УДК 517.5

Т. В. Жигалло, Ю. І. Харкевич (Східноєвроп. нац. ун-т, Луцьк)

АПРОКСИМАТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ БІГАРМОНІЧНИХ ОПЕРАТОРІВ ПУАССОНА НА КЛАСАХ $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$

We obtain the asymptotic equalities for the least upper bounds of the approximations of functions from the classes $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ by biharmonic Poisson operators in the integral metric.

Получены асимптотические равенства для точных верхних граней приближений функций из классов $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ бигармоническими операторами Пуассона в интегральной метрике.

1. Постановка задачі та деякі допоміжні твердження. Нехай $\hat{L}_1$ — множина функцій φ, заданих на всій дійсній осі $\mathbb{R}$ із скінченною нормою $\|\varphi\|_{\hat{1}} = \sup_{a\in R} \int_a^{a+2\pi} |\varphi(t)|\, dt$, $\hat{L}_\infty$ — множина вимірних і суттєво обмежених на всій дійсній осі функцій із скінченною нормою $\|\varphi\|_{\hat{\infty}} = \operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|$. Через $\hat{C}$ позначають множину неперервних, заданих на дійсній осі функцій із скінченною нормою $\|f\|_{\hat{C}} = \max_{x\in R}|f\,(x)|$.

У 1988 р. О. І. Степанцем [1, 2] означено множини $\hat{L}^{\psi}_{\beta}$ локально сумовних функцій, які задані на всій числовій осі і в загальному випадку не є періодичними. Нехай $\beta \in \mathbb{R}$ і неперервна при всіх $v \geq 0$ функція $\psi(v)$ такі, що перетворення $\hat{\psi}_\beta(t)$ вигляду

$$\hat{\psi}_\beta(t) = \hat{\psi}(t,\beta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \psi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv$$

є сумовним на всій дійсній осі. Через $\hat{L}^{\psi}_{\beta}$ позначають множину функцій $f(x) \in \hat{L}_1$, які майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ можна записати у вигляді

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\hat{\psi}_\beta(t)dt, \tag{1}$$

де A_0 — деяка стала, $\varphi \in \hat{L}_1$, а інтеграл слід розуміти як границю інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються.

Якщо $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}$ і при цьому $\varphi \in \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset \hat{L}_1$, то кажуть, що $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$,

$$\hat{L}^{\psi}_{\beta,1} = \left\{ f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta} \colon \|\varphi\|_{\hat{1}} \leq 1 \right\}, \qquad \hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty} = \left\{ f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta} \cap \hat{C} \colon \|\varphi\|_{\hat{\infty}} \leq 1 \right\}.$$

Функцію $\varphi(\cdot)$ із (1) називають (ψ,β)-похідною функції $f(\cdot)$ (див., наприклад, [3, с. 170]) і позначають $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$.

Через $\mathfrak{M}$ позначають [4] множину додатних неперервних опуклих донизу функцій $\psi(v)$, $v \geq 1$, для яких $\lim_{v\to\infty}\psi(v) = 0$. Кожну функцію $\psi \in \mathfrak{M}$ продовжимо на проміжок $[0,1)$ таким чином, щоб:

1) отримана функція (яку, як і раніше, будемо позначати через $\psi(v)$) була неперервною при всіх $v \geq 0$, $\psi(0) = 0$;

2) похідна $\psi'(v) = \psi'(v+0)$ мала обмежену варіацію на проміжку $[0,\infty)$ і $\psi(v)$ мала неперервну другу похідну на $[0,\infty)$ скрізь, за винятком точки $v = 1$;

3) $\psi(v)$ була зростаючою та опуклою донизу на $[0,1]$.

Множину таких функцій позначимо через $\mathfrak{A}$. Підмножину функцій $\psi \in \mathfrak{A}$, для яких $\int_1^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty$, позначимо через $\mathfrak{A}'$. Далі, з множини $\mathfrak{M}$ виділимо підмножину $\mathfrak{M}_0$:

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{ \psi \in \mathfrak{M} \colon 0 < \frac{t}{\eta(t) - t} \le K \ \ \forall t \ge 1 \right\},$$

де $\eta(t) = \eta(\psi, t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$, а ψ^{-1} — функція, обернена до функції ψ. Тут і далі домовимося через K, K_i позначати сталі, взагалі кажучи, не одні і ті ж у різних співвідношеннях, які можуть залежати від ψ. Якщо $\psi \in \mathfrak{A}$ і при цьому на проміжку $[1,\infty)$ $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то будемо записувати $\psi \in \mathfrak{A}_0$. Покладемо також $\mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'_0$.

Оператор B_σ, $\sigma \in (0,\infty)$, що діє на функцію $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}$ за правилом

$$B_\sigma(f;x) = A_0 +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t) \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \psi(v) \left[1 + \frac{v}{2}\left(1 - e^{-2/\sigma}\right)\right] e^{-v/\sigma} \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv dt, \tag{2}$$

де $\psi(v)$ — неперервна при всіх $v \ge 0$ функція, $\beta \in \mathbb{R}$, будемо називати [5] бігармонічним оператором Пуассона. Повторюючи міркування, використані при доведенні твердження 9.1.1 роботи [3, с. 169], неважко переконатися в тому, що за умови періодичності функцій f оператор B_σ є відомим бігармонічним інтегралом Пуассона (див., наприклад, [6, 7]).

У даній роботі вивчається асимптотична поведінка при $\sigma \to \infty$ величини

$$\mathcal{E}\left(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, B_\sigma\right)_{\hat{1}} = \sup_{f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta,1}} \|f(\cdot) - B_\sigma(f;\cdot)\|_{\hat{1}}, \tag{3}$$

коли $\psi \in \mathfrak{A}'_0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Апроксимативні характеристики лінійних методів підсумовування інтегралів Фур'є на класах локально сумовних функцій вивчались О. І. Степанцем [1 – 4] та його послідовниками (див., наприклад, [8 – 10]).

У періодичному випадку задача про наближення на класах диференційовних функцій у рівномірній метриці за допомогою бігармонічних інтегралів Пуассона досліджувалась С. Канієвим [11], P. Pych [12], Л. П. Фалалєєвим [13], а також у роботах [14 – 21].

Апроксимативні властивості бігармонічних операторів Пуассона на класі $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ у рівномірній метриці у випадку, коли функція $\psi(v)$ спадає до нуля при $v \to \infty$ швидше за функцію $\frac{1}{v^2}$, яка визначає порядок насичення лінійного методу, породженого оператором B_σ, досліджено авторами в роботі [5]. Метою даної роботи є дослідження асимптотичної поведінки величин (3) в інтегральній метриці у випадку функцій малої гладкості, тобто таких функцій $\psi(\cdot)$, для яких $\int_1^{\infty} v\psi(v) = \infty$.

2. Наближення функцій із класів $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ бігармонічними операторами Пуассона. Покладемо

$$\tau(v) = \tau_\sigma(v;\psi) = \left(1 - [1+\gamma v]\, e^{-v}\right) \frac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)}, \quad \sigma \ge 1, \tag{4}$$

$$\gamma := \frac{\sigma}{2}\left(1 - e^{-2/\sigma}\right), \tag{5}$$

де функція $\psi \in \mathfrak{A}$ є визначеною та неперервною при всіх $v \geq 0$. Для бігармонічного оператора Пуассона вигляду (2), на підставі леми роботи [22], отримуємо наступне твердження.

Лема. *Нехай $\psi \in \mathfrak{A}'$, інтеграл $A(\tau_\sigma)$ вигляду*

$$A(\tau_\sigma) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt \tag{6}$$

збігається. Тоді при $\sigma \to \infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}\left(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}; B_\sigma\right)_{\hat{1}} = \psi(\sigma)A(\tau_\sigma) + \psi(\sigma)\omega(\sigma), \tag{7}$$

де $\omega(\sigma) \leq 0$ і

$$|\omega(\sigma)| = O\left(\int\limits_{|t|\geq\sigma\pi/2}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_\sigma(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt\right). \tag{8}$$

Основним результатом роботи є наступне твердження.

Теорема. *Нехай $\psi \in \mathfrak{A}'_0$, функція $g(v) = v^2\psi(v)$ опукла вгору або донизу на $[b,\infty)$, $b \geq 1$. Тоді при $\sigma \to \infty$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}\left(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, B_\sigma\right)_{\hat{1}} = \psi(\sigma)A(\tau_\sigma) + O\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^3}\int\limits_{1}^{\sigma}v\psi(v)dv\right), \tag{9}$$

де величина $A(\tau_\sigma)$ визначена рівністю (6), *і для неї справджується асимптотична рівність*

$$A(\tau_\sigma) = \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\int\limits_{1}^{\sigma}v\psi(v)dv + \frac{2}{\psi(\sigma)}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}dv\right) + O\left(1 + \frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\int\limits_{1}^{\sigma}\psi(v)dv\right). \tag{10}$$

Доведення. Як випливає з леми 1, рівність (7) має місце в тому випадку, коли інтеграл $A(\tau_\sigma)$, заданий формулою (6), є збіжним. Згідно з теоремою 1 роботи [23], для збіжності інтеграла $A(\tau_\sigma)$ необхідно і достатньо, щоб збігались інтеграли

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}v|d\tau'(v)|, \quad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}|v-1||d\tau'(v)|, \tag{11}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_{0}^{\infty}\frac{|\tau(v)|}{v}dv, \quad \int\limits_{0}^{1}\frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v}dv, \tag{12}$$

де $\tau(v)$ — неперервна при всіх $v \geq 0$ функція вигляду (4).

Дотримуючись схеми встановлення оцінок для інтегралів (11), (12), яку наведено у роботі [24], неважко переконатися в тому, що для функцій $\psi \in \mathfrak{A}'_0$, з урахуванням опуклості $g(v) = v^2\psi(v)$, при $\sigma \to \infty$ мають місце рівності

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} v|d\tau'(v)| = O\left(1 + \frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\int\limits_1^{\sigma}\psi(v)dv\right), \tag{13}$$

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |v-1||d\tau'(v)| = O(1), \tag{14}$$

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{|\tau(v)|}{v}dv = \frac{1}{2\sigma^2\psi(\sigma)}\int\limits_1^{\sigma} v\psi(v)dv + \frac{1}{\psi(\sigma)}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}dv + O\left(1 + \frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\int\limits_1^{\sigma}\psi(v)dv\right), \tag{15}$$

$$\int\limits_0^1 |\tau(1-v) - \tau(1+v)|\,\frac{dv}{v} = O\left(1 + \frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\int\limits_1^{\sigma}\psi(v)dv\right). \tag{16}$$

На підставі формул (2.14), (2.15) із роботи [23] з урахуванням оцінок (13) – (15) переконуємось у справедливості рівності (10).

Далі оцінимо інтеграл із (8), записавши його у вигляді

$$\int\limits_0^{\infty}\tau_{\sigma}(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv = \left(\int\limits_0^{1/\sigma} + \int\limits_{1/\sigma}^{\infty}\right)\tau(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv. \tag{17}$$

Двічі інтегруючи частинами обидва інтеграли з правої частини рівності (17) та враховуючи, що $\tau(0)=\tau'(0) = 0$ і $\lim_{v\to\infty}\tau(v) = \lim_{v\to\infty}\tau'(v) = 0$, отримуємо

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\tau(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv = \frac{1}{\pi t^2}\left(\tau'\left(\frac{1}{\sigma} - 0\right) - \tau'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right)\cos\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{\pi t^2}\int\limits_0^{1/\sigma}\tau''(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv - \frac{1}{\pi t^2}\int\limits_{1/\sigma}^{\infty}\tau''(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv,$$

де, згідно з (4),

$$\tau''(v) = e^{-v}\left(-1 + 2\gamma - \gamma v\right)\frac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)} +$$

$$+2e^{-v}\left(1 - \gamma + \gamma v\right)\frac{\sigma\psi'(\sigma v)}{\psi(\sigma)} + \left(1 - [1 + \gamma v]\,e^{-v}\right)\frac{\sigma^2\psi''(\sigma v)}{\psi(\sigma)}. \tag{18}$$

Враховуючи, що

$$\tau'\left(\frac{1}{\sigma}-0\right)-\tau'\left(\frac{1}{\sigma}\right)=\left(1-\left(1+\frac{\gamma}{\sigma}\right)e^{-\frac{1}{\sigma}}\right)\frac{\sigma\left(\psi'(1-0)-\psi'(1)\right)}{\psi(\sigma)},$$

а також беручи до уваги нерівність

$$1-e^{-v}-\gamma v e^{-v}\leq\frac{v}{\sigma}+v^2,\ v\geq 0, \tag{19}$$

маємо

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|\leq\frac{K}{t^2\sigma\psi(\sigma)}+\frac{1}{\pi t^2}\left(\int\limits_0^{1/\sigma}+\int\limits_{1/\sigma}^{1}+\int\limits_1^\infty\right)|\tau''(v)|dv. \tag{20}$$

Оскільки, згідно з (5), при достатньо великих σ має місце нерівність $\dfrac{1}{\sigma}<\dfrac{2\gamma-1}{\gamma}$, то для $v\in\left[0,\dfrac{1}{\sigma}\right]$ виконується нерівність $v<\dfrac{2\gamma-1}{\gamma}$, або, що те саме,

$$-1+2\gamma-\gamma v>0. \tag{21}$$

Далі, для $0<\gamma<1$

$$1-\gamma+\gamma v>0,\quad v\geq 0. \tag{22}$$

На підставі (22) для функції $k(v)=1-[1+\gamma v]\,e^{-v}$ маємо $k'(v)>0$. Звідси

$$1-[1+\gamma v]\,e^{-v}>0,\quad v\geq 0. \tag{23}$$

Із співвідношень (18), (21)–(23), враховуючи, що функція $\psi(\sigma v)$ є додатною, зростаючою, опуклою донизу на відрізку $\left[0,\dfrac{1}{\sigma}\right]$, при достатньо великих σ отримуємо

$$\tau''(v)>0,\quad v\in\left[0,\frac{1}{\sigma}\right]. \tag{24}$$

З нерівностей $\gamma<1,\ 1-\gamma<\dfrac{1}{\sigma}$, а також (19), (24) випливає

$$\int\limits_0^{1/\sigma}|\tau''(v)|dv=\tau'\left(\frac{1}{\sigma}-0\right)=O\left(\frac{1}{\sigma\psi(\sigma)}\right),\quad \sigma\to\infty. \tag{25}$$

Оцінимо другий та третій інтеграли з правої частини співвідношення (20). Скориставшись розробленим у [24] методом, неважко показати справедливість при $\sigma\to\infty$ оцінок

$$\int\limits_{1/\sigma}^{1}|\tau''(v)|dv=O\left(\frac{1}{\sigma\psi(\sigma)}+\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\int\limits_1^\sigma v\psi(v)dv\right), \tag{26}$$

$$\int\limits_1^\infty|\tau''(v)|dv=O\left(1\right). \tag{27}$$

Об'єднавши формули (20), (25) – (27), при $\sigma\to\infty$ отримаємо

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\tau(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right| = O\left(\frac{1}{\sigma\psi(\sigma)}+\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\int\limits_{1}^{\sigma}v\psi(v)dv\right)\frac{1}{t^2}.$$

Звідси, з огляду (8), знаходимо оцінку величини $\omega(\sigma)$:

$$\int\limits_{|t|\geq\frac{\sigma\pi}{2}}|\hat{\tau}_{\beta}(t)|\,dt = O\left(\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}+\frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)}\int\limits_{1}^{\sigma}v\psi(v)dv\right).$$

Враховуючи останню оцінку та співвідношення (7), отримуємо рівність (9).

Теорему доведено.

Зауважимо, що оцінки для верхніх меж наближень функцій із класів $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ за допомогою бігармонічних операторів Пуассона в метриці простору $\hat{C}$ встановлено в роботі авторів [5].

Із теореми випливають наступні твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай виконуються умови теореми,* $\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\neq 0$ *і* $\lim_{v\to\infty}\dfrac{\psi(v)}{v\,|\psi'(v)|}=\infty$, $\psi'(v)=\psi'(v+0)$. *Тоді при* $\sigma\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1},B_{\sigma}\right)_{\hat{1}} = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}dv+O\left(\psi(\sigma)\right).$$

***Наслідок* 2.** *Нехай* $\psi\in\mathfrak{A}_0$, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\neq 0$, *функція* $v^2\psi(v)$ *опукла вгору або донизу на* $[b,\infty)$, $b\geq 1$,

$$\lim_{v\to\infty}v^2\psi(v)=\infty,\qquad \lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\int\limits_{1}^{\sigma}v\psi(v)dv=\infty.$$

Тоді при $\sigma\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1},B_{\sigma}\right)_{\hat{1}} = \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_{1}^{\sigma}v\psi(v)dv+O\left(\psi(\sigma)\right).$$

***Наслідок* 3.** *Нехай* $\psi\in\mathfrak{A}_0$, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\neq 0$, *функція* $v^2\psi(v)$ *опукла донизу на* $[b,\infty)$, $b\geq 1$,

$$\lim_{v\to\infty}v^2\psi(v)=K<\infty,\qquad \lim_{\sigma\to\infty}\int\limits_{1}^{\sigma}v\psi(v)dv=\infty.$$

Тоді при $\sigma\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1},B_{\sigma}\right)_{\hat{1}} = \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_{1}^{\sigma}v\psi(v)dv+O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right).$$

Зауважимо, що при виконанні умов наслідків 1 – 3 асимптотичні рівності, що в них наведені, дають розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для бігармонічних операторів Пуассона B_{σ} на класах $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ у метриці простору $\hat{L}_1$.

Література

1. *Степанец А. И.* Классы функций, заданные на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102 – 112.
2. *Степанец А. И.* Классы функций, заданные на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 210 – 222.
3. *Степанец А. И.* Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 2. – 468 с.
4. *Степанец А. И.* Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
5. *Kharkevych Yu. I., Zhyhallo T. V.* Approximation of functions from the class $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric // Ukr. Math. J. – 2008. – **60**, № 5. – P. 769 – 798.
6. *Петров В. А.* Бигармонический интеграл Пуассона // Лит. мат. сб. – 1967. – **7**, № 1. – С. 137 – 142.
7. *Hembars'ka S. B.* Tangential limit values of a biharmonic Poisson integral in a disk // Ukr. Math. J. – 1997. – **49**, № 9. – P. 1317 – 1323.
8. *Rukasov V. I.* Approximations of functions defined on the real axis by means of de la Vallee-Poussin operators // Ukr. Math. J. – 1992. – **44**, № 5. – P. 615 – 623.
9. *Rukasov V. I., Chaichenko S. O.* Approximation by de la Vallee-Poussin operators on the classes of functions locally summable on the real axis // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, № 7. – P. 1126 – 1138.
10. *Kal'chuk I. V.* Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Weierstrass operators // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 9. – P. 1342 – 1363.
11. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 5. – С. 995 – 998.
12. *Pych P.* On a biharmonic function in unit dise // Ann. pol. math. – 1968. – **20**, № 3. – P. 203 – 213.
13. *Фалалеев Л. П.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $\mathrm{Lip}_1 1$ от одного сингулярного интеграла // Теоремы вложения и их приложения: Мат. всесоюз. симп. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1976. – С. 163 – 167.
14. *Zhigallo K. M., Kharkevych Yu. I.* On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2000. – **52**, № 7. – P. 1113 – 1117.
15. *Zhyhallo K. M., Kharkevych Yu. I.* Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2002. – **54**, № 9. – P. 1462 – 1470.
16. *Kharkevych Yu. I., Kal'chuk I. V.* Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 8. – P. 1224 – 1237.
17. *Zhyhallo K. M., Kharkevych Yu. I.* Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, № 3. – P. 399 – 413.
18. *Zhyhallo K. M., Kharkevych Yu. I.* Approximation of functions from the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2011. – **63**, № 7. – P. 1083 – 1844.
19. *Канієв С.* Точна оцінка відхилення в середньому бігармонічних в крузі функцій від їх граничних значень // Доп. АН УРСР. – 1964. – № 4. – С. 451 – 453.
20. *Заставный В. П.* Точная оценка приближения некоторых классов дифференцируемых функций сверточными операторами // Укр. мат. вісн. – 2010. – **7**, № 3. – С. 409 – 433.
21. *Кальчук І. В., Харкевич Ю. І.* Апроксимативні властивості бігармонічних інтегралів Пуассона на класах $W^r_\beta H^\alpha$ // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 11. – С. 1493 – 1504.
22. *Kharkevych Yu. I., Zhyhallo T. V.* Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals // Ukr. Math. J. – 2004. – **56**, № 9. – P. 1509 – 1525.
23. *Баусов Л. И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I // Изв. вузов. Математика. – 1965. – **46**, № 3. – С. 15 – 31.
24. *Zhyhallo K. M., Kharkevych Yu. I.* Approximation of (ψ, β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2012. – **63**, № 12. – P. 1820 – 1107.

Одержано 27.11.16