УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ),
Т. А. Степанюк (Східноєвроп. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк; Техн. ун-т м. Граці, Австрія)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ УЗАГАЛЬНЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА СУМАМИ ФУР'Є В МЕТРИКАХ ПРОСТОРІВ L_s*

In metrics of the spaces L_s, $1 \leq s \leq \infty$, we establish asymptotic equalities for the upper bounds of approximations by Fourier sums in the classes of generalized Poisson integrals of periodic functions that belong to the unit ball of space L_1.

В метриках пространств L_s, $1 \leq s \leq \infty$, найдены асимптотические равенства для верхних граней приближений суммами Фурье на классах обобщенных интегралов Пуассона периодических функций, принадлежащих единичному шару пространства L_1.

Дана стаття тісно пов'язана з роботами авторів [1, 2]. В ній продовжуються дослідження апроксимативних властивостей сум Фур'є на класах узагальнених інтегралів Пуассона $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$.

Нехай L_s, $1 \leq s < \infty$, — простір 2π-періодичних сумовних в s-й степені на $[0, 2\pi)$ функцій f, в якому норму задано формулою $\|f\|_s = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^s dt\right)^{1/s}$; L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій f з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|$; C — простір 2π-періодичних неперервних функцій f, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$.

Позначимо через $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$, $\alpha > 0$, $r > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, множину всіх 2π-періодичних функцій, котрі при всіх $x \in \mathbb{R}$ зображуються за допомогою згортки (див., наприклад, [3, с. 144])

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha,r,\beta}(x-t)\varphi(t)dt, \qquad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B^0_p, \tag{1}$$

$$B^0_p = \left\{\varphi\colon \|\varphi\|_p \leq 1, \varphi \perp 1\right\}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

з узагальненими ядрами Пуассона вигляду

$$P_{\alpha,r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad \alpha > 0, \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Функції f вигляду (1) називають узагальненими інтегралами Пуассона функцій φ. При $r = 1$ класи $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$ є відомими класами інтегралів Пуассона.

При довільних $r > 0$ класи $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$ належать до множини D^∞ нескінченно диференційовних 2π-періодичних функцій, тобто $C^{\alpha,r}_{\beta,p} \subset D^\infty$ (див., наприклад, [3, с. 139; 4, с. 1408]). Більш того, як випливає з теореми 1 роботи [5], при довільних $r > 0$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $1 \leq p \leq \infty$ має місце вкладення $C^{\alpha,r}_{\beta,p} \subset \mathcal{J}_{1/r}$, де $\mathcal{J}_a, a > 0$, — відомі класи Жевре

$$\mathcal{J}_a = \left\{ f \in D^\infty\colon \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{\|f^{(k)}\|_C}{(k!)^a}\right)^{1/k} < \infty \right\}.$$

* Частково підтримано проектом F5503 Австрійського наукового фонду FWF (частина спеціальної програми досліджень (SFB) „Методи квазі-Монте-Карло: теорія і застосування”).

При $r \geq 1$ класи $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$ складаються з функцій f, які допускають регулярне продовження у смугу $|\mathrm{Im}\, z| \leq c,\ c > 0,$ комплексної площини (див., наприклад, [3, с. 141]), тобто є класами аналітичних функцій. При $r > 1$ класи $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$ складаються з функцій, регулярних в усій комплексній площині, тобто є класами цілих функцій (див., наприклад, [3, с. 142]).

Розглянемо апроксимативні характеристики вигляду

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_s = \sup_{f \in C^{\alpha,r}_{\beta,p}} \big\| f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\big\|_s, \qquad r > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq p, \quad s \leq \infty, \quad (2)$$

де $S_{n-1}(f;\cdot)$ — частинні суми Фур'є порядку $n-1$ функції f.

На даний час порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_s$ вигляду (2) відомі при всіх допустимих значеннях параметрів $\alpha,\ r,\ \beta,\ p$ і s (див. роботи [6, с. 60; 7–9] і наведену в них бібліографію). У даній роботі будемо досліджувати величини (2) при $p = 1$ і $r \in (0,1)$ з метою одержання для них асимптотичних при $n \to \infty$ рівностей.

При $s = \infty$ асимптотичні рівності для величин вигляду (2) відомі при всіх $r > 0,\ \alpha > 0,$ $\beta \in \mathbb{R}$ і $1 \leq p \leq \infty$ (див. [1, 2]). В зазначеному випадку норму $\|\cdot\|_\infty$ у (2) можна замінити на $\|\cdot\|_C$, тобто $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_\infty = \mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_C$.

Щодо питання про сильну асимптотику при $n \to \infty$ величини (2) у випадку $p = 1$ зазначимо наступне.

Випадок $r = 1,\ s = 1$ дослідив С. М. Нікольський [10, с. 221], встановивши асимптотичну рівність

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,1}_{\beta,1}\big)_1 = e^{-\alpha n}\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(e^{-\alpha}) + O(1)n^{-1}\right), \quad (3)$$

де

$$\mathbf{K}(q) := \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 t}}, \quad q \in (0,1),$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно параметрів n і β.

Згодом рівність (3) уточнив С. Б. Стєчкін в [11, с. 139], встановивши асимптотичну формулу

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,1}_{\beta,1}\big)_1 = e^{-\alpha n}\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(e^{-\alpha}) + O(1)\frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})n}\right), \qquad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

в якій величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

У роботі [12] при $r = 1$ і довільних $1 \leq s \leq \infty$ для величин $\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_s,\ \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$, встановлено рівність

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,1}_{\beta,1}\big)_s = e^{-\alpha n}\left(\frac{2}{\pi^{1+1/s}}\|\cos t\|_s K(s, e^{-\alpha}) + O(1)\frac{e^{-\alpha}}{n(1-e^{-\alpha})^{\sigma(s)}}\right), \quad (5)$$

де

$$\sigma(s) := \begin{cases} 1, & s = 1, \\ 2, & s \in (1, \infty], \end{cases} \quad (6)$$

$$K(s,q) := \frac{1}{2^{1+1/s}}\left\|(1 - 2q\cos t + q^2)^{-1/2}\right\|_s, \quad q \in (0,1), \quad (7)$$

а величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно $n,\ s,\ \alpha$ і β. При $s=1$, з урахуванням рівності $K(1,q)=\mathbf{K}(q)$, оцінка (5) збігається з оцінкою (4).

Як показано у [13], при $1\le s<\infty$ має місце рівність

$$K(s,q)=\frac{\pi^{1/s}}{2}F^{1/s}\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2};1;q^2\right),\quad q\in(0,1),$$

де $F(a,b;c;z)$ — гіпергеометрична функція Гаусса

$$F(a,b;c;z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!},$$

$$(x)_k:=x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1).$$

У [14, с. 250] доведено, що для величин $\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,1}_{\beta,1}\big)_s$ при $s=2$ виконується рівність

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,1}_{\beta,1}\big)_2=\frac{1}{\sqrt{\pi(1-e^{-2\alpha})}}e^{-\alpha n},\qquad \alpha>0,\quad \beta\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{8}$$

Рівність (8) уточнює асимптотичну рівність (5) при $s=2$ в такому сенсі: зазначена рівність (5) при $s=2$ залишається правильною, якщо в ній обнулити залишковий член. Отже, взявши до уваги формули (6)–(8) та очевидну рівність $F(1,1;1;q^2)=\dfrac{1}{1-q^2}$, $q\in(0,1)$, для всіх $\alpha>0,\ \beta\in\mathbb{R}$ і $1\le s\le\infty$ можемо записати формулу

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_s=\begin{cases} e^{-\alpha n}\left(\dfrac{\|\cos t\|_s}{\pi}F^{1/s}\Big(\dfrac{s}{2},\dfrac{s}{2};1;e^{-\alpha}\Big)+O(1)\dfrac{\xi(s)e^{-\alpha}}{n(1-e^{-\alpha})^{\sigma(s)}}\right), & 1\le s<\infty,\\[2ex] e^{-\alpha n}\left(\dfrac{1}{\pi(1-e^{-\alpha})}+O(1)\dfrac{e^{-\alpha}}{n(1-e^{-\alpha})^2}\right), & s=\infty,\end{cases}$$

в якій

$$\xi(s)=\begin{cases}0, & s=2,\\ 1, & s\in[1,2)\cup(2,\infty),\end{cases}$$

$\sigma(s)$ означена формулою (6), а $O(1)$ — величина, що рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

Крім того, як випливає з [14], при всіх $r>0$ має місце рівність

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}e^{-2\alpha k^r}\right)^{1/2},\qquad \alpha>0,\quad r>0,\quad \beta\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

У випадку $r>1$ і $s=1$ асимптотично точні оцінки для величин $\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_s$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, були одержані О. І. Степанцем [15, с. 155], який показав, що для довільних $n\in\mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_1=\left(\frac{4}{\pi}+\gamma_n\right)e^{-\alpha n^r}, \tag{10}$$

де

$$|\gamma_n|<2\left(1+\frac{1}{\alpha r n^{r-1}}\right)e^{-\alpha r n^{r-1}}.$$

Згодом С. О. Теляковський [16, с. 517] при $r > 1,\ \alpha > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$ встановив асимптотичну рівність

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_1 = \frac{4}{\pi} e^{-\alpha n^r} + O(1)\left(e^{-\alpha(2(n+1)^r - n^r)} + \left(1 + \frac{1}{\alpha r (n+2)^r}\right) e^{-\alpha(n+2)^r}\right), \tag{11}$$

де $O(1)$ — величина, що рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів. Формула (11) містить більш точну оцінку залишкового члена в асимптотичному розкладі величин $\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_1$ у порівнянні з оцінкою (10).

При $r > 1$ і довільних $1 \le s \le \infty$ асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_s,\ \alpha > 0,$ $\beta \in \mathbb{R}$, знайдені в [12, с. 1408] і мають вигляд

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_s = e^{-\alpha n^r}\left(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi} + O(1)\left(1 + \frac{1}{\alpha r n^{r-1}}\right) e^{-\alpha r n^{r-1}}\right), \tag{12}$$

де величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів. При $s = 1$ формула (12) випливає із (10) і (11).

Що ж стосується випадку $0 < r < 1$, то асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_s,$ $\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$, за винятком наведеного випадку $s = 2$, були відомі у випадку $s = 1$ (див. [15, с. 153])

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_1 = \frac{4}{\pi^2} e^{-\alpha n^r} \ln n^{1-r} + O(1) e^{-\alpha n^r}, \tag{13}$$

а також у випадку $s = \infty$ (див. [1, 2])

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_\infty = e^{-\alpha n^r} n^{1-r}\left(\frac{1}{\pi \alpha r} + O(1)\left(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}}\right)\right),$$

де $O(1)$ — величини, що рівномірно обмежені відносно параметрів n і β.

Зауважимо, що на класах $C^{\alpha,r}_{\beta,1},\ \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$, при $0 < r < 1$ у випадку наближень у метриках просторів $L_s,\ 1 < s \le \infty$, суми Фур'є забезпечують порядок найкращих наближень тригонометричними поліномами, тобто (див., наприклад, [7, 8])

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_s \asymp E_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_s \asymp e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/s'}, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1,$$

де

$$E_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_s = \sup_{f \in C^{\alpha,r}_{\beta,1}} \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_s,$$

$\mathcal{T}_{2n-1}$ — підпростір усіх тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку не вищого за $n-1$.

У даній роботі встановлено асимптотично непокращувані оцінки величин $\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_s,\ \alpha > 0,$ $\beta \in \mathbb{R}$, при довільних $0 < r < 1$ і $1 \le s \le \infty$. При цьому в отриманих асимптотичних рівностях в явному вигляді записано оцінки залишкового члена через параметри задачі, що може бути корисним для практичного застосування.

При довільних фіксованих $\alpha > 0,\ r \in (0,1)$ і $1 \le p \le \infty$ через $n_0 = n_0(\alpha, r, p)$ позначимо найменший із номерів n такий, що

$$\frac{1}{\alpha r}\frac{1}{n^r} + \frac{\alpha r \chi(p)}{n^{1-r}} \le \begin{cases} \dfrac{1}{14}, & p = 1, \\[2mm] \dfrac{1}{(3\pi)^3}\dfrac{p-1}{p}, & 1 < p < \infty, \\[2mm] \dfrac{1}{(3\pi)^3}, & p = \infty, \end{cases} \tag{14}$$

де $\chi(p) = p$ при $1 \leq p < \infty$ і $\chi(p) = 1$ при $p = \infty$; через $n_1 = n_1(\alpha, r)$ — найменший із номерів n такий, що

$$\frac{1}{\alpha r}\frac{1}{n^r}\left(1+\ln\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)\right)+\frac{\alpha r}{n^{1-r}} \leq \frac{1}{(3\pi)^3}. \tag{15}$$

Також при довільних $v > 0$ і $1 \leq s \leq \infty$ покладемо

$$J_s(v) := \left\|\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right\|_{L_s[0,v]},$$

де

$$\|f\|_{L_s[a,b]} = \begin{cases} \left(\int\limits_a^b |f(t)|^s dt\right)^{1/s}, & 1 \leq s < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|, & s = \infty. \end{cases}$$

У прийнятих позначеннях має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $0 < r < 1$, $1 \leq s \leq \infty$, $\alpha > 0$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді при* $n \geq n_0(\alpha, r, s')$, $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1$, *справджується оцінка*

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_s = e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/s'}\Bigg(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+1/s}(\alpha r)^{1/s'}} J_s\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)+$$

$$+\gamma^{(1)}_{n,s}\left(\frac{1}{(\alpha r)^{1+1/s'}} J_s\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)\frac{1}{n^r}+\frac{1}{n^{(1-r)/s'}}\right)\Bigg), \tag{16}$$

де для величини $\gamma^{(1)}_{n,s} = \gamma^{(1)}_{n,s}(\alpha, r, \beta)$ *виконується нерівність* $\big|\gamma^{(1)}_{n,s}\big| \leq (14\pi)^2$.

Доведення. Згідно з (1) і (2)

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_s = \frac{1}{\pi}\sup_{\varphi\in B^0_1}\left\|\int\limits_{-\pi}^{\pi} P^{(n)}_{\alpha,r,\beta}(x-t)\varphi(t)dt\right\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty, \tag{17}$$

де

$$P^{(n)}_{\alpha,r,\beta}(t) := \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r}\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad 0 < r < 1, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Далі скористаємось наступним твердженням з роботи [12, c. 1398].

Лема 1. *Нехай* $K \in L_s$, $1 \leq s \leq \infty$. *Тоді для величини*

$$\mathcal{E}(K)_s := \sup_{\varphi\in B^0_1}\left\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\cdot - t)K(t)dt\right\|_s$$

виконуються співвідношення

$$\frac{1}{2\pi}\sup_{h\in\mathbb{R}}\big\|K(\cdot) - K(\cdot + h)\big\|_s \leq \mathcal{E}(K)_s \leq \frac{1}{\pi}\|K\|_s. \tag{18}$$

Покладаючи в умовах леми 1 $K(t) = P^{(n)}_{\alpha,r,\beta}(t)$ і враховуючи рівність (17), з (18) отримуємо співвідношення

$$\frac{1}{2\pi}\sup_{h\in\mathbb{R}}\left\|P^{(n)}_{\alpha,r,\beta}(\cdot) - P^{(n)}_{\alpha,r,\beta}(\cdot+h)\right\|_s \le \mathcal{E}\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_s \le \frac{1}{\pi}\left\|P^{(n)}_{\alpha,r,\beta}\right\|_s, \quad 1\le s\le\infty. \tag{19}$$

Згідно з [1, 2], при довільних $r\in(0,1)$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\le s\le\infty$, $\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s'}=1$ і $n\in\mathbb{N}$ при $n\ge n_0(\alpha,r,s')$ мають місце співвідношення

$$\frac{1}{\pi}\big\|P^{(n)}_{\alpha,r,\beta}\big\|_s = e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/s'}\Bigg(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+1/s}(\alpha r)^{1/s'}} J_s\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) +$$

$$+\delta^{(1)}_{n,s}\left(\frac{1}{(\alpha r)^{1+1/s'}} J_s\Big(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\Big)\frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{(1-r)/s'}}\right)\Bigg), \tag{20}$$

$$\frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\big\|P^{(n)}_{\alpha,r,\beta}(\cdot)-\lambda)\big\|_s = e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/s'}\Bigg(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+1/s}(\alpha r)^{1/s'}} J_s\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) +$$

$$+\delta^{(2)}_{n,s}\left(\frac{1}{(\alpha r)^{1+1/s'}} J_s\Big(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\Big)\frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{(1-r)/s'}}\right)\Bigg), \tag{21}$$

$$\frac{1}{2\pi}\sup_{h\in\mathbb{R}}\big\|P^{(n)}_{\alpha,r,\beta}(\cdot) - P^{(n)}_{\alpha,r,\beta}(\cdot+h)\big\|_s = e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/s'}\Bigg(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+1/s}(\alpha r)^{1/s'}} J_s\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) +$$

$$+\delta^{(3)}_{n,s}\left(\frac{1}{(\alpha r)^{1+1/s'}} J_s\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)\frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{(1-r)/s'}}\right)\Bigg), \tag{22}$$

де для величин $\delta^{(i)}_{n,s} = \delta^{(i)}_{n,s}(\alpha,r,\beta)$, $i=\overline{1,3}$, виконується нерівність $\big|\delta^{(i)}_{n,s}\big| \le (14\pi)^2$.

З формул (19), (20) і (22) випливає (16).

Теорему 1 доведено.

Наведемо деякі наслідки з теореми 1.

При $1<s<\infty$ з теореми 1 випливає таке твердження.

Теорема 2. *Нехай* $0<r<1$, $1<s<\infty$, $\alpha>0$ *і* $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді при* $n\ge n_0(\alpha,r,s')$, $\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s'}=1$, *справджується оцінка*

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_s = e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/s'}\Bigg(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+1/s}(\alpha r)^{1/s'}} F^{1/s}\left(\frac{1}{2},\frac{3-s}{2};\frac{3}{2};1\right) +$$

$$+\gamma^{(2)}_{n,s}\left(\left(1+\frac{(\alpha r)^{(s-1)/s'}}{s-1}\right)\frac{1}{n^{(1-r)/s'}} + \frac{(s')^{1/s}}{(\alpha r)^{1+1/s'}}\frac{1}{n^r}\right)\Bigg), \tag{23}$$

де $F(a,b;c;z)$ — *гіпергеометрична функція Гаусса, а для величини* $\gamma^{(2)}_{n,s} = \gamma^{(2)}_{n,s}(\alpha,r,\beta)$ *виконується нерівність* $\big|\gamma^{(2)}_{n,s}\big| \le (14\pi)^2$.

Доведення. Згідно з теоремою 1, для всіх $1<s<\infty$, $0<r<1$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$ при $n\ge n_0(\alpha,r,s')$, $\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s'}=1$, має місце оцінка

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_s = e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/s'}\left(\frac{\|\cos t\|_s}{(\alpha r)^{1/s'}\pi^{1+1/s}}\left(\int\limits_0^{\pi n^{1-r}/\alpha r}\frac{dt}{(t^2+1)^{s/2}}\right)^{1/s} +\right.$$

$$+\gamma_{n,s}^{(1)}\left(\frac{1}{(\alpha r)^{1+1/s'}}\left(\int\limits_0^{\pi n^{1-r}/\alpha r}\frac{dt}{(t^2+1)^{s/2}}\right)^{1/s}\frac{1}{n^r}+\frac{1}{n^{(1-r)/s'}}\right)\Bigg), \tag{24}$$

де $\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s'}=1$ і величина $\gamma_{n,s}^{(1)}=\gamma_{n,s}^{(1)}(\alpha,r,\beta)$ така, що $\left|\gamma_{n,s}^{(1)}\right|\le(14\pi)^2$.

У [2] доведено, що при $n\ge n_0(\alpha,r,s')$ виконується оцінка

$$\left(\int\limits_0^{\pi n^{1-r}/\alpha r}\frac{dt}{(t^2+1)^{s/2}}\right)^{1/s}=\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{(t^2+1)^{s/2}}\right)^{1/s}+\frac{\Theta_{\alpha,r,s',n}^{(1)}}{s-1}\left(\frac{\alpha r}{\pi n^{1-r}}\right)^{s-1}, \tag{25}$$

де $\left|\Theta_{\alpha,r,s',n}^{(1)}\right|<2$.

Легко бачити, що (див., наприклад, [17, с. 962])

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{(t^2+1)^{s/2}}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{-1/2}dt}{(t+1)^{s/2}}=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{s-1}{2}\right),\quad 1<s<\infty, \tag{26}$$

де

$$B(x,y):=\int\limits_0^{\infty}\frac{u^{x-1}du}{(u+1)^{x+y}},\quad x,y>0,$$

— ейлеровий інтеграл 1-го роду.

Враховуючи формулу [17, с. 964]

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=B(y,x),$$

де

$$\Gamma(z)=\int\limits_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt,\quad \operatorname{Re}z>0,$$

— ейлеровий інтеграл 2-го роду, на підставі теореми Гаусса [17, с. 1056]

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

при $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3-s}{2}$, $c=\dfrac{3}{2}$ з (26) отримуємо

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{(t^2+1)^{s/2}}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}=F\left(\frac{1}{2},\frac{3-s}{2};\frac{3}{2};1\right).$$

Отже, для довільних $1<s<\infty$ має місце рівність

$$\left(\int\limits_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^{s/2}}\right)^{1/s} = F^{1/s}\left(\frac{1}{2}, \frac{3-s}{2}; \frac{3}{2}; 1\right). \tag{27}$$

Враховуючи оцінку

$$\left(\int\limits_0^{\pi n^{1-r}/\alpha r} \frac{dt}{(t^2+1)^{s/2}}\right)^{1/s} \leq \left(\int\limits_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^{s/2}}\right)^{1/s} < \left(1+\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t^s}\right)^{1/s} < (s')^{1/s}, \tag{28}$$

з формул (24), (25), (27) і (28) отримуємо

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_s = e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/s'}\left(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+1/s}(\alpha r)^{1/s'}} F^{1/s}\left(\frac{1}{2}, \frac{3-s}{2}; \frac{3}{2}; 1\right) + \right.$$

$$\left. + \gamma^{(3)}_{n,s}\left(\frac{1}{s-1}\frac{(\alpha r)^{(s-1)/s'}}{n^{(1-r)(s-1)}} + \frac{(s')^{1/s}}{(\alpha r)^{1+1/s'}}\frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{(1-r)/s'}}\right)\right), \tag{29}$$

де для величини $\gamma^{(3)}_{n,s} = \gamma^{(3)}_{n,s}(\alpha, r, \beta)$ виконується нерівність $\big|\gamma^{(3)}_{n,s}\big| \leq (14\pi)^2$.

Оскільки

$$\frac{1}{n^{(1-r)/s'}} = \frac{1}{n^{(1-r)(s-1)/s}} > \frac{1}{n^{(1-r)(s-1)}},$$

то

$$\frac{1}{s-1}\frac{(\alpha r)^{(s-1)/s'}}{n^{(1-r)(s-1)}} + \frac{1}{n^{(1-r)/s'}} \leq \left(1 + \frac{(\alpha r)^{(s-1)/s'}}{s-1}\right)\frac{1}{n^{(1-r)/s'}}. \tag{30}$$

З (29) і (30) випливає (23).

Теорему 2 доведено.

З теореми 2 при $s = 2$ одержуємо таке твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай $0 < r < 1$, $\alpha > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $n \geq n_0(\alpha, r, 2)$ справджується оцінка*

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_2 = \frac{e^{-\alpha n^r}}{\sqrt{2\pi\alpha r}} n^{(1-r)/2}\left(1 + \gamma^{(1)}_n\left(\left(\alpha r + \sqrt{\alpha r}\right)\frac{1}{n^{(1-r)/2}} + \frac{\sqrt{2}}{\alpha r}\frac{1}{n^r}\right)\right), \tag{31}$$

де для величини $\gamma^{(1)}_n = \gamma^{(1)}_n(\alpha, r, \beta)$ виконується нерівність $\big|\gamma^{(1)}_n\big| \leq 392\pi^{5/2}$.

Доведення. Дійсно, покладаючи в рівності (23) $s = s' = 2$ та враховуючи, що $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1\right) = \frac{\pi}{2}$, при $n \geq n_0(\alpha, r, 2)$ отримуємо

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_2 = e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/2}\left(\frac{\|\cos t\|_2}{\pi^{3/2}(\alpha r)^{1/2}}\left(F^{1/2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \gamma^{(2)}_{n,2}\left(\left(1 + \sqrt{\alpha r}\right)\frac{1}{n^{(1-r)/2}} + \frac{\sqrt{2}}{(\alpha r)^{3/2}}\frac{1}{n^r}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{e^{-\alpha n^r}}{\sqrt{2\pi\alpha r}} n^{(1-r)/2}\left(1 + \gamma^{(2)}_{n,2}\sqrt{2\pi}\left(\left(1 + \sqrt{\alpha r}\right)\frac{\sqrt{\alpha r}}{n^{(1-r)/2}} + \frac{\sqrt{2}}{\alpha r}\frac{1}{n^r}\right)\right).$$

Наслідок 1 доведено.

Утім більш точну, ніж (31), оцінку можна одержати виходячи з рівності (9). А саме, з урахуванням (9), а також формули (10) з роботи [1] при $\alpha > 0$, $r \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \geq n_0(\alpha, r, 2)$ має місце оцінка

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{k=n}^{\infty} e^{-2\alpha k^r}\right)^{1/2} = \frac{e^{-\alpha n^r}}{\sqrt{2\pi\alpha r}} n^{(1-r)/2}\left(1 + \gamma_n^{(2)}\left(\frac{1}{2\alpha r}\frac{1}{n^r} + \frac{\alpha r}{n^{1-r}}\right)\right),$$

в якій для величини $\gamma_n^{(2)} = \gamma_n^{(2)}(\alpha, r)$ виконується нерівність $\big|\gamma_n^{(2)}\big| \leq \sqrt{\dfrac{54\pi^3}{54\pi^3 - 1}}$.

При $s = 1$ теорема 1 дозволяє уточнити асимптотичну рівність (13). Має місце таке твердження.

Теорема 3. *Нехай* $0 < r < 1$, $\alpha > 0$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді при* $n \geq n_1(\alpha, r)$ *справджується оцінка*

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_1 = \frac{4}{\pi^2} e^{-\alpha n^r} \ln\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) + \gamma_{n,1}^{(2)} e^{-\alpha n^r}, \tag{32}$$

де для величини $\gamma_{n,1}^{(2)} = \gamma_{n,1}^{(2)}(\alpha, r, \beta)$ *виконується нерівність* $\big|\gamma_{n,1}^{(2)}\big| \leq 20\pi^4$.

Доведення. Із (14) і (15) випливає, що $n_1(\alpha, r) > n_0(\alpha, r, 1)$. Тому, поклавши в рівності (16) $s = 1$ та врахувавши оцінку

$$\int_0^{\pi n^{1-r}/\alpha r} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \int_1^{\pi n^{1-r}/\alpha r} \frac{dt}{t} + \left(\int_0^{\pi n^{1-r}/\alpha r} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} - \int_1^{\pi n^{1-r}/\alpha r} \frac{dt}{t}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) + \Theta_{\alpha,r,n}, \quad 0 < \Theta_{\alpha,r,n} < 1,$$

при $n \geq n_1(\alpha, r)$ отримаємо

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,1}\big)_1 = e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi n^{1-r}/\alpha r} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} + \gamma_{n,\infty}^{(1)}\left(\frac{1}{\alpha r}\frac{1}{n^r}\int_0^{\pi n^{1-r}/\alpha r} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} + 1\right)\right) =$$

$$= e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) + \frac{4}{\pi^2}\Theta_{\alpha,r,n} + \gamma_{n,\infty}^{(1)}\left(\frac{1}{\alpha r}\frac{1}{n^r}\ln\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) + \frac{\Theta_{\alpha,r,n}}{\alpha r n^r} + 1\right)\right). \tag{33}$$

Підрахунки показують, що при $n \geq n_1(\alpha, r)$

$$\frac{4}{\pi^2}\Theta_{\alpha,r,n} + |\gamma_{n,\infty}^{(1)}|\left(\frac{1}{\alpha r}\frac{1}{n^r}\ln\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) + \frac{\Theta_{\alpha,r,n}}{\alpha r n^r} + 1\right) \leq 20\pi^4, \tag{34}$$

а тому з (33) і (34) отримуємо (32).

Теорему 3 доведено.

Зі співвідношення (32) випливає встановлена О. І. Степанцем асимптотична рівність (13).

Насамкінець зауважимо, що з урахуванням формул (27) і (30) один із основних результатів роботи [1] — оцінку (8) з теореми 2 — можна сформулювати у вигляді такого твердження.

Теорема 4. *Нехай* $0 < r < 1$, $1 < p < \infty$, $\alpha > 0$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді при* $n \geq n_0(\alpha, r, p)$ *справджується оцінка*

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_\infty = e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/p}\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+1/p'}(\alpha r)^{1/p}} F^{1/p'}\left(\frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1\right) + \right.$$

$$+\gamma_{n,p}^{(2)}\left(\left(1+\frac{(ar)^{(p'-1)/p}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{(1-r)/p}}+\frac{(p)^{1/p'}}{(\alpha r)^{1+1/p}}\frac{1}{n^r}\right)\Bigg),$$

в якій $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, $F(a,b;c;z)$ — *гіпергеометрична функція Гаусса, а для величини* $\gamma_{n,p}^{(2)}=$ $=\gamma_{n,p}^{(2)}(\alpha,r,\beta)$ *виконується нерівність* $\left|\gamma_{n,p}^{(2)}\right|\leq(14\pi)^2$.

Література

1. *Сердюк А. С., Степанюк Т. А.* Рівномірні наближення сумами Фур'є на класах згорток з узагальненими ядрами Пуассона // Доп. НАН України. – 2016. – № 11. – С. 10 – 16.
2. *Serdyuk A. S., Stepaniuk T. A.* Uniform approximations by Fourier sums on classes of generalized Poisson integrals // Arxiv preprint, arXiv:1603.01891. – 2016. – 31 p.
3. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. I. – 427 с.
4. *Степанець О. І., Сердюк А. С., Шидліч А. Л.* Про деякі нові критерії нескінченної диференційовності періодичних функцій // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 10. – С. 1399 – 1409.
5. *Степанец А. И., Сердюк А. С., Шидлич А. Л.* О связи классов (ψ,β)-дифференцируемых функций с классами Жевре // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 1. – С. 140 – 145.
6. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. II. – 427 с.
7. *Сердюк А. С., Степанюк Т. А.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних функцій // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 1. – С. 255 – 282.
8. *Сердюк А. С., Степанюк Т. А.* Оцінки найкращих наближень класів нескінченно диференційовних функцій у рівномірній та інтегральній метриках // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 9. – С. 1244 – 1256.
9. *Serdyuk A. S., Stepanyuk T. A.* Estimates for approximations by Fourier sums, best approximations and best orthogonal trigonometric approximations of the classes of (ψ,β)-differentiable functions // Bull. Soc. Sci. et Lett. Łódź. – 2016. – **66**, № 2.
10. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207 – 256.
11. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126 – 151.
12. *Сердюк А. С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в метриці простору L_p // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 10. – С. 1395 – 1408.
13. *Сердюк А. С.* Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах періодичних аналітичних функцій // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 5. – С. 698 – 712.
14. *Сердюк А. С., Соколенко І. В.* Наближення лінійними методами класів $(\psi,\overline{\beta})$-диференційовних функцій // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 1. – С. 245 – 254.
15. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
16. *Теляковский С. А.* О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 4. – С. 510 – 518.
17. *Грандштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Одержано 09.12.16