УДК 517.5

С. А. Пичугов (Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. трансп.)

НЕРАВЕНСТВА ТИПА НИКОЛЬСКОГО – СТЕЧКИНА ДЛЯ ПРИРАЩЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

In the spaces $L_\Psi[0,2\pi]$ with the metric $\rho(f,0)_\Psi = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\Psi(|f(x)|)dx,$ where Ψ is a function of the modulus-of-continuity type, we investigate an analog of the Nikol'skii – Stechkin inequalities for the increments and derivatives of trigonometric polynomials.

У просторах $L_\Psi[0,2\pi]$ з метрикою $\rho(f,0)_\Psi = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\Psi(|f(x)|)\,dx,$ де Ψ — функція типу модуля неперервності, досліджуються аналоги нерівностей Нікольського – Стєчкіна для приростів та похідних тригонометричних поліномів.

Введение. В пространствах $L_p[0,2\pi],\ 1 \le p \le \infty,$ для известного неравенства С. Н. Бернштейна для производных порядка $k,\ k=1,2,$ тригонометрических полиномов $T_n(x)$ порядка не выше $n,$

$$\|T_n^{(k)}\|_p \le n^k \|T_n\|_p, \tag{1}$$

есть различные обобщения и аналоги.

В частности, в [1] получены точные неравенства

$$\|T_n^{(k)}\|_p \le \left(\frac{n}{2}\right)^k \|\Delta^k_{\pi/n} T_n\|_p, \tag{2}$$

где $\Delta_h T_n(x) = T_n(x+h) - T_n(x),\ \Delta_h^k T_n(x) = \Delta_h\big(\Delta_h^{k-1} T_n(x)\big)$ — приращение $T_n(x)$ порядка k с шагом $h,$ а в [2] доказано точное неравенство

$$\|T_n^{(k)}\|_\infty \le \left(\frac{n}{2\sin\dfrac{nh}{2}}\right)^k \|\Delta_h^k T_n\|_\infty, \tag{3}$$

где $0 < h < \dfrac{2\pi}{n}.$

Из (1) и (2) следует неравенство

$$\omega_k\left(T_n, \frac{\pi}{n}\right)_p \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \|\Delta^k_{\pi/n} T_n\|_p, \tag{4}$$

где

$$\omega_k(T_n,h)_p = \sup_{|t|\le h} \|\Delta_t^k T_n\|_p$$

— значение в точке h модуля непрерывности T_n порядка $k.$ Для метрических пространств $L_p[0,2\pi],\ 0<p<1,$ с метрикой

$$\rho(f,0)_p := \|f\|_p := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p dx$$

аналог неравенства (1) доказан в [3, 4] в виде

$$\|T_n^{(k)}\|_p \le (C_p n)^{kp} \|T_n\|_p, \tag{5}$$

а в [5] доказано неравенство (5) с постоянной $C_p = 1$, и в этом случае неравенство является точным. В [6] получены аналоги неравенств (2), (4) в метрических пространствах $L_p[0, 2\pi]$, $0 < p < 1$, в виде

$$\|T_n^{(k)}\|_p \le (C_1(p) n)^{kp} \|\Delta^k_{\alpha_{n,p}} T_n\|_p, \tag{6}$$

$$\omega_k\left(T_n, \frac{2\pi}{n+1}\right) \le C_2(p) \|\Delta^k_{\beta_{n,p}} T_n\|_p, \tag{7}$$

где

$$\beta_{n,p} = \frac{2\pi}{2d_n^{(l)} + 1}, \qquad d_n^{(l)} = n(l+1) - l, \quad l = \left[\frac{2}{p}\right], \tag{8}$$

$$\alpha_{n,p} = \frac{2\pi}{2d_s^{(l)} + 1}, \qquad s = d_n^{(l)}. \tag{9}$$

Заметим, что величины $\alpha_{n,p}$ и $\beta_{n,p}$ имеют порядок $\dfrac{1}{n}$.

Мы установим аналоги неравенств (6), (7) в метрических пространствах $L_\Psi[0, 2\pi]$. Пусть Ω — множество функций $\Psi \colon R^1_+ \to R^1_+$, являющихся модулями непрерывности,

$$\|T_n\|_\Psi := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Psi(|T_n(x)|)\, dx.$$

Для функции $\Psi \in \Omega$ поведение ее функции растяжения

$$M_\Psi(s) := \sup_{0<t<\infty} \frac{\Psi(st)}{\Psi(t)}, \quad s \in R^1_+,$$

в случае $s \in [0, 1]$ характеризуется нижним показателем растяжения γ_Ψ, имеющим следующие свойства [7]:

а) $\gamma_\Psi \in [0, 1]$;

б) $M_\Psi(s) \ge s^{\gamma_\Psi}$, $s \in [0, 1]$;

в) $\forall \varepsilon > 0\ \exists C_\varepsilon > 0\ \forall s \in (0, 1]$:

$$M_\Psi(s) \le C_\varepsilon s^{\gamma_\Psi - \varepsilon}.$$

В [8] установлен следующий аналог неравенства С. Н. Бернштейна (5): если $\gamma_\Psi > 0$, то

$$C_3 M_\Psi(n^k) \le \sup_{T_n \ne 0} \frac{\|T_n^{(k)}\|_\Psi}{\|T_n\|_\Psi} \le C_4 M_\Psi(n^k), \tag{10}$$

где постоянные C_3, C_4 зависят от k и Ψ, но не зависят от n.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $\Psi \in \Omega,\ \gamma_\Psi > 0,\ k, n = 1, 2$. *Тогда для всех тригонометрических полиномов* $T_n(x)$ *выполняются неравенства*

$$\|\Delta_h^k T_n\|_\Psi \le C_5(k,\Psi)\big\|\Delta^k_{\beta_{2n-1,\gamma_\Psi}} T_n\big\|_\Psi, \tag{11}$$

$$\|T_n^{(k)}\|_\Psi \le C_6(k,\Psi) M_\Psi(n^k)\big\|\Delta^k_{\alpha_{2n-1,\gamma_\Psi}} T_n\big\|_\Psi \tag{12}$$

для всех $h \in (0, \beta_{2n-1,\gamma_\Psi})$, *где постоянные* C_5, C_6 *не зависят от* n, *а величины* $\alpha_{n,p}$ *и* $\beta_{n,p}$ *определены в* (8), (9).

Доказательство. С помощью функции $\upsilon(s)\colon R \to R$ такой, что:

1) $\upsilon(s) = 1$ для $s \in [-1, 1]$, $\upsilon(s) = 0$ для $|s| \ge 2$;
2) $\upsilon(-s) = \upsilon(s)$;
3) $\upsilon \in C^\infty(R)$,

определим тригонометрический полином

$$V_n(x) := \sum_{|k|<2n} \upsilon\left(\frac{k}{n}\right) e^{ikx}$$

степени не выше $2n - 1$, который является аналогом классических полиномов Валле Пуссена.

Для произвольного натурального $N, N \ge 3n$, построим на периоде $[0, 2\pi]$ систему равноотстоящих точек $x_j = 2\pi \dfrac{j}{N}$, $j = 1, \ldots, N$. Тогда для любого полинома T_n справедлива интерполяционная формула

$$T_n(x) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} T_n(x_j) V_n(x - x_j),$$

которая использовалась в [6, 8] при установлении неравенств для полиномов.

Пусть $\tau_t\colon f(x) \to f(x+t)$ — оператор сдвига на параметр t и A — произвольный линейный оператор, перестановочный с операторами сдвига τ_t, т. е. $\tau_t A = A\tau_t$ для всех операторов τ_t. Тогда

$$\tau_t A T_n(x) = A\tau_t T_n(x) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} T_n(t + x_j) A V_n(x - x_j). \tag{13}$$

Пусть еще $A1 = 0$. Поскольку

$$\frac{1}{N}\sum_{j-1}^{N} V_n(x - x_j) = 1,$$

то с помощью преобразования Абеля из (13) получаем

$$\tau_t A T_n(x) = -\sum_{j=1}^{N-1} \Delta_{x_1} T_n(t + x_j) A\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{j} V_n(x - x_j)\right). \tag{14}$$

Из определения функции растяжения следует, что $\Psi(st) \le \Psi(s) M_\Psi(t)$.

Вследствие полуаддитивности функции Ψ из (14) следует, что

$$\Psi\big(|\tau_t AT_n(x)|\big) \le \sum_{j=1}^{N-1} \Psi\big(|\Delta_{x_1} T_n(t+x_j)|\big) M_\Psi\left(\left|A\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_j)\right|\right).$$

Так как Ψ-метрика инвариантна относительно сдвигов, то

$$\|AT_n\|_\Psi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t=0}^{2\pi} \|\tau_t AT_n\|_\Psi\, dt \le$$

$$\le \|\Delta_{2\pi/N} T_n\|_\Psi \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{x=0}^{2\pi} M_\Psi\left(\left|A\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_j)\right|\right) dx. \tag{15}$$

Это неравенство выполняется для всех $N, N \ge 3n$, и линейных операторов A, $A\tau_t = \tau_t A$, $A1 = 0$.

Перейдем к установлению неравенства (11). Ясно, что достаточно ограничиться случаем $k = 1$.

Пусть в (15) $A = \Delta_h$, $h \in \left(0, \dfrac{2\pi}{N}\right)$. Тогда совокупность $\big\{(x - x_i + h, x - x_i), i = 1, \ldots, N\big\}$ является системой непересекающихся интервалов, поэтому для всех x и $j, j \le N-1$,

$$\left|\Delta_h \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right| \le \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{j} |\Delta_h V_n(x-x_i)| \le \mathrm{Var}\left(\frac{1}{N} V_n\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |V_n'(s)| ds \le \frac{2n-1}{N}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |V_n(s)| ds \le K,$$

где постоянная K не зависит от n. Мы использовали неравенство С. Н. Бернштейна в $L_1[0, 2\pi]$ и равномерную ограниченность L_1-норм полиномов Валле Пуссена.

Поскольку $M_\Psi(st) \le M_\Psi(s) M_\Psi(t)$, то

$$M_\Psi(K)^{-1} M_\Psi\left(\left|\Delta_h \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right|\right) \le M_\Psi\left(\frac{1}{K}\left|\Delta_h \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right|\right), \tag{16}$$

и аргумент M_Ψ в правой части не превышает единицу.

По условию $\gamma_\Psi > 0$, поэтому для любого $\varepsilon, \varepsilon \in (0, \gamma_\Psi)$, существует такое $C_\varepsilon > 0$, что

$$M_\Psi\left(\frac{1}{K}\left|\Delta_h \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right|\right) \le C_\varepsilon \frac{1}{K^{\gamma_\Psi-\varepsilon}}\left|\Delta_h \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right|^{\gamma_\Psi-\varepsilon},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} M_\Psi\left(\left|\Delta_h \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right|\right) dx \le C_\varepsilon \frac{M_\Psi(K)}{K^{\gamma_\Psi-\varepsilon}}\left\|\Delta_h \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right\|_{L_{\gamma_\Psi-\varepsilon}}. \tag{17}$$

Теперь применим соответствующее L_p-неравенство (7) при $p = \gamma_\Psi - \varepsilon$.

Полагаем ε настолько малым, чтобы выполнялось равенство $\left[\dfrac{2}{\gamma_\Psi - \varepsilon}\right] = \left[\dfrac{2}{\gamma_\Psi}\right]$, и пусть $N = 2d_{2n-1}^{(l)} + 1$, $d_{2n-1}^{(l)} = (2n-1)(l+1) - l$, $l = \left[\dfrac{2}{\gamma_\Psi}\right]$. Заметим, что условие $N \geq 3n$ выполнено. Тогда для всех $j \leq N-1$

$$\left\|\Delta_h \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right\|_{L_{\gamma_\Psi-\varepsilon}} \leq C_2(\gamma_\Psi-\varepsilon)\left\|\Delta_{x_1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right\|_{L_{\gamma_\Psi-\varepsilon}} =$$

$$= C_2(\gamma_\Psi-\varepsilon)\left\|\frac{1}{N}\big(V_n(x)-V_n(x-x_j)\big)\right\|_{L_{\gamma_\Psi-\varepsilon}} \leq C_2(\gamma_\Psi-\varepsilon)\frac{2}{N^{\gamma_\Psi-\varepsilon}}\|V_n\|_{L_{\gamma_\Psi-\varepsilon}}. \qquad (18)$$

Так как $v(s) \in C^\infty$, то для любого $\gamma_\Psi > 0$ [6, 8]

$$\|V_n\|_{L_{\gamma_\Psi-\varepsilon}} \leq C(\gamma_\Psi,\varepsilon)n^{\gamma_\Psi-\varepsilon-1}. \qquad (19)$$

Теперь из (15) – (19) следует, что

$$\frac{\|\Delta_h T_n\|_\Psi}{\|\Delta_{\beta_{2n-1,\gamma_\Psi}}\|_\Psi} \leq \sum_{j=1}^{N-1} C_\varepsilon \frac{M_\Psi(K)}{K^{\gamma_\Psi-\varepsilon}} C_2(\gamma_\Psi-\varepsilon)\frac{2}{N^{\gamma_\Psi-\varepsilon}}C(\gamma_\Psi,\varepsilon)n^{\gamma_\Psi-\varepsilon-1} \leq C_7(\gamma_\Psi).$$

Неравенство (7) установлено.

Установим неравенство (12) при $k=1$. Пусть в (15) $A = D$ — оператор дифференцирования. Поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_\Psi\left(\left|D\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right|\right)dx \leq M_\Psi(N)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_\Psi\left(\left|D\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right|\right)dx,$$

то достаточно доказать, что для любого $j \leq N-1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_\Psi\left(\left|D\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right|\right)dx \leq C_8(\Psi)\frac{1}{N}. \qquad (20)$$

Из (2) при $k=1$ и $p=\infty$ следует, что

$$\left|D\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right| \leq \frac{N}{2}\left\|\Delta_{x_1}\left(\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right)\right\|_\infty \leq N\left\|\frac{V_n}{N^2}\right\|_\infty \leq C_9\frac{n}{N} \leq C_{10},$$

поэтому для любого ε, $\varepsilon \in (0,\gamma_\Psi)$, существует такое C_ε, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_\Psi\left(\left|D\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right|\right)dx \leq C_\varepsilon M_\Psi(C_{10})\left\|\frac{1}{C_{10}}D\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right\|_{L_{\gamma_\Psi-\varepsilon}}. \qquad (21)$$

Используем неравенство (6) при $p = \gamma_\Psi - \varepsilon$ и положим $N = 2d_s^{(l)} + 1$ при $s = d_{2n-1}(l)$, $l = \left[\dfrac{2}{\gamma_\Psi}\right]$. Тогда при достаточно малом ε

$$\left\| D\left(\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right)\right\|_{L_{\gamma_\Psi-\varepsilon}} \leq$$

$$\leq C_1(\gamma_\Psi)(2n-1)^{\gamma_\Psi-\varepsilon}\left\|\Delta_{x_1}\left(\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{j} V_n(x-x_i)\right)\right\|_{L_{\gamma_\Psi-\varepsilon}} \leq$$

$$\leq C_{11}(\gamma_\Psi)\frac{n^{\gamma_\Psi-\varepsilon}}{N^{2(\gamma_\Psi-\varepsilon)}}\|V_n\|_{L_{\gamma_\Psi-\varepsilon}} \leq$$

$$\leq C_{12}(\gamma_\Psi)\frac{n^{\gamma_\Psi-\varepsilon}}{N^{2(\gamma_\Psi-\varepsilon)}}n^{\gamma_\Psi-\varepsilon-1} < C_{12}(\gamma_\Psi)\frac{1}{n}. \tag{22}$$

Так как N имеет порядок роста n, то из (21), (22) следует (20).

В случае $k > 1$ неравенство (12) устанавливается аналогично; для этого к формуле (13) нужно применить преобразование Абеля k раз.

Литература

1. *Никольский С. М.* Обобщение одного неравенства С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. – 1948. – **60**, № 9. – С. 1507 – 1510.
2. *Стечкин С. Б.* Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. – 1948. – **60**, № 9. – С. 1511 – 1514.
3. *Иванов В. И.* Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках // Мат. заметки. – 1975. – **18**, № 4. – С. 489 – 498.
4. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p,\ 0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1975. – **98**, № 3. – С. 395 – 415.
5. *Арестов В. В.* О неравенствах С. Н. Бернштейна для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. – 1979. – **246**, № 6. – С. 1289 – 1292.
6. *Руновский К. В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1994. – **185**, № 8. – С. 81 – 102.
7. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
8. *Пичугов С. А.* Неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 12. – С. 1657 – 1671.

Получено 26.10.16