УДК 517.5

А. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ЛИНЕЙНЫЕ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

We establish the exact-order estimates for the trigonometric widths of Nikol'skii – Besov $B^r_{\infty,\theta}$ and Sobolev $W^r_{\infty,\alpha}$ classes of periodic multivariable functions in the space L_q, $1 < q < \infty$. The behavior of the linear widths of Nikol'skii – Besov $B^r_{p,\theta}$ classes in the space L_q is investigated for certain relations between the parameters p and q.

Встановлено точні за порядком оцінки тригонометричних поперечників класів Нікольського – Бєсова $B^r_{\infty,\theta}$ і Соболєва $W^r_{\infty,\alpha}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q, $1 < q < \infty$. Досліджено поведінку лінійних поперечників класів Нікольського – Бєсова $B^r_{p,\theta}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q.

1. Введение. В настоящей работе продолжается исследование тригонометрических и линейных поперечников классов Никольского – Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных, которые изучались в работах [1 – 5]. Более подробно о рассматриваемых классах функций и их аппроксимативных характеристиках будет говориться ниже, а сначала приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — d-мерное пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ и $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$ — скалярное произведение элементов x, $y \in \mathbb{R}^d$. Через $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [0, 2\pi)$, обозначим пространство 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty.$$

Далее будем предполагать, что для $f \in L_p(\pi_d)$ выполнено условие

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

Множество таких функций будем обозначать через $L^0_p(\pi_d)$.

Пусть $V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, обозначает ядро Валле Пуссена вида

$$V_l(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{l} \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k-l}{l} \right) \cos kt$$

(при $l = 1$ вторая сумма полагается равной нулю).

Сопоставим каждому вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j) \right)$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, положим

$$A_s(f, x) = (f * A_s)(x),$$

где $*$ обозначает операцию свертки.

Будем говорить, что функция $f \in L_p^0(\pi_d)$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$, $1 \le p \le \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, если выполнены условия

$$\left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \tag{1}$$

при $1 \le \theta < \infty$ и

$$\sup_s 2^{(s,r)} \|A_s(f, \cdot)\|_p \le 1 \tag{1$'$}$$

при $\theta = \infty$.

Заметим, что при этом величины в левых частях (1) и $(1')$ эквивалентны нормам $\|f\|_{B_{p,\theta}^r}$, $1 \le \theta < \infty$, и $\|f\|_{B_{p,\infty}^r} \equiv \|f\|_{H_p^r}$ при $\theta = \infty$ пространств $B_{p,\theta}^r$ и H_p^r соответственно.

В случае $1 < p < \infty$ можно записать эквивалентное определение классов $B_{p,\theta}^r$, заменив „блоки” $A_s(f, \cdot)$ на другие. С этой целью для векторов $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, и $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, d}$, положим

$$\rho(s) = \left\{ k = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1, d} \right\}$$

и для $f \in L_1^0(\pi_d)$ обозначим

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

где

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

— коэффициенты Фурье функции f.

Тогда при $p \in (1, \infty)$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, с точностью до абсолютных постоянных, классы $B_{p,\theta}^r$ можно определить следующим образом:

$$B_{p,\theta}^r = \left\{ f \colon \|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}$$

при $1 \le \theta < \infty$ и

$$B_{p,\infty}^r = \left\{ f \colon \|f\|_{B_{p,\infty}^r} = \sup_s 2^{(s,r)} \|\delta_s(f, \cdot)\|_p \le 1 \right\}.$$

Пусть $F_r(x, \alpha)$ — многомерные аналоги ядер Бернулли, т. е.

$$F_r(x,\alpha)=2^d\sum_k\prod_{j=1}^d k_j^{-r_j}\cos\left(k_j\,x_j-\frac{\alpha_j\,\pi}{2}\right),\qquad r_j>0,\quad \alpha_j\in\mathbb{R},$$

и в сумме содержатся только те векторы $k=(k_1,\ldots,k_d)$, для которых $k_j>0$, $j=\overline{1,d}$. Тогда через $W^r_{p,\alpha}$ обозначим класс функций f, представимых в виде

$$f(x)=\varphi(x)*F_r(x,\alpha)=(2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d}\varphi(y)F_r(x-y,\alpha)dy,$$

$$\varphi\in L_p(\pi_d),\quad \|\varphi\|_p\le 1.$$

С подробной информацией о классах (пространствах) $B^r_{p,\theta}$, $1\le\theta<\infty$, H^r_p и $W^r_{p,\alpha}$, а также историей их исследования можно ознакомиться в монографиях [6 – 10], а также в работах [11, 12].

Всюду ниже будем предполагать, что координаты векторов $r=(r_1,\ldots,r_d)$, которые содержатся в определении рассматриваемых классов функций, упорядочены следующим образом: $0<r_1=\ldots=r_\nu<r_{\nu+1}\le\ldots\le r_d$. Вектору $r=(r_1,\ldots,r_d)$ сопоставим вектор $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_d)$, $\gamma_j=\dfrac{r_j}{r_1}$, $j=\overline{1,d}$, которому, в свою очередь, сопоставляется вектор $\gamma'=(\gamma'_1,\ldots,\gamma'_d)$, где $\gamma_j=\gamma'_j$ при $j=\overline{1,\nu}$ и $1<\gamma'_j<\gamma_j$ при $j=\overline{\nu+1,d}$.

Полученные результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. При этом для двух неотрицательных последовательностей $(a_n)_{n=1}^\infty$ и $(b_n)_{n=1}^\infty$ соотношение (порядковое неравенство) $a_n\ll b_n$ означает, что существует постоянная $C>0$, не зависящая от n, такая, что $a_n\le C\,b_n$. Соотношение $a_n\asymp b_n$ равносильно тому, что $a_n\ll b_n$ и $b_n\ll a_n$. Отметим, что постоянные, которые будут содержаться в порядковых соотношениях и определениях функций, могут зависеть от определенных параметров. Эти параметры иногда будем указывать, в остальных случаях они будут понятны из контекста. Если A — конечное множество, то через $|A|$ будем обозначать количество его элементов.

Приведем сначала определения аппроксимативных характеристик, которые исследуются в первой части работы.

Пусть $F\subset L_q(\pi_d)$ — некоторый функциональный класс. Тогда тригонометрический поперечник класса F в пространстве L_q (обозначается $d^\top_M(F,L_q)$) определяется по формуле

$$d^\top_M(F,L_q)=\inf_{\theta_M}\sup_{f\in F}\inf_{t(\theta_M,\cdot)}\|f(\cdot)-t(\theta_M,\cdot)\|_q,$$

где

$$t(\theta_M,x)=\sum_{j=1}^M c_je^{i(k^j,x)},\quad \theta_M=\{k^1,\ldots,k^M\}$$

— всевозможные наборы векторов $k^j=(k^j_1,\ldots,k^j_d)$, $j=\overline{1,M}$, из целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$, c_j — произвольные комплексные числа. Поперечник $d^\top_M(F,L_q)$ введен в 1974 г. Р. С. Исмагиловым [13] и впоследствии, для разных функциональных классов, изучался во многих работах (см., например, [1, 5, 9, 10]).

В комментариях к полученным в настоящей работе результатам будет упоминаться о близкой к $d_M^{\top}(F, L_q)$ аппроксимативной характеристике, которая для $F \subset L_q(\pi_d)$ определяется по формуле

$$e_M(F)_q = \sup_{f \in F} e_M(f)_q = \sup_{f \in F} \inf_{\theta_M, c_j} \|f(\cdot) - t(\theta_M, \cdot)\|_q.$$

Величина $e_M(f)_2$ для функций одной переменной, в несколько более общем случае, введена С. Б. Стечкиным [14]. С историей исследования величин $e_M(F)_q$ для тех или иных классов функций можно ознакомиться в [9, 10, 11, 15].

Заметим, что согласно определению

$$d_M^{\top}(F, L_q) \geq e_M(F, L_q). \tag{2}$$

Теперь приведем определение еще двух аппроксимативных характеристик, о которых будет идти речь во второй части работы.

Пусть W — центрально-симметричное множество в нормированном пространстве $\mathfrak{X}$. Тогда величина

$$d_M(W, \mathfrak{X}) = \inf_{L_M} \sup_{w \in W} \inf_{u \in L_M} \|w(\cdot) - u(\cdot)\|_{\mathfrak{X}},$$

где $L_M \subset \mathfrak{X}$ — подпространства размерности M, называется колмогоровским поперечником множества W в пространстве $\mathfrak{X}$. Поперечник $d_M(W, \mathfrak{X})$ введен в 1936 г. А. Н. Колмогоровым [16].

Линейный поперечник множества W в пространстве $\mathfrak{X}$ определяется по формуле

$$\lambda_M(W, \mathfrak{X}) = \inf_{A} \sup_{w \in W} \|w(\cdot) - A\,w(\cdot)\|_{\mathfrak{X}},$$

где инфимум берется по всем действующим в $\mathfrak{X}$ линейным операторам А, размерность области значений которых не превышает M. Поперечник $\lambda_M(W, \mathfrak{X})$ введен в 1960 г. В. М. Тихомировым [17].

Легко видеть, что

$$d_M(W, \mathfrak{X}) \leq \lambda_M(W, \mathfrak{X}) \tag{3}$$

и, кроме того, для функционального класса $F \subset L_q(\pi_d)$

$$d_M(F, L_q) \leq d_M^{\top}(F, L_q). \tag{4}$$

Исследования колмогоровских и линейных поперечников классов $W^r_{p,\alpha}$, H^r_p и $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных имеют богатую историю, с которой можно ознакомиться, например, в монографиях [9, 10], а также в работах [11, 18].

2. Тригонометрические поперечники классов $B^r_{\infty,\theta}$ и $W^r_{\infty,\alpha}$ в пространстве L_q. В этой части работы исследуются тригонометрические поперечники $d_M^{\top}(B^r_{\infty,\alpha}, L_q)$ и $d_M^{\top}(W^r_{\infty,\alpha}, L_q)$ при $1 < q < \infty$. Установленные точные по порядку оценки этих величин дополняют результаты, которые получены в [1, 9, 10].

Теорема 1. *Пусть* $2 \le q < \infty,\ r_1 > 0,\ 1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$d_M^{\top}(B^r_{\infty,\theta}, L_q) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + (1/2 - 1/\theta)_+}, \tag{5}$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$.

(Здесь и далее символ $\log$ обозначает логарифм по основанию 2.)

Доказательство. Оценка сверху в (5) реализуется с помощью приближения функций $f \in B^r_{q,\theta}$ в пространстве $L_q,\ 2 \le q < \infty$, их ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S_n^{\gamma'}(f,x) = \sum_{(s,\gamma') \le n} \delta_s(f,x)$.

В [19] установлено, что при $r_1 > 0,\ 2 \le q < \infty$ и $1 \le \theta < \infty$

$$\sup_{f \in B^r_{q,\theta}} \|f(\cdot) - S_n^{\gamma'}(f,\cdot)\|_q \asymp 2^{-n r_1} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}. \tag{6}$$

Следовательно, подобрав по заданному M число $n \in \mathbb{N}$ из условия $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ и воспользовавшись (6), будем иметь

$$d_M^{\top}(B^r_{\infty,\theta}, L_q) \ll d_M^{\top}(B^r_{q,\theta}, L_q) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + (1/2-1/\theta)_+}, \quad 1 \le \theta < \infty.$$

Аналогично, используя в случае $\theta = \infty$ оценку (см. [9, с. 35])

$$\sup_{f \in H^r_q} \|f(\cdot) - S_n^{\gamma'}(f,\cdot)\|_q \asymp 2^{-n r_1} n^{(\nu-1)/2}, \quad 2 \le q < \infty, \quad r_1 > 0,$$

находим

$$d_M^{\top}(H^r_{\infty}, L_q) \ll d_M^{\top}(H^r_q, L_q) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + 1/2}.$$

Переходя к доказательству в (5) оценки снизу, отметим, что в случае $1 \le \theta < \infty$ она следует (согласно (4)) из соответствующей оценки колмогоровского поперечника $d_M(B^r_{\infty,\theta}, L_q)$ [1]:

$$d_M^{\top}(B^r_{\infty,\theta}, L_q) \ge d_M(B^r_{\infty,\theta}, L_q) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + (1/2-1/\theta)_+}.$$

Если же $\theta = \infty$, то искомая оценка снизу является следствием оценки колмогоровского поперечника $d_M(H^r_{\infty}, L_q)$ [20]:

$$d_M^{\top}(H^r_{\infty}, L_q) \ge d_M(H^r_{\infty}, L_q) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + 1/2}, \quad q > 1, \quad r_1 > 0.$$

Теорема доказана.

Следующее утверждение указывает порядок тригонометрического поперечника $d_M^{\top}(B^r_{\infty,\theta}, L_q)$ в случае $1 < q < 2$, но при определенных ограничениях на параметр θ.

Теорема 2. *Пусть* $1 < q < 2,\ r_1 > 0$. *Тогда при* $2 \le \theta \le \infty$

$$d_M^{\top}(B^r_{\infty,\theta}, L_q) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + 1/2 - 1/\theta}. \tag{7}$$

Доказательство. Оценка сверху следует из (5) в силу неравенства $\|\cdot\|_q < \|\cdot\|_2,\ 1 < q < 2$.

Что касается оценки снизу в (7), то она следует из оценок колмогоровских поперечников $d_M(B^r_{\infty,\theta}, L_q),\ 1 \le \theta < \infty$, и $d_M(H^r_{\infty}, L_q)$, которые получены в [1] и [20] соответственно.

Теорема доказана.

В дополнение к теоремам 1, 2 приведем соответствующее утверждение для классов $W^r_{\infty,\alpha}$.

Теорема 3. *Пусть* $1 < q < \infty$, $r_1 > 0$. *Тогда*

$$d_M^{\top}(W^r_{\infty,\alpha}, L_q) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1}. \tag{8}$$

Доказательство. В силу (4) оценка снизу следует из соотношения [21]

$$d_M(W^r_{\infty,\alpha}, L_q) \gg M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1}.$$

Оценка сверху в (8) реализуется с помощью приближения функций $f \in W^r_{q,\alpha}$ в пространстве L_q, $1 < q < \infty$, их ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S^{\gamma}_n(f,x) = \sum_{(s,\gamma)\le n} \delta_s(f,x)$. Соответствующий результат имеет вид (см. [9, с. 34])

$$\sup_{f\in W^r_{q,\alpha}} \|f(\cdot) - S^{\gamma}_n(f,\cdot)\|_q \asymp 2^{-n\,r_1}, \qquad 1 < q < \infty, \quad r_1 > 0.$$

Отсюда при $M \asymp 2^n\, n^{\nu-1}$ в силу вложения $W^r_{q,\alpha} \subset W^r_{\infty,\alpha}$, $1 < q < \infty$, имеем

$$d_M^{\top}(W^r_{\infty,\alpha}, L_q) \ll d_M^{\top}(W^r_{q,\alpha}, L_q) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

Теорема доказана.

Подытоживая полученные результаты, приведем некоторые комментарии.

В связи с соотношением (2) представляется интересным сравнить оценки тригонометрических поперечников и наилучших M-членных тригонометрических приближений классов $B^r_{\infty,\theta}$ в пространстве L_q. С этой целью напомним, что в работе [15] (теорема 3.2) и обзорной статье [11] (теорема 7.28) приведено следующее утверждение.

Теорема A. *Пусть* $1 < q \le p < \infty$, $p \ge 2$, $r_1 > 0$. *Тогда при* $1 \le \theta \le \infty$ *справедлива оценка*

$$e_M(B^r_{p,\theta})_q \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1+1/2-1/\theta)_+}. \tag{9}$$

Следует заметить, что на самом деле такая же оценка имеет место и для классов $B^r_{\infty,\theta}$ при $1 \le \theta \le \infty$ и $1 < q < \infty$. Иными словами, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $1 < q < \infty$, $r_1 > 0$. *Тогда при* $1 \le \theta \le \infty$

$$e_M(B^r_{\infty,\theta})_q \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1+1/2-1/\theta)_+}. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $\theta \in [1,\infty)$. Тогда оценка сверху в (10) следует из (9) согласно вложению $B^r_{\infty,\theta} \subset B^r_{q,\theta}$, $1 < q < \infty$, т. е.

$$e_M(B^r_{\infty,\theta})_q \ll e_M(B^r_{q,\theta})_q \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1+1/2-1/\theta)_+}.$$

Оценка снизу величины $e_M(B^r_{\infty,\theta})_q$, $1 \le \theta < \infty$, получена по ходу доказательства теоремы 3.2 [15] (см. оценку (3.28)).

В случае $\theta = \infty$ оценка снизу для $e_M(H^r_{\infty})_q$, $1 < q < \infty$, установлена в [21], а соответствующая ей оценка сверху следует из теоремы 1 в силу соотношения (2).

Теорема доказана.

Теперь, сопоставляя теоремы 1, 2, 4, приходим к следующему выводу.

При $2 \leq \theta \leq \infty,\ 1 < q < \infty,\ r_1 > 0$ имеем

$$e_M(B^r_{\infty,\theta})_q \asymp d^{\top}_M(B^r_{\infty,\theta}, L_q).$$

Если же $1 \leq \theta < 2$ и $2 \leq q < \infty$, то, как следует из теорем 2, 4,

$$e_M(B^r_{\infty,\theta})_q \asymp d^{\top}_M(B^r_{\infty,\theta}, L_q)$$

при $r_1 > \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{2}$ и

$$e_M(B^r_{\infty,\theta})_q \asymp d^{\top}_M(B^r_{\infty,\theta}, L_q)(\log^{\nu-1} M)^{1/2-1/\theta}$$

при $0 < r_1 \leq \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{2}$.

Таким образом, в последнем случае при $\nu \geq 2$ проявляется эффект несовпадения порядков величин $e_M(B^r_{\infty,\theta})_q$ и $d^{\top}_M(B^r_{\infty,\theta}, L_q)$.

***Замечание* 1.** Вопрос о порядке величины $e_M(W^r_{\infty,\alpha})_q,\ 1 \leq q \leq \infty,\ r_1 > 0$, остается открытым (см. [11], открытый вопрос 7.4).

В заключение этой части работы приведем несколько утверждений, касающихся порядков исследуемых аппроксимативных характеристик в пространствах L_∞ и L_1.

Теорема 5. *Пусть* $r_1 > 0$. *Тогда*

$$d^{\top}_M(B^r_{\infty,1}, L_\infty) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1}. \tag{11}$$

Доказательство. Оценка снизу следует из теоремы 1. Чтобы установить в (11) оценку сверху, подберем число $n \in \mathbb{N}$ из соотношения $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ и рассмотрим для $f \in B^r_{\infty,1}$ приближающий полином вида

$$t_n(x) = \sum_{(s,\gamma)\leq n} A_s(f, x).$$

Тогда для $\|f(\cdot) - t_n(\cdot)\|_\infty$ можем записать

$$\|f(\cdot) - t_n(\cdot)\|_\infty = \left\| \sum_{(s,\gamma)>n} A_s(f, \cdot) \right\|_\infty \leq$$

$$\leq \sum_{(s,\gamma)>n} \|A_s(f, \cdot)\|_\infty = \sum_{(s,\gamma)>n} 2^{(s,r)} \|A_s(f, \cdot)\|_\infty 2^{-(s,r)} \leq$$

$$\leq 2^{-n r_1} \sum_{(s,\gamma)>n} 2^{(s,r)} \|A_s(f, \cdot)\|_\infty \ll 2^{-n r_1} \|f(\cdot)\|_{B^r_{\infty,1}} \leq 2^{-n r_1}.$$

Отсюда с учетом соотношения $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ приходим к искомой оценке.

Теорема доказана.

***Замечание* 2.** Вопрос о порядке величины $e_M(B^r_{\infty,1})_\infty$ остается, по-видимому, открытым.

Следующие два утверждения относятся к одномерному случаю, поэтому нам понадобятся соответствующие обозначения.

Пусть $T(2^n)$ — множество тригонометрических полиномов вида

$$T(2^n) = \left\{ t\colon t(x) = \sum_{k=-2^n}^{2^n} c_k\, e^{ikx} \right\}.$$

Для $f \in L_q[\,-\pi, \pi\,]$, $1 \le q \le \infty$, через

$$E_{2^n}(f)_q = \inf_{t \in T(2^n)} \|f(\cdot) - t(\cdot)\|_q$$

обозначим ее наилучшее приближение полиномами из $T(2^n)$. Соответственно, если $F \subset \subset L_q[\,-\pi, \pi\,]$ — некоторый класс функций, то положим

$$E_{2^n}(F)_q = \sup_{f \in F} E_{2^n}(f)_q.$$

Теорема 6. *Пусть* $d = 1$, $1 \le p \le \infty$, $r_1 > 0$. *Тогда при* $1 \le \theta \le \infty$

$$d_M^{\top}(B^{r_1}_{p,\theta}, L_1) \asymp e_M(B^{r_1}_{p,\theta})_1 \asymp M^{-r_1}. \tag{12}$$

Доказательство. В силу (2) оценку сверху в (12) достаточно доказать для $d_M^{\top}(B^{r_1}_{p,\theta}, L_1)$, а снизу — для $e_M(B^{r_1}_{p,\theta})_1$.

Итак, воспользовавшись оценкой

$$E_{2^n}(B^{r_1}_{p,\theta})_1 \asymp 2^{-n\,r_1},$$

(см. [2] при $1 < p \le \infty$ и [22] при $p = 1$), где $n \in \mathbb{N}$ подобрано из соотношения $2^{n-1} \le M < < 2^n$, будем иметь

$$e_M(B^{r_1}_{p,\theta})_1 \le d_M^{\top}(B^{r_1}_{p,\theta}, L_1) \ll E_{2^n}(B^{r_1}_{p,\theta})_1 \asymp M^{-r_1}.$$

Для оценки снизу величины $e_M(B^{r_1}_{p,\theta})_1$ нам понадобится вспомогательное утверждение.

Пусть $\mathcal{B}^N_\infty$ — подмножество полиномов $t \in T(N)$, $N \in \mathbb{N}$, для которых $\|t\|_\infty \le 1$. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма А [23]. *Пусть* $N \in \mathbb{N}$ *и* $m \le \dfrac{N}{2}$. *Тогда при* $1 \le q \le \infty$

$$e_m(\mathcal{B}^N_\infty)_q \ge C_1, \tag{13}$$

где $C_1 > 0$ *— некоторая постоянная.*

Чтобы воспользоваться леммой А, покажем, что

$$C_2\, 2^{-nr_1}\, \mathcal{B}^{2^n}_\infty \subset B^{r_1}_{\infty,1}, \quad C_2 > 0. \tag{14}$$

Пусть $t \in \mathcal{B}^{2^n}_\infty$ и V_l, $l \in \mathbb{N}$ — одномерное ядро Валле Пуссена, которое было определено выше. Тогда, приняв во внимание, что $\|V_l\|_1 \le C_3$, $C_3 > 0$, можем записать

$$\|2^{-nr_1}\, t(\cdot)\|_{B^{r_1}_{\infty,1}} \asymp 2^{-nr_1} \sum_{s=1}^{n} 2^{sr_1} \|A_s(t, \cdot)\|_\infty =$$

$$= 2^{-nr_1} \sum_{s=1}^{n} 2^{sr_1} \|t(\cdot) * (V_{2^s}(\cdot) - V_{2^{s-1}}(\cdot))\|_\infty \le$$

$$\leq 2^{-nr_1}\sum_{s=1}^{n}2^{sr_1}\|t(\cdot)\|_\infty(\|V_{2^s}(\cdot)\|_1+\|V_{2^{s-1}}(\cdot)\|_1)\ll 2^{-nr_1}\sum_{s=1}^{n}2^{sr_1}\leq C_4.$$

Отсюда следует (14).

Таким образом, при $2^{n-2}\leq M\leq 2^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$, в силу (14) имеем

$$d_M^\top(B^{r_1}_{p,\theta},L_1)\geq d_M^\top(B^{r_1}_{\infty,\theta},L_1)\geq e_M(B^{r_1}_{\infty,\theta})_1\geq$$
$$\geq e_M(B^{r_1}_{\infty,1})_1\gg 2^{-nr_1}e_M(\mathcal{B}^{2^n}_\infty)_1\gg 2^{-nr_1}\asymp M^{-r_1}. \tag{15}$$

Теорема доказана.

***Замечание* 3.** В многомерном случае $(d\geq 2)$ известно следующее утверждение (см. [10], теорема 3.3.3).

Теорема Б. *Пусть $d\geq 2$ и выполнены условия*:

а) $1<p<2,\ 1\leq\theta<p$ *и* $0<r_1<\dfrac{1}{\theta}-\dfrac{1}{p}$;

б) $2\leq p\leq\infty,\ 1\leq\theta<2$ *и* $0<r_1<\dfrac{1}{\theta}-\dfrac{1}{2}$.

Тогда

$$e_M(B^r_{p,\theta})_1\asymp M^{-r_1}.$$

Теорема 7. *Пусть $d=1,\ 1\leq\theta\leq\infty,\ r_1>0$. Тогда*

$$d_M^\top(B^{r_1}_{\infty,\theta},L_\infty)\asymp e_M(B^{r_1}_{\infty,\theta})_\infty\asymp M^{-r_1}. \tag{16}$$

Доказательство. Оценки сверху в (16) являются следствием соотношения

$$E_{2^n}(B^{r_1}_{p,\theta})_\infty\asymp 2^{-n(r_1-1/p)},\quad 1\leq p\leq\infty,\qquad r_1>\frac{1}{p},\quad 1\leq\theta\leq\infty$$

(см. [2], теорема 2.3).

Соответствующая оценка снизу для величины $e_M(B^{r_1}_{\infty,\theta})_\infty$ следует из (15).

Теорема доказана.

***Замечание* 4.** В связи с соотношениями (16) отметим, что в [5] в двумерном случае получен следующий результат.

Теорема В. *Пусть $d=2,\ r=(r_1,r_1),\ r_1>0$. Тогда при $2\leq\theta\leq\infty$*

$$d_M^\top(B^r_{\infty,\theta},L_\infty)\asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+1-1/\theta}.$$

Порядки величин $e_M(B^r_{\infty,\theta})_\infty$ при $d\geq 2$ неизвестны.

3. Линейные поперечники классов $\boldsymbol{B^r_{p,\theta}}$ в пространстве $\boldsymbol{L_q}$. В этом пункте уточняются оценки снизу линейных поперечников классов $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_q для некоторых областей изменения параметров $p,\ q,\ r_1$ и θ. Полученные результаты в сочетании с оценками сверху, установленными в работе [4], позволили записать в соответствующих случаях точные по порядку оценки величин $\lambda_M(B^r_{p,\theta},L_q)$.

Для формулировки и доказательства полученных утверждений нам понадобятся некоторые обозначения и вспомогательный результат.

Пусть l^m_p, $m\in\mathbb{N}$, $1\leq p\leq\infty$, обозначает пространство $\mathbb{R}^m$, снабженное нормой

$$\|x\|_{l_p^m} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1 \le i \le m} |x_i|, & p = \infty. \end{cases}$$

Через B_p^m обозначим единичный шар в l_p^m, т. е. множество элементов $x \in l_p^m$, для которых $\|x\|_{l_p^m} \le 1$. Далее, для $m, n \in \mathbb{N}$ и $1 \le p, q \le \infty$ через $l_{p,q}^{m,n}$ будем обозначать пространство $\mathbb{R}^{mn}$ с нормой

$$\|x\|_{l_{p,q}^{m,n}} = \left(\sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k \in \triangle_l} |x_k|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}, \tag{17}$$

где

$$\triangle_l = \big\{ k \in \mathbb{N} \colon (l-1)m \le k < l\, m,\ l = \overline{1, n} \big\}.$$

Соответственно через $B_{p,q}^{m,n}$ обозначим единичный шар в $l_{p,q}^{m,n}$. Заметим, что при $q = \infty$ либо $p = \infty$ подразумевается естественная модификация нормы (17) и, кроме того, в случае $p = q$ справедливо тождество

$$\|x\|_{l_{p,q}^{m,n}} \equiv \|x\|_{l_p^{mn}}.$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема Г [24]. *Для $m, n \in \mathbb{N}$ выполняется оценка*

$$d_{[\frac{mn}{2}]}(B_{1,\infty}^{m,n}, l_{2,1}^{m,n}) \ge C_5 n,$$

где $C_5 > 0$ — абсолютная постоянная.

Теперь перейдем к формулировке и доказательству полученных результатов.

Теорема 8. *Пусть $1 < p \le 2$, $p' < q < \infty$, $r_1 > 1 - \dfrac{1}{q}$. Тогда при $\theta \in (q, \infty)$ справедлива оценка*

$$\lambda_M(B_{p,\theta}^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - 1/2 + 1/q} (\log^{\nu-1} M)^{1/q - 1/\theta}, \tag{18}$$

где $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = 1$.

Доказательство. Оценка сверху получена в [4]. При доказательстве в (18) оценки снизу до определенного места нужно повторить схему рассуждений, которая применялась в [4]. Следовательно, мы остановимся только на том изменении в заключительной части доказательства, которое позволило получить более точную оценку снизу величины $\lambda_M(B_{p,\theta}^r, L_q)$.

Итак, предварительно заметим, что искомую оценку достаточно получить при $p = 2$ и $\nu = d$.

Выберем число $\mu \in \mathbb{N}$ из соотношения $M \asymp 2^\mu \mu^{d-1}$ так, чтобы количество элементов множества $Q_\mu = \bigcup_{s \in \Omega_\mu} \rho(s)$ было не меньше $2M$ (здесь Ω_μ — набор векторов $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, вида $\Omega_\mu = \{s \colon (s, 1) = \mu\}$). Заметим, что $|\Omega_\mu| \asymp \mu^{d-1}$.

В [4] с помощью метода дискретизации получено соотношение

$$\lambda_M(B_{2,\theta}^r, L_q) \gg 2^{-\mu(r_1 - 1/2 + 1/q)} |\Omega_\mu|^{1/q - 1/\theta - 1}\, d_M\Big(B_{1,\infty}^{2^\mu, |\Omega_\mu|},\ l_{2,1}^{2^\mu, |\Omega_\mu|}\Big). \tag{19}$$

Далее, применив к последнему множителю правой части (19) теорему Г и выполнив соответствующие преобразования, будем иметь

$$\lambda_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \gg \lambda_M(B^r_{2,\theta}, L_q) \gg 2^{-\mu(r_1-1/2+1/q)}\,|\Omega_\mu|^{1/q-1/\theta-1}\,|\Omega_\mu| =$$

$$= 2^{-\mu(r_1-1/2+1/q)}\,|\Omega_\mu|^{1/q-1/\theta} \asymp (M^{-1}\log^{d-1} M)^{r_1-1/2+1/q}\,(\log^{d-1} M)^{1/q-1/\theta}.$$

Теорема доказана.

Прокомментируем полученный результат.

Во-первых, порядок поперечников $\lambda_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ для тех значений параметров $p,\ q,\ r_1,\ \theta$, которые рассмотрены в теореме 8, не реализуется M-мерным подпространством тригонометрических полиномов с „номерами” гармоник из ступенчатых гиперболических крестов [19].

Во-вторых, оценка (18) отличается по порядку от соответствующей оценки колмогоровского поперечника $d_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ (см., например, [10], § 4.2).

Теорема 9. *Пусть* $2 \le p < q < \infty,\ r_1 > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$. *Тогда при* $\theta \in (q, \infty)$ *справедлива оценка*

$$\lambda_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1-1/p+1/q}\,(\log^{\nu-1} M)^{1/q-1/\theta}. \tag{20}$$

Доказательство. Оценка сверху получена в [4]. Для установления в (20) оценки снизу, воспользовавшись вложением $B^{r-1/p+1/2}_{2,\theta} \subset B^r_{p,\theta}$ и теоремой 8, будем иметь

$$\lambda_M\big(B^r_{p,\theta}, L_q\big) \gg \lambda_M\big(B^{r-1/p+1/2}_{2,\theta}, L_q\big) \gg$$

$$\gg (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1-1/p+1/q}\,(\log^{\nu-1} M)^{1/q-1/\theta}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что в (20), в отличие от оценки (18), порядок величины $\lambda_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ реализуется M-мерным подпространством тригонометрических полиномов с „номерами” гармоник из ступенчатых гиперболических крестов [19]. Кроме того, при выполнении условий теоремы 9 на параметры p, q, θ и при $r_1 > \dfrac{1/p - 1/q}{1 - 2/q}$ поперечники $\lambda_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ и $d_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ (см. [10], § 4.2) имеют разные порядки. Отметим также, что при $2 \le p < q < \infty,\ 1 \le \theta < \infty$ и $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} < r_1 \le \dfrac{1/p - 1/q}{1 - 2/q}$ порядок колмогоровского поперечника $d_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ не известен.

В заключение, объединив теоремы 8, 9 с соответствующими оценками, полученными в [3] для других значений параметра θ, можно сформулировать два общих утверждения.

Теорема 8$'$. *Пусть* $1 < p \le 2,\ p' < q < \infty,\ r_1 > 1 - \dfrac{1}{q}$. *Тогда при* $\theta \in [2, \infty)$ *имеет место оценка*

$$\lambda_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1-1/2+1/q}\,(\log^{\nu-1} M)^{(1/q-1/\theta)_+},$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Теорема 9$'$. *Пусть* $2 \le p < q < \infty,\ r_1 > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$. *Тогда при* $\theta \in [2, \infty)$ *справедливо соотношение*

$$\lambda_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1-1/p+1/q}\,(\log^{\nu-1} M)^{(1/q-1/\theta)_+}.$$

***Замечание* 5.** Вопрос о порядках линейных поперечников $\lambda_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ при $\theta \in [1, 2)$ и условиях теорем 8$'$, 9$'$ на другие параметры в случае $d \ge 2$ остается открытым.

Литература

1. *Романюк А. С.* Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Мат. сб. – 2006. – **197**, № 1. – С. 71 – 96.
2. *Романюк А. С.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных // Мат. сб. – 2008. – **199**, № 2. – С. 93 – 114.
3. *Романюк А. С.* Поперечники и наилучшее приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. – 2011. – **37**. – P. 181 – 213.
4. *Романюк А. С.* К вопросу о линейных поперечниках классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 7. – С. 970 – 982.
5. *Романюк А. С.* Энтропийные числа и поперечники классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 10. – С. 1403 – 1417.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
7. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
8. *Аманов Т. И.* Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. – Алма-Ата: Наука, 1976. – 224 с.
9. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
10. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **93**. – 352 с.
11. *Ding D., Temlyakov V. N., Ullrich T.* Hyperbolic cross approximation // arXiv: 1601. 03978 v 2[math. NA] 2 Dec. 2016.
12. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
13. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161 – 178.
14. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37 – 40.
15. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61 – 100.
16. *Kolmogoroff A.* Über die beste Annüherung von Funktionen einer gegeben Funktionenklasse // Ann. Math. – 1936. – **37**. – S. 107 – 111.
17. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
18. *Галеев Э. М.* Линейные поперечники классов Гельдера – Никольского периодических функций многих переменных // Мат. заметки. – 1996. – **59**, № 2. – С. 189 – 199.
19. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398 – 1408.
20. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **189**. – С. 138 – 168.
21. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Мат. заметки. – 1994. – **56**, № 5. – С. 57 – 86.
22. *Романюк А. С.* Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения // Мат. сб. – 2004. – **195**, № 2. – С. 91 – 116.
23. *De Vore R. A., Temlyakov V. N.* Nonlinear approximation by trigonometric sums // Fourier Anal. Appl. – 1995. – **2**. – № 1. – P. 29 – 48.
24. *Малыхин Ю. В., Рютин К. С.* Произведение октаэдров плохо приближается в метрике $l_{2,1}$ // Мат. заметки. – 2017. – **101**, № 1. – С. 85 – 90.

Получено 20.02.17