{-2}+1-x^2}.$$

Для кожного полінома $P_n \in \mathcal{P}_n$ із класичних нерівностей Маркова

$$\|P_n'\| \leq n^2\|P_n\|,$$

Бернштейна

$$\|P_n'\varphi\| \leq n\|P_n\|$$

та оцінки $\varphi_n(x) \leq \dfrac{1}{n} + \varphi(x)$, $x \in [-1,1]$, безпосередньо випливає нерівність

$$\|P_n'\varphi_n\| \leq \frac{1}{n}\|P_n'\| + \|P_n'\varphi\| \leq 2n\|P_n\|.$$

Узагальненням цієї нерівності на довільне $s \in \mathbb{R}$ є класична нерівність Дзядика [1, 2, с. 262], яку запишемо у вигляді

$$\|P_n'\varphi_n^{1-s}\| \le c(s)n\|P_n\varphi_n^{-s}\|, \tag{1.1}$$

де $c(s)$ — стала, що залежить лише від s.

Основним результатом статті є знаходження точної сталої в нерівності (1.1) для випадку $s \in \mathbb{N}$. Цією точною сталою є число

$$1 + s + s^2.$$

Більш того, в цьому випадку ми знаходимо точну сталу для кожної пари (s, n).

Позначимо

$$b_n := \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n}.$$

Теорема 1.1. *Для кожних натуральних чисел k і $n \ge 2k$ та кожного полінома $P_n \in \mathcal{P}_n$ виконується нерівність*

$$\|P_n'\varphi_n^{1-k}\| \le \big((1 + kb_n)^2 - k\big)n\|P_n\varphi_n^{-k}\|. \tag{1.2}$$

Теорема 1.2. *Для кожних натуральних чисел k і $n \ge 2k$ знайдеться поліном $P_n \in \mathcal{P}_n$ такий, що*

$$\|P_n'\varphi_n^{1-k}\| = \big((1 + kb_n)^2 - k\big)n\|P_n\varphi_n^{-k}\|. \tag{1.3}$$

Оскільки $b_n < 1$ та $b_n \to 1$ при $n \to \infty$, то безпосередніми наслідками теорем 1 і 2 є, відповідно, теореми 1.3 та 1.4.

Теорема 1.3. *Для кожних натуральних чисел k і $n \ge 2k$ та кожного полінома $P_n \in \mathcal{P}_n$ виконується нерівність*

$$\|P_n'\varphi_n^{1-k}\| \le (1 + k + k^2)n\|P_n\varphi_n^{-k}\|. \tag{1.4}$$

Теорема 1.4. *Для кожного $\varepsilon > 0$ та кожного натурального числа k існує номер $N(k, \varepsilon)$ такий, що при кожному $n \ge N(k, \varepsilon)$ знайдеться такий поліном $P_n \in \mathcal{P}_n$, що*

$$\|P_n'\varphi_n^{1-k}\| > (1 + k + k^2 - \varepsilon)n\|P_n\varphi_n^{-k}\|. \tag{1.5}$$

2. Допоміжні твердження. Зафіксуємо $a \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$ та $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2k$. Позначимо через $\mathcal{T}_n$ простір тригонометричних поліномів

$$T_n(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos mt + b_m \sin mt)$$

степеня не вищого за n з дійсними коефіцієнтами. Нехай

$$w = e^{it}, \quad t \in \mathbb{R},$$

та

$$\rho(t) := |w^2 - a| = \sqrt{(1 - a)^2 + 4a \sin^2 t}.$$

Позначимо

$$S(w) := w^{n-2k}(w^2 - a)^k$$

та

$$Q(t) := \operatorname{Re} S(e^{it}),$$

а також

$$A(t) := \left| e^{2it} - \left(1 - \frac{2k}{n}\right) a \right| = \sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{2k}{n}\right) a\right)^2 + 4a\left(1 - \frac{2k}{n}\right)\sin^2 t}.$$

Має місце таке твердження.

Лема 2.1. *Для полінома Q справджуються нерівності*

$$|Q(t)| \leq |S(e^{it})| = \rho^k(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

та

$$|Q'(t)| \leq \left| \frac{d}{dt} S(e^{it}) \right| = n\rho^{k-1}(t) A(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Доведення. Справді,

$$|Q(t)| = |\operatorname{Re} S(w)| \leq |S(w)| = |w^2 - a|^k = \rho^k(t),$$

тобто нерівність (2.1) доведено. Тепер, оскільки

$$Q'(t) = \big(\operatorname{Re} S(e^{it})\big)' = \operatorname{Re} \frac{d}{dt} S(e^{it}) = \operatorname{Re} iw \frac{d}{dw} S(w),$$

то

$$|Q'(t)| \leq \left| \frac{d}{dw} S(w) \right| = n|w^2 - a|^{k-1} \left| w^2 - \left(1 - \frac{2k}{n}\right) a \right|,$$

що зумовлює (2.2).

Лему 2.1 доведено.

Нам буде потрібна наступна теорема Бернштейна [3, с. 498]. Нехай H_l — алгебраїчний поліном степеня l, який не має нулів зовні одиничного круга.

Теорема 2.1. *Якщо тригонометричний поліном T_n степеня $n \geq l$ задовольняє нерівність*

$$|T_n(t)| \leq |H_l(e^{it})|$$

для всіх дійсних значень t, то

$$|T_n'(t)| \leq |(n - l) H_l(e^{it}) + e^{it} H_l'(e^{it})|.$$

Наслідком теореми 2.1 є така лема.

Лема 2.2. *Якщо для полінома $T_n \in \mathcal{T}_n$ виконується нерівність*

$$|T_n(t)| \leq \rho^k(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

то

$$|T_n'(t)| \leq n\rho^{k-1}(t) A(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Доведення. Візьмемо $l = 2k$ та $H_l := S$. Оскільки $S'(w) = 2kw(w^2 - a)^{k-1}$, то за теоремою 2.1

$$|T_n'(t)| \le |(n-2k)(e^{2it} - a)^k + 2ke^{2it}(e^{2it} - a)^{k-1}| =$$
$$= n|e^{2it} - a|^{k-1} \left| e^{2it} - \left(1 - \frac{2k}{n}\right) a \right| = n\rho^{k-1}(t)A(t).$$

Лема 2.3. *Для похідної Q' полінома Q на проміжку $(0, 2\pi]$ існують $2n$ точок альтернансу η_j, тобто таких, що*

$$0 < \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_{2n-1} < \eta_{2n} \le 2\pi,$$
$$|Q'(\eta_j)| = n\rho^{k-1}(\eta_j)A(\eta_j), \quad j = 1, \ldots, 2n,$$

та

$$Q'(\eta_j)Q'(\eta_{j-1}) < 0, \quad j = 2, \ldots, 2n. \tag{2.4}$$

Доведення. Позначимо

$$S^*(w) := iw\frac{d}{dw}S(w) = inw^{n-2k}(w^2 - a)^{k-1}\left(w^2 - \left(1 - \frac{2k}{n}\right)a\right).$$

Нагадаємо, що $Q'(t) = \operatorname{Re} S^*(w)$. Різниця між кількістю всіх нулів та всіх полюсів функції S^*, які містяться у відкритому одиничному крузі, дорівнює n або $-n$. Міркуючи так само, як в [4, с. 21, 22], помічаємо, що внаслідок принципу аргументу, при обході точкою w один раз одиничне коло проти годинникової стрілки, аргумент функції S^* збільшується (або зменшується) на величину, що дорівнює добутку числа 2π на різницю між кількістю всіх нулів та всіх полюсів функції S^*, які містяться у відкритому одиничному крузі. Тобто в даному випадку аргумент функції S збільшується (або зменшується) на $2\pi n$. Іншими словами, для функції $f(t) := \arg S^*(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, справджується рівність $|f(2\pi) - f(0)| = 2\pi n$. Оскільки $S^*(w) \ne 0$ на колі $|w| = 1$, то функція f є неперервною на $[0, 2\pi]$, і, отже, існують $2n$ точок η_j, $0 < \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_{2n-1} < \eta_{2n} \le 2\pi$, таких, що $f(\eta_j) = (j - j_0)\pi$ (або $f(\eta_j) = (j_0 - j)\pi$), де $j_0 \in \mathbb{Z}$ — деяке число. В цих точках $|Q'(\eta_j)| = |S^*(\eta_j)| = n\rho^{k-1}(\eta_j)A(\eta_j)$ та має місце (2.4).

Лему 2.3 доведено.

Позначимо $\eta := \eta_1$ і зауважимо, що $Q'(t) \ne 0$ при $t \in (0, \eta)$, оскільки інакше непарний поліном Q' степеня не вищого за n на проміжку $[0, 2\pi)$ мав би принаймні $2n + 1$ нуль, серед яких точка 0, та $2n - 1$ нуль на кожному з інтервалів (η_j, η_{j+1}), $j = 1, \ldots, 2n - 1$. Зауважимо також, що $\eta_n = \pi - \eta$.

Лема 2.4. *Якщо для парного полінома $T_n \in \mathcal{T}_n$ виконується нерівність* (2.3), *то*

$$|T_n'(t)| \le |Q'(t)|, \quad t \in [0, \eta] \cup [\pi - \eta, \pi].$$

Доведення. Припустимо від супротивного, що існують парний поліном $T_n \in \mathcal{T}_n$ та точка $t^0 \in (0, \eta)$ такі, що має місце нерівність

$$|T_n(t)| \le \rho^k(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

але

$$|T_n'(t^0)| > |Q'(t^0)|,$$

при цьому $T_n'(t^0)$ та $Q'(t^0)$ мають однаковий знак. Позначимо

$$T := T_n' - Q'.$$

Із лем 2.3 та 2.4 випливає, що $T(\eta_j)T(\eta_{j+1}) < 0$ для всіх $j = 1, \ldots, 2n-1$, отже, на кожному інтервалі (η_j, η_{j+1}), $j = 1, \ldots, 2n-1$, поліном T має принаймні один нуль. Поза тим, за припущенням від супротивного та лемами 2.3 та 2.4, $T(t^0)T(\eta) < 0$, отже, T має ще один нуль на інтервалі (t^0, η). Нарешті, ще один нуль поліном T має в точці 0, позаяк T є непарною функцією. Таким чином, нетривіальний тригонометричний поліном степеня не вищого за n на періоді $[0, 2\pi)$ має принаймні $2n+1$ нуль, що неможливо. Враховуючи, що поліном $T_*(x) := := T(x-\pi)$ також є непарною функцією і $\rho(t) \equiv \rho(t-\pi)$, аналогічно міркуємо у випадку $t^0 \in (\pi - \eta, \pi)$.

Лему 2.4 доведено.

Лема 2.5. *Виконується нерівність*

$$\left| \frac{Q'(t)}{\sin t \rho^{k-1}(t)} \right| \le \frac{|Q''(0)|}{\rho^{k-1}(0)}, \quad t \in (0, \pi). \tag{2.5}$$

Доведення. Якщо $t \in [\eta, \pi - \eta]$, то, враховуючи (2.2), маємо

$$\left| \frac{Q'(t)}{\sin t \rho^{k-1}(t)} \right| \le \left| \frac{nA(t)}{\sin t} \right| =$$

$$= n \sqrt{\frac{\left(1 - \left(1 - \frac{2k}{n}\right) a\right)^2}{\sin^2 t} + 4a \left(1 - \frac{2k}{n}\right)} \le n \frac{A(\eta)}{\sin \eta} = \frac{|Q'(\eta)|}{\sin \eta \rho^{k-1}(\eta)},$$

де остання рівність є безпосереднім наслідком леми 2.3. Тому (2.5) досить довести для $t \in (0, \eta)$ (для $t \in (\pi - \eta, \pi)$ доведення аналогічне). Для цього позначимо через $T \in \mathcal{T}_{n-1}$ поліном, що заданий на $(-\pi, \pi)$ рівністю

$$T(u) := \begin{cases} \dfrac{Q'(u)}{\sin u}, & \text{якщо} \quad u \ne 0, \\[2ex] Q''(0), & \text{якщо} \quad u = 0, \end{cases}$$

та покажемо, що $|T|$ є спадною функцією на проміжку $(0, t^*)$, де t^* — нуль полінома Q' (а отже, і полінома T), що міститься між точками η_1 та η_2. Зауважимо, що Q' є непарною функцією, тому T' є непарним поліномом. Оскільки T разом з Q' чергує знаки в точках η_j, $j = 1, \ldots, n-1$, то T має принаймні $n-3$ нулі на проміжку $[\eta_2, \eta_{n-1}]$. Отже, T має принаймні $n-1$ нуль на проміжку $[t^*, \pi - t^*]$, тому похідна T' має принаймні $n-2$ нулі на проміжку $(t^*, \pi - t^*)$. Ще принаймні $n-2$ нулі похідна T' має на симетричному проміжку $(t^* - \pi, -t^*)$. Разом з нулями в точках 0 та π знайдено всі нулі полінома T' на періоді $(-\pi, \pi]$, і інших нулів бути не може. Тобто T є монотонною функцією на проміжку $(0, t^*)$, і, отже, $|T|$ є спадною функцією на проміжку $(0, t^*)$, що зумовлює нерівність

$$|T(t)| \le |T(0)| = |Q''(0)|, \quad t \in [0, \eta] \subset [0, t^*],$$

яка разом з оцінкою $\rho(t) \ge \rho(0)$ доводить (2.5).

Лему 2.5 доведено.

Лема 2.6. *Справджується рівність*

$$|Q''(0)| = (1-a)^{k-2}|(n(1-a)+2ka)^2 - 4ak|.$$

Доведення. Оскільки

$$Q'(t) = (\mathrm{Re}\ S(e^{it}))' = \mathrm{Re}\, S'(e^{it}) = \mathrm{Re}\, iw\frac{d}{dw}S(w) =$$
$$= \mathrm{Re}\, i\Big((n-2k)w^{n-2k}(w^2-a)^k + 2kw^{n-2k+2}(w^2-a)^{k-1}\Big),$$

то

$$Q''(t) = -\,\mathrm{Re}\, w\frac{d}{dw}\Big((n-2k)w^{n-2k}(w^2-a)^k + 2kw^{n-2k+2}(w^2-a)^{k-1}\Big) =$$
$$= -\,\mathrm{Re}\, w^{n-2k}(w^2-a)^{k-2}\Big((n-2k)^2(w^2-a)^2+$$
$$+4k(n-2k+1)w^2(w^2-a) + 4k(k-1)w^4\Big) =: -\,\mathrm{Re}\,\tilde{S}(w).$$

Оскільки

$$\tilde{S}(1) = (1-a)^{k-2}\Big((n-2k)^2(1-a)^2 + 4k(n-2k+1)(1-a) + 4k(k-1)\Big) =$$
$$= (1-a)^{k-2}\Big((n(1-a)+2ka)^2 - 4ka\Big)$$

і, зокрема, $\tilde{S}(1)$ є дійсним числом, то $\mathrm{Re}\,\tilde{S}(1) = \tilde{S}(1)$, отже, $|Q''(0)| = |\tilde{S}(1)|$.

Лему 2.6 доведено.

3. Доведення теорем 2.1 та 2.2. Далі $x = \cos t,\ t \in \mathbb{R}$. Позначимо

$$b := b_n = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n} \quad \text{та} \quad a := b_n^2.$$

Тоді

$$1-a = \frac{2b}{n}, \qquad \frac{\sqrt{a}}{1-a} = \frac{n}{2}, \qquad \rho(t) = 2b\sqrt{\frac{1}{n^2}+\sin^2 t} = 2b\varphi_n(x)$$

та

$$|Q''(0)| = (1-a)^k n^2\big((1+bk)^2 - k\big).$$

***Доведення теореми* 2.1.** Нехай P_n – довільний алгебраїчний поліном степеня не вищого за n з дійсними коефіцієнтами такий, що

$$|P_n(x)| \le \varphi_n^k(x), \quad x \in [-1,1].$$

Розглянемо тригонометричний поліном

$$T_n(t) := P_n(\cos t)$$

степеня не вищого за n. Зрозуміло, що

$$|T_n(t)| = |P_n(\cos t)| \le \left(\frac{\rho(t)}{2b}\right)^k \tag{3.1}$$

та

$$|T_n'(t)| = |P_n'(\cos t)||\sin t|.$$

Отже, для завершення доведення потрібно перевірити нерівність

$$|T_n'(t)| \le n\varphi_n^{k-1}(t)\left((1+kb)^2 - k\right)\sin t, \quad t \in [0,\pi],$$

або, що те ж саме, нерівність

$$(2b)^k\left|\frac{T_n'(t)}{\sin t\rho^{k-1}(t)}\right| \le \frac{|Q''(0)|}{\rho^{k-1}(0)}, \quad t \in (0,\pi). \tag{3.2}$$

Для цього запишемо оцінку (3.1) у вигляді

$$(2b)^k|T_n(t)| \le \rho^k(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

що уможливлює застосування лем 2.2 та 2.4 до полінома $(2b)^kT_n$. Отже, якщо $t \in (0,\eta]$, то за лемою 2.4 $(2b)^k|T_n'(t)| \le |Q_n'(t)|$, і нерівність (3.2) випливає з леми 2.5. Так само перевіряється (3.2) для $t \in [\pi-\eta,\pi)$.

Нарешті, якщо $t \in (\eta, \pi-\eta)$, то внаслідок (3.1) та леми 2.2

$$(2b)^k\left|\frac{T_n'(t)}{\sin t\rho^{k-1}(t)}\right| \le \left|\frac{nA(t)}{\sin t}\right| =$$

$$= n\sqrt{\frac{\left(1-\left(1-\frac{2k}{n}\right)a\right)^2}{\sin^2 t} + 4a\left(1-\frac{2k}{n}\right)} \le n\frac{A(\eta)}{\sin\eta} = \frac{|Q'(\eta)|}{\sin\eta\rho^{k-1}(\eta)},$$

де остання рівність є безпосереднім наслідком леми 2.3. Тепер нерівність (3.2) знову випливає з леми 2.5.

Теорему 2.1 доведено.

***Доведення теореми* 2.2.** За шуканий алгебраїчний поліном P_n можна взяти такий, що $P_n(\cos t) = Q(t)$, тобто для $x \in [-1,1]$

$$P_n(x) := Q(\arccos x).$$

Справді, за лемою 2.1 та рівністю $\rho(t) = 2b\varphi_n(x),\ x = \cos t$,

$$\|P_n\varphi_n^{-k}\| = (2b)^k,$$

а за лемами 2.5 та 2.6

$$\|P_n'\varphi_n^{1-k}\| = (2b)^{k-1}\frac{|Q''(0)|}{\rho^{k-1}(0)} = (2b)^{k-1}\frac{(1-a)^kn^2((1+bk)^2-k)}{\rho^{k-1}(0)} =$$

$$= \left((1+kb)^2-k\right)n\|P_n\varphi_n^{-k}\|.$$

Теорему 2.2 доведено.

Література

1. *Дзядык В. К.* О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Lipα $(0<\alpha<1)$ на конечном отрезке действительной оси // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1966. – **20**. – С. 623 – 642.
2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
3. *Бернштейн С. Н.* Об оценках производных многочленов // Собр. соч. – М., 1952. – Т. 1. – С. 497 – 499.
4. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1988. – 304 с.

Одержано 27.03.17