УДК 517.9

Ю. Г. Аббасова, В. М. Курбанов

(Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Азерб. гос. пед. ун-т, Баку)

СХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ИЗ КЛАССА $W^1_{p,m}(G), p > 1$, ПО СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

We consider, a third-order differential operator with matrix coefficients. The absolute and uniform convergence of the orthogonal expansion of a vector function from the class $W^1_{p,m}(G), p > 1$, in the vector eigenfunctions of this operator is studied and the rate of uniform convergence of this expansion on $\overline{G} = [0, 1]$ is estimated.

Розглядається диференціальний оператор третього порядку з матричними коефіцієнтами. Досліджується абсолютна та рівномірна збіжність ортогонального розкладу вектор-функції з класу $W^1_{p,m}(G)$, $p > 1$, за власними вектор-функціями цього оператора і оцінюється швидкість рівномірної збіжності даного розкладу на $\overline{G} = [0, 1]$.

1. Формулировка результатов. Рассмотрим на интервале $G = (0, 1)$ дифференциальный оператор

$$L\Psi = \Psi^{(3)} + U_1(x)\Psi^{(2)} + U_2(x)\Psi^{(1)} + U_3(x)\Psi$$

с матричными коэффициентами $U_l(x) = (u_{lij}(x))^m_{i,j=1}$, $l = \overline{1, 3}$, где $u_{lij}(x) \in L_1(G)$ — комплекснозначные функции.

Обозначим через $D(G)$ класс m-компонентных вектор-функций, абсолютно непрерывных вместе со своими производными до второго порядка включительно на отрезке $\overline{G} = [0, 1]$ $(D(G) = W^3_{1,m}(G))$.

Под собственной вектор-функцией оператора L, соответствующей собственному значению λ, будем понимать любую тождественно не равную нулю вектор-функцию $\Psi(x) = (\Psi_1(x), \Psi_2(x), \ldots, \Psi_m(x))^T \in D(G)$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению (см. [1])

$$L\Psi + \lambda\Psi = 0.$$

Пусть $L^m_p(G)$, $p \geq 1$, — пространство m-компонентных вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))^T$ с нормой

$$\|f\|_{p,m} = \left\{ \int_G |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} = \left\{ \int_G \left(\sum_{i=1}^m |f_l(x)|^2 \right)^{p/2} dx \right\}^{1/p}.$$

Будем говорить, что вектор-функция $f(x)$ принадлежит $W^1_{p,m}(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, если $f(x)$ абсолютно непрерывна на $\bar{G}$ и $f'(x)$ принадлежит $L^m_p(G)$. Норма вектор-функции $f(x) \in W^1_{p,m}(G)$ определяется равенством

$$\|f\|_{W^1_{p,m}(G)} = \|f\|_{p,m} + \|f'\|_{p,m}.$$

Предположим, что $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная в $L_2^m(G)$ система, состоящая из собственных вектор-функций оператора L. Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствующую систему собственных значений, причем предполагаем, что $\operatorname{Re}\lambda_k = 0$. Наряду со спектральным параметром λ_k будем рассматривать параметр μ_k:

$$\mu_k = \begin{cases} (-i\lambda_k)^{1/3}, & \text{если } \operatorname{Im}\lambda_k \geq 0, \\ (i\lambda_k)^{1/3}, & \text{если } \operatorname{Im}\lambda_k < 0. \end{cases}$$

Введем частичную сумму ортогонального разложения вектор-функции $f(x) \in W_{p,m}^1(G)$ по системе $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\sigma_\nu(x,f) = \sum_{\mu_k \leq \nu} f_k \Psi_k(x), \;\; \nu > 0,$$

где

$$f_k = (f, \Psi_k) = \int_0^1 \langle f(x), \Psi_k(x)\rangle dx = \int_0^1 \sum_{l=1}^m f_l(x)\overline{\Psi_{kl}}(x)dx,$$

$$\Psi_k(x) = (\Psi_{k1}(x), \Psi_{k2}(x), \ldots, \Psi_{km}(x))^T,$$

а также разность $R_\nu(x,f) = f(x) - \sigma_\nu(x,f)$.

В работе доказываются следующие утверждения.

Теорема 1.1. *Пусть* $U_1(x) \equiv 0$, $U_r(x) \in L_1(G)$, $r = 2,3$, $f(x) \in W_{p,m}^1(G)$, $p > 1$, *и выполняется условие*

$$\left|\langle f(x), \Psi_k^{(2)}(x)\rangle\Big|_0^1\right| \leq C_1(f)\mu_k^{\alpha}\|\Psi_k\|_{\infty,m}, \qquad 0 \leq \alpha < 2, \quad \mu_k \geq 1, \tag{1.1}$$

где $C_1(f)$ *— постоянная, зависящая от* $f(x)$.

Тогда спектральное разложение вектор-функции $f(x)$ *по системе* $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится абсолютно и равномерно на отрезке* $\overline{G} = [0,1]$ *и справедлива оценка*

$$\|R_\nu(\cdot,f)\|_{C[0,1]} \leq$$

$$\leq C\left\{C_1(f)\nu^{\alpha-2} + \nu^{-\beta}\|f'\|_{p,m} + \nu^{-1}(\|f\|_{\infty,m} + \|f'\|_{1,m})\sum_{r=2}^{3}\nu^{2-r}\|U_r\|_1\right\}, \tag{1.2}$$

где $\beta = \min\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{q}\right\}$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\nu \geq 2$, *постоянная* C *не зависит от* $f(x)$: $\|U_r\|_1 = \sum_{i,j=1}^m \|u_{rij}\|_1$.

***Следствие* 1.1.** 1. *Если в теореме* 1.1 *вектор-функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию* $f(0) = f(1) = 0$, *то заведомо выполняется условие* (1.1) *и справедлива оценка*

$$\|R_\nu(\cdot,f)\|_{C[0,1]} \leq C\nu^{-\beta}\|f'\|_{p,m}, \;\; \nu \geq 2,$$

где постоянная C *не зависит от* $f(x)$;

2. *Если* $C_1(f) = 0$ *или* $0 \leq \alpha < 2 - \beta$, *то справедлива оценка*

$$\|R_\nu(\cdot,f)\|_{C[0,1]} = o(\nu^{-\beta}), \;\; \nu \longrightarrow +\infty,$$

где символ $''o''$ *зависит от* $f(x)$.

Теорема 1.2. *Пусть* $U_1(x) \in L_2(G)$, $U_r(x) \in L_1(G)$, $r = 2, 3$, $f(x) \in W^1_{2,m}(G)$ *и выполняется условие* (1.1). *Тогда спектральное разложение вектор-функции* $f(x)$ *по системе* $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится абсолютно и равномерно на* $\overline{G} = [0, 1]$ *и справедлива оценка*

$$\|R_\nu(\cdot, f)\|_{C[0,1]} \le C \left\{ C_1(f)\nu^{\alpha-2} + \right.$$

$$\left. +\nu^{-\frac{1}{2}}(\|U_1^* f\|_{2,m} + \|f'\|_{2,m}) + \nu^{-1}\|f\|_{\infty,m} \sum_{r=2}^{3} \nu^{2-r}\|U_r\|_1 \right\}, \qquad \nu \ge 2, \tag{1.3}$$

где постоянная C *не зависит от* $f(x)$, U_1^* — *матрица, сопряженная к матрице* U_1.

***Следствие* 1.2.** 1. *Если в теореме* 1.2 *вектор-функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию* $f(0) = f(1) = 0$, *то заведомо выполняется условие* (1.1) *и справедлива оценка*

$$\|R_\nu(\cdot, f)\|_{C[0,1]} \le C\nu^{-\frac{1}{2}}(\|U_1^* f\|_{2,m} + \|f'\|_{2,m}), \qquad \nu \ge 2, \tag{1.3$'$}$$

где постоянная C *не зависит от* $f(x)$.

2. *Если* $C_1(f) = 0$ *или* $0 \le \alpha < 3/2$, *то справедлива оценка*

$$\|R_\nu(\cdot, f)\|_{C[0,1]} = o\left(\nu^{-\frac{1}{2}}\right), \qquad \nu \longrightarrow +\infty, \tag{1.3$''$}$$

где символ $''o''$ *зависит от* $f(x)$.

Теорема 1.3. *Пусть* $U_1(x) \in L_2(G)$, $U_r(x) \in L_1(G)$, $r = 2, 3$, $f(x) \in W^1_{p,m}(G)$, $1 < p < 2$, *выполняется условие* (1.1) *и система* $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *равномерно ограничена. Тогда спектральное разложение вектор-функции* $f(x)$ *по системе* $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится абсолютно и равномерно на* $\overline{G} = [0, 1]$ *и справедлива оценка*

$$\|R_\nu(\cdot, f)\|_{C[0,1]} \le C \left\{ C_1(f)\nu^{\alpha-2} + \right.$$

$$\left. +\nu^{-\frac{1}{2}}\|U_1^* f\|_{2,m} + \nu^{-\frac{1}{q}}\|f'\|_{p,m} + \nu^{-1}\|f\|_{\infty,m} \sum_{r=2}^{3} \nu^{2-r}\|U_r\|_1 \right\}, \qquad \nu \ge 2, \tag{1.4}$$

где $p^{-1} + q^{-1} = 1$, *а постоянная* C *не зависит от* $f(x)$.

***Следствие* 1.3.** 1. *Если в теореме* 1.3 *вектор-функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию* $f(0) = f(1) = 0$, *то заведомо выполняется условие* (1.1) *и справедлива оценка*

$$\|R_\nu(\cdot, f)\|_{C[0,1]} \le C(\nu^{-\frac{1}{2}}\|U_1^* f\|_{2,m} + \nu^{-\frac{1}{q}}\|f'\|_{p,m}), \qquad \nu \ge 2, \tag{1.4$'$}$$

где постоянная C *не зависит от* $f(x)$.

2. *Если в теореме* 1.3 $C_1(f) = 0$ *или* $0 \le \alpha < 2 - q^{-1}$, *то*

$$\|R_\nu(\cdot, f)\|_{C[0,1]} = o\left(\nu^{-\frac{1}{2}}\right), \qquad \nu \longrightarrow +\infty, \tag{1.4$''$}$$

где символ $''o''$ *зависит от* $f(x)$.

Подобные результаты для оператора Шредингера получены в работах [2 – 4], а для операторов третьего и четвертого порядка в случае $f(x) \in W_{1,m}^{1}(G)$ — в работах [5, 6] при некоторых дополнительных условиях.

Напомним, что для вектор-функции $f(x)$ из области определения самосопряженного дифференциального оператора равномерная сходимость спектрального разложения известна из монографии [7] (глава III, § 9).

2. Некоторые вспомогательные леммы. Для собственной вектор-функции $\Psi_k(x)$ справедливы представления $(\lambda_k \neq 0)$ [5]

$$\mu_k^{-l}\Psi_k^{(l)}(t) = \sum_{j=1}^{2}(-i\omega_j)^l X_j^-(0)\exp(-i\omega_j\mu_k t) + (-i\omega_j)^l B_3^- \exp(i\omega_3\mu_k(1-t)) -$$

$$-\sum_{j=1}^{2}(-i)^l\omega_j^{l+1}\int_0^t M(\Psi_k(\xi))\exp(i\omega_j\mu_k(\xi-t))d\xi +$$

$$+(-i)^l\omega_3^{l+1}\int_t^1 M(\Psi_k(\xi))\exp(i\omega_3\mu_k(\xi-t))d\xi \tag{2.1}$$

при $\mathrm{Im}\lambda_k > 0$,

$$\mu_k^{-l}\Psi_k^{(l)}(t) = \sum_{j=1, j\neq 2}^{3}(i\omega_j)^l X_j^+(0)\exp(i\omega_j\mu_k t) + (i\omega_2)^l B_2^+ \exp(-i\omega_2\mu_k(1-t)) -$$

$$-\sum_{j=1, j\neq 2}^{3}(i)^l\omega_j^{l+1}\int_0^t M(\Psi_k(\xi))\exp(-i\omega_j\mu_k(\xi-t))d\xi +$$

$$+(i)^l\omega_2^{l+1}\int_t^1 M(\Psi_k(\xi))\exp(-i\omega_2\mu_k(\xi-t))d\xi \tag{2.2}$$

при $\mathrm{Im}\lambda_k < 0$. При этом $l = \overline{0,2}$, $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = \exp(-i\pi/3)$, $\omega_3 = \exp(i\pi/3)$,

$$B_3^- = X_3^-(0)\exp(-i\omega_3\mu_k) - \omega_3\int_0^1 M(\Psi_k(\xi))\exp(-i\omega_3\mu_k(\xi-1))d\xi,$$

$$B_2^+ = X_2^+(0)\exp(i\omega_2\mu_k) - \omega_2\int_0^1 M(\Psi_k(\xi))\exp(i\omega_2\mu_k(\xi-1))d\xi,$$

$$X_j^{\pm}(x) = \frac{1}{3\mu_k^2}\sum_{l=0}^{2}(\mp i\mu_k)^l\omega_j^{l+1}\Psi_k^{(2-l)}(x),$$

$$M(\Psi_k(\xi)) = \frac{1}{3\mu_k^2}\sum_{r=1}^{3}U_r(\xi)\Psi_k^{(3-r)}(\xi).$$

Для коэффициентов в формулах (2.1) и (2.2) выполняются оценки

$$|X_1^{\pm}(0)| \le C\|\Psi_k\|_{2,m}, \qquad |X_1^{\pm}(0)| \le C\|\Psi_k\|_{\infty,m},$$
$$|B_2^{+}| \le C\|\Psi_k\|_{\infty,m}, \qquad |B_3^{-}| \le C\|\Psi_k\|_{\infty,m}, \tag{2.3}$$

где C — некоторая постоянная.

Лемма 2.1. *Пусть вектор-функция* $f(x) \in W^1_{p,m}(G), p>1,$ *и система* $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяют условию* (1.1). *Тогда для коэффициентов Фурье* f_k *справедливы оценки* $(\mu_k \ge 1)$

$$|f_k| \le \left\{ C_1(f)\mu_k^{\alpha-3}\|\Psi_k\|_{\infty,m} + \mu_k^{-1}\left|(U_1^* f, \mu_k^{-2}\Psi_k^{(2)})\right| + \right.$$
$$\left. +\mu_k^{-1}\left|(f', \mu_k^{-2}\Psi_k^{(2)})\right| + \mu_k^{-2}\left(\sum_{r=2}^{3}\mu_k^{2-r}\|U_r\|_1\right)\|f\|_{\infty,m}\|\Psi_k\|_{\infty,m}\right\}, \tag{2.4}$$

где C — некоторая постоянная,

$$|f_k| \le C\left\{\left[C_1(f)\mu_k^{\alpha-3} + \mu_k^{-1}\left(\sum_{l=1}^{m}\left|\int_0^1 \overline{f_l'(t)}\exp(i\omega_3\mu_k t)dt\right| + \right.\right.\right.$$
$$\left. + \sum_{l=1}^{m}\left|\int_0^1 \overline{f_l'(1-t)}\exp(-i\omega_2\mu_k t)dt\right|\right) + (\|f\|_{\infty,m} + \|f'\|_{1,m})\mu_k^{-2}\times$$
$$\left.\left.\times\sum_{r=2}^{3}\mu_k^{2-r}\|U_r\|_1\right]\|\Psi_k\|_{\infty,m} + \mu_k^{-1}\sum_{l=1}^{m}\left|\int_0^1\overline{f_l'(t)}\exp(-i\mu_k t)dt\right|\right\}, \tag{2.5}$$

если $U_1(x) \equiv 0,\ \operatorname{Im}\lambda_k < 0,$

$$|f_k| \le C\left\{\left[C_1(f)\mu_k^{\alpha-3} + \mu_k^{-1}\left(\sum_{l=1}^{m}\left|\int_0^1 \overline{f_l'(t)}\exp(-i\omega_2\mu_k t)dt\right| + \right.\right.\right.$$
$$\left. + \sum_{l=1}^{m}\left|\int_0^1 \overline{f_l'(1-t)}\exp(i\omega_3\mu_k t)dt\right|\right) + (\|f\|_{\infty,m} + \|f'\|_{1,m})\mu_k^{-2}\times$$
$$\left.\left.\times\sum_{r=2}^{3}\mu_k^{2-r}\|U_r\|_1\right]\|\Psi_k\|_{\infty,m} + \mu_k^{-1}\sum_{l=1}^{m}\left|\int_0^1\overline{f_l'(t)}\exp(i\mu_k t)dt\right|\right\}, \tag{2.6}$$

если $U_1(x) \equiv 0,\ \operatorname{Im}\lambda_k > 0.$

Доказательство. По определению собственной функции $\Psi_k(x)$ коэффициенты Фурье f_k вектор-функции $f(x)$ вычисляются по формуле

$$f_k = (f, \Psi_k) = -\frac{1}{\overline{\lambda_k}}(f, Lu\Psi_k) = -\frac{1}{\overline{\lambda_k}}\left(f, \Psi_k^{(3)}\right) - \frac{1}{\overline{\lambda_k}}\left(f, U_1\Psi_k^{(2)}\right) -$$

$$-\frac{1}{\overline{\lambda_k}}\left(f, U_2\Psi_k^{(1)}\right) - \frac{1}{\overline{\lambda_k}}(f, U_3\Psi_k). \tag{2.7}$$

В силу оценки (см. [8, 9])

$$\left\|\Psi_k^{(s)}\right\|_{\infty,m} \le C(1+\mu_k)^{s+\frac{1}{p}}\|\Psi_k\|_{p,m} \qquad \forall p\ge 1, \quad s=\overline{0,2}, \tag{2.8}$$

находим

$$\frac{1}{|\lambda_k|}\left|\left(f, U_2\Psi_k^{(1)}\right)\right| + \frac{1}{|\lambda_k|}|(f, U_3\Psi_k)| \le$$

$$\le C\|f\|_{\infty,m}\mu_k^{-2}\left(\sum_{r=2}^{3}\mu_k^{2-r}\|U_r\|_1\right)\|\Psi_k\|_{\infty,m}, \tag{2.9}$$

где C — некоторая постоянная.

Проводя интегрирование по частям в первом слагаемом в правой части равенства (2.7) и учитывая условие (1.1), получаем

$$\frac{1}{|\lambda_k|}\left|\left(f, \Psi_k^{(3)}\right)\right| \le C_1(f)\mu_k^{(\alpha-3)}\|\Psi_k\|_{\infty,m} + \mu_k^{-3}\left|\left(f', \Psi_k^{(2)}\right)\right|. \tag{2.10}$$

Из (2.7), (2.9) и (2.10) следует оценка (2.4).

Теперь оценим выражение $\mu_k^{-3}\left|\left(f', \Psi_k^{(2)}\right)\right|$ в случае $U_1(x)\equiv 0$. С этой целью воспользуемся формулами (2.1) и (2.2) в зависимости от знака $\mathrm{Im}\lambda_k$. Для определенности рассмотрим случай $\mathrm{Im}\lambda_k > 0$ и применим формулу (2.1) при $l=2$. Тогда в силу оценок (2.3), (2.8) и

$$|M(\Psi_k(\xi))| \le \frac{1}{3}\mu_k^{-2}\sum_{r=2}^{3}\left|U_r(\xi)\Psi_k^{(3-r)}(\xi)\right| \le$$

$$\le C\mu_k^{-1}\left(\sum_{r=2}^{3}\mu_k^{2-r}\|U_r(\xi)\|\right)\|\Psi_k\|_{\infty,m},$$

где

$$\|U_r(\xi)\| = \sum_{i,j=1}^{m}|u_{rij}(\xi)|,$$

имеем

$$\mu_k^{-3}\left|\left(f', \Psi_k^{(2)}\right)\right| = \mu_k^{-1}\left|\left(f', \mu_k^{-2}\Psi_k^{(2)}\right)\right| \le$$

$$\le \mu_k^{-1}\sum_{j=1}^{2}\left|\left(f', X_j^-(0)\exp\left(-i\omega_j\mu_k t\right)\right)\right| + \mu_k^{-1}\left|\left(f', B_3^-\exp(i\omega_3\mu_k(1-t))\right)\right| +$$

$$+\mu_k^{-1}\sum_{j=1}^{2}\left|\left(f', \int_0^t M\left(\Psi_k(\xi)\right)\exp\left(i\omega_j\mu_k(\xi-t)\right)d\xi\right)\right| +$$

$$+\mu_k^{-1}\left|\left(f', \int_t^1 M\left(\Psi_k(\xi)\right)\exp\left(i\omega_3\mu_k(\xi-t)\right)d\xi\right)\right| \le$$

$$\leq \mu_k^{-1}\sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{m}\left|X_j^-(0)\right|\left|\int_0^1\overline{f_l'(t)}\exp\left(-i\omega_j\mu_k t\right)dt\right|+$$

$$+\mu_k^{-1}\left|B_3^-\right|\sum_{l=1}^{m}\left|\int_0^1\overline{f_l'(1-t)}\exp\left(i\omega_3\mu_k t\right)dt\right|+$$

$$+C\mu_k^{-2}\left(\sum_{r=2}^{3}\mu_k^{2-r}\left\|U_r\right\|_1\right)\left\|\Psi_k\right\|_{\infty,m}\left\|f'\right\|_{1,m}\leq C\mu_k^{-1}\times$$

$$\times\left\{\sum_{l=1}^{m}\left|\int_0^1\overline{f_l'(t)}\exp\left(i\mu_k t\right)dt\right|+\sum_{l=1}^{m}\left|\int_0^1\overline{f_l'(t)}\exp\left(-i\omega_2\mu_k t\right)dt\right|\left\|\Psi_k\right\|_{\infty,m}+\right.$$

$$+\sum_{l=1}^{m}\left|\int_0^1\overline{f_l'(1-t)}\exp\left(i\omega_3\mu_k t\right)dt\right|\left\|\Psi_k\right\|_{\infty,m}+$$

$$\left.+\mu_k^{-1}\left(\sum_{r=2}^{3}\mu_k^{2-r}\left\|U_r\right\|_1\right)\left\|\Psi_k\right\|_{\infty,m}\left\|f'\right\|_{1,m}\right\}.$$

Учитывая сначала последнюю оценку в неравенстве (2.10), а затем объединяя полученное с оценкой (2.9), из равенства (2.7) получаем неравенство (2.6).

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2 (см. [9]). *Пусть* $U_1(x)\in L_2(G)$, $U_r(x)\in L_1(G)$, $r=2,3$. *Тогда для ортонормированной системы собственных вектор-функций* $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *и числа* μ_k *выполняются оценки*

$$\sum_{\tau\leq\mu_k\leq\tau+1}1\leq C\quad\text{для любого}\quad\tau\geq 0, \tag{2.11}$$

$$\sum_{0\leq\mu_k\leq\tau}\left\|\Psi_k\right\|_{\infty,m}^2\leq C\left(1+\tau\right)\quad\text{для любого}\quad\tau>0, \tag{2.12}$$

где C *— некоторая постоянная.*

Лемма 2.3 (см. [10]). *Если выполнены условия леммы* 2.2, *то система* $\{\mu_k^{-2}\Psi_k^{(2)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $\mu_k\geq 1$, *бесселева, т. е. для любой вектор-функции* $g(x)\in L_2^m(G)$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{\mu_k\geq 1}\left|\left(g,\mu_k^{-2}\Psi_k^{(2)}\right)\right|^2\leq C\left\|g\right\|_{2,m}^2, \tag{2.13}$$

где C *— некоторая постоянная.*

Лемма 2.4. *При выполнении условия* (2.11) *система* $\{\exp(-i\mu_k t)\}$ *при* $\mathrm{Im}\lambda_k<0$ *и система* $\{\exp(i\mu_k t)\}$ *при* $\mathrm{Im}\,\lambda_k>0$ *удовлетворяют неравенству Рисса при* $1<p\leq 2$.

Доказательство. Поскольку каждая из этих систем является бесселевой в $L_2(G)$ (см. [1]) при выполнении условия (2.11) и, кроме того, для любого $g(x)\in L_1(G)$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_0^1 g\left(x\right)\overline{\varphi_k\left(x\right)}dx\right|\leq C\left\|g\right\|_1,$$

где $\{\varphi_k(x)\}$ — любая из вышеуказанных систем, то в силу теоремы Рисса–Торина (см. [11], гл. XII, п. 1) для этих систем имеет место неравенство Рисса, т. е. для любой функции $g(x)\in\in L_p(G)$, $1<p\leq 2$, выполняется неравенство

$$\sum_k\left|\int\limits_0^1 g\left(x\right)\overline{\varphi_k\left(x\right)}dx\right|^q\leq C\left\|g\right\|_p^q, \tag{2.14}$$

где $q=p\big/(p-1)$.

Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. *Пусть выполняются условия леммы* 2.2. *Тогда для ортонормированной системы* $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ *справедлива оценка*

$$\sum_{\mu_k\geq\mu}\frac{\left\|\Psi_k\right\|_{\infty,m}^2}{\mu_k^{\delta+1}}\leq C\left(\delta\right)\mu^{-\delta}\qquad\forall\mu\geq 2,\quad\delta>0, \tag{2.15}$$

где $C(\delta)$ *— постоянная, не зависящая от* μ.

Доказательство. Зафиксируем произвольное натуральное число n_0. Применяя преобразование Абеля и оценки (2.11), (2.12), имеем

$$\sum_{\mu\leq\mu_k\leq[\mu]+n_0}\frac{\left\|\Psi_k\right\|_{\infty,m}^2}{\mu_k^{1+\delta}}\leq\sum_{n=[\mu]}^{[\mu]+n_0}\frac{1}{n^{1+\delta}}\left(\sum_{n\leq\mu_k<n+1}\left\|\Psi_k\right\|_{\infty,m}^2\right)\leq$$

$$\leq\sum_{n=[\mu]}^{[\mu]+n_0-1}\left(\sum_{n\leq\mu_k<n+1}\left\|\Psi_k\right\|_{\infty,m}^2\right)\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}-\frac{1}{(n+1)^{1+\delta}}\right)+$$

$$+\left(\sum_{1\leq\mu_k\leq[\mu]+n_0}\left\|\Psi_k\right\|_{\infty,m}^2\right)\left([\mu]+n_0\right)^{-(1+\delta)}+\left(\sum_{1\leq\mu_k\leq[\mu]-1}\left\|\Psi_k\right\|_{\infty,m}^2\right)[\mu]^{-(1+\delta)}\leq$$

$$\leq C\sum_{n=[\mu]}^{[\mu]+n_0-1}(n+1)\frac{\left(1+\delta\right)\left(n+1\right)^\delta}{\left(n\left(n+1\right)\right)^{1+\delta}}+C\left([\mu]+n_0\right)^{-\delta}+C\left[\mu\right]^{-\delta}\leq$$

$$\leq C\left\{\left(1+\delta\right)\sum_{n=[\mu]}^{\infty}n^{-(1+\delta)}+[\mu]^{-\delta}\right\}\leq C\left(\delta\right)\mu^{-\delta}.$$

Отсюда в силу произвольности натурального числа n_0 получаем оценку (2.15).

Лемма 2.5 доказана.

Лемма 2.6. *Пусть выполняются условия леммы* 2.2. *Тогда для ортонормированной системы* $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ *справедлива оценка*

$$\sum_{\mu_k\ge\mu}\frac{\|\Psi_k\|^p_{\infty,m}}{\mu_k^p}\le C_1(p)\,\mu^{1-p}\qquad\forall\mu\ge2,\quad 1<p\le2, \tag{2.16}$$

где $C_1(p)$ не зависит от μ.

Доказательство. При $p=2$ оценка (2.16) следует из (2.15) при $\delta=1$. В случае $1<p<2$ применим неравенство Гельдера при $p'=2/p,\ \ q'=2/(2-p)$:

$$\sum_{\mu_k\ge\mu}\frac{\|\Psi_k\|^p_{\infty,m}}{\mu_k^p}=\sum_{\mu_k\ge\mu}\frac{\|\Psi_k\|^p_{\infty,m}}{\mu_k^{p-\frac12}}\frac{1}{\mu_k^{\frac12}}\le$$

$$\le\left(\sum_{\mu_k\ge\mu}\frac{\|\Psi_k\|^p_{\infty,m}}{\mu_k^{2-\frac1p}}\right)^{\frac p2}\left(\sum_{\mu_k\ge\mu}\frac{1}{\mu_k^{\frac{1}{2-p}}}\right)^{\frac{2-p}{2}}\le$$

$$\le\left(\sum_{\mu_k\ge\mu}\frac{\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}}{\mu_k^{2-\frac1p}}\right)^{\frac p2}\left(\sum_{n=[\mu]}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2-p}}}\left(\sum_{n\le\mu_k\le n+1}1\right)\right)^{\frac{2-p}{2}}.$$

Применяя здесь лемму 2.5 при $\delta=1-\dfrac1p$ и оценку (2.11), получаем

$$\sum_{\mu_k\ge\mu}\frac{\|\Psi_k\|^p_{\infty,m}}{\mu_n^p}\le C\left(\mu^{-\left(1-\frac1p\right)}\right)^{p/2}[\mu]^{\frac{1-p}{2}}\le C_1(p)\,\mu^{1-p}.$$

Лемма 2.6 доказана.

Лемма 2.7 (см. [10])**.** *Пусть последовательность $\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty,\ \alpha_k\ge0,$ для любого номера $N=1,2,\ldots$ удовлетворяет условию $\sum_{k=1}^N\alpha_k\le CN$, где C — некоторая постоянная. Тогда для любой $f(x)\in L_p(G),\ 1<p\le2,$ выполняется неравенство*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\left|\int\limits_0^1 f(x)\exp(-k\beta x)\,dx\right|^q\right)^{1/q}\le M_p\,\|f\|_p\,,$$

где β — комплексное число, для которого $\mathrm{Re}\beta>0,\ p^{-1}+q^{-1}=1,\ M_p$ не зависит от $f(x)$.

Лемма 2.8. *При условиях леммы 2.2 для каждой системы $\left\{\|\Psi_k\|^{\frac2q}_{\infty,m}\exp(i\omega_3\mu_k t)\right\}_{k=1}^\infty$ и $\left\{\|\Psi_k\|^{\frac2q}_{\infty,m}\exp(-i\omega_2\mu_k t)\right\}_{k=1}^\infty$ при $\operatorname{Im}\lambda_k<0$, для каждой системы $\left\{\|\Psi_k\|^{\frac2q}_{\infty,m}\exp(-i\omega_2\mu_k t)\right\}_{k=1}^\infty$ и $\left\{\|\Psi_k\|^{\frac2q}_{\infty,m}\exp(i\omega_3\mu_k t)\right\}_{k=1}^\infty$ при $\operatorname{Im}\lambda_k>0$ выполняется неравенство Рисса при $1<p\le2$, где $p^{-1}+q^{-1}=1$.*

Доказательство. Рассмотрим первую из этих систем и докажем для нее неравенство Рисса (остальные системы рассматриваются аналогичным образом). Очевидно, что $|\exp(i\omega_3\mu_k t)|=\exp\left(-\dfrac{\sqrt3}{2}\mu_k t\right)$. Поэтому для любой функции $f(x)\in L_p(G)$ получаем

$$\sum_{\mathrm{Im}\lambda_k<0}\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}\left|\int\limits_0^1\overline{f\left(x\right)}\exp\left(i\omega_3\mu_k t\right)dt\right|^q\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}\left(\int\limits_0^1\left|f\left(x\right)\right|\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_k t\right)dt\right)^q=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n\le\mu_k<n+1}\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}\left(\int\limits_0^1\left|f\left(x\right)\right|\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_k t\right)dt\right)^q\le$$

$$\le\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{n\le\mu_k<n+1}\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}\right)\left(\int\limits_0^1\left|f\left(x\right)\right|\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}nt\right)dt\right)^q=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\left(\int\limits_0^1\left|f\left(x\right)\right|\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}nt\right)dt\right)^q,\qquad(2.17)$$

где $\alpha_n=\sum_{n\le\mu_k<n+1}\|\Psi\|^2_{\infty,m}$.

В силу неравенства (2.12) для любого натурального числа N находим

$$\sum_{n=0}^{N}\alpha_n=\sum_{0\le\mu_k<N+1}\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}\le CN.$$

Следовательно, выполняется условие леммы 2.7. Поэтому имеет место неравенство

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\left(\int\limits_0^1\left|f\left(x\right)\right|\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}nt\right)dt\right)^q\right\}^{1/q}\le M_p\left\|f\right\|_p.$$

Отсюда и из (2.17) получаем, что система $\left\{\|\Psi_k\|^{\frac{2}{q}}_{\infty,m}\exp\left(i\omega_3\mu_k t\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ при $\mathrm{Im}\,\lambda_k<0$ удовлетворяет неравенству Рисса.

Лемма 2.8 доказана.

3. Доказательства теорем 1.1 – 1.3. ***Доказательство теоремы* 1.1.** Рассмотрим случай $1<$ $<p\le 2$. Докажем равномерную сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}|f_k||\Psi_k(x)|$ на $\bar{G}$. Для этого разобьем этот ряд на две суммы: $\sum_{0\le\mu_k\le 2}|f_k||\Psi_k(x)|$ и $\sum_{\mu_k>2}|f_k||\Psi_k(x)|$. Первая сумма в силу оценки (2.12) не превышает величину $\mathrm{const}\|f\|_1$. Для исследования второго ряда применим лемму 2.1, т. е. оценки (2.5) и (2.6) в зависимости от знака $\mathrm{Im}\,\lambda_k$. Для этого представим данный ряд в виде

$$\sum_{\mu_k>2}\left|f_k\right|\left|\Psi_k\left(x\right)\right|=\sum_{k\in I_1}\left|f_k\right|\left|\Psi_k\left(x\right)\right|+\sum_{k\in I_2}\left|f_k\right|\left|\Psi_k\left(x\right)\right|=\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2,$$

где $I_1=\{k:\mu_k>2,\mathrm{Im}\lambda_k<0\}$, $I_2=\{k:\mu_k>2,\mathrm{Im}\lambda_k>0\}$.

В силу оценки (2.5)

$$\mathcal{J}_1=\sum_{k\in I_1}|f_k|\,|\Psi_k(x)|\le C\,C_1(f)\sum_{k\in I_1}\mu_k^{\alpha-3}\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}+$$

$$+C\sum_{k\in I_1}\mu_k^{-1}\sum_{l=1}^{m}\left|\int_0^1\overline{f'_l(t)}\exp(i\omega_3\mu_k t)\,dt\right|\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}+$$

$$+C\sum_{k\in I_1}\mu_k^{-1}\sum_{l=1}^{m}\left|\int_0^1\overline{f'_l(1-t)}\exp(-i\omega_2\mu_k t)\,dt\right|\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}+$$

$$+C\left(\|f\|_{\infty,m}+\left\|f'\right\|_{1,m}\right)\sum_{k\in I_1}\mu_k^{-2}\left(\sum_{r=1}^{m}\mu_k^{2-r}\|U_r\|_1\right)\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}+$$

$$+C\sum_{k\in I_1}\mu_k^{-1}\sum_{l=1}^{m}\left|\int_0^1\overline{f'_l(t)}\exp(-i\mu_k t)\,dt\right|\|\Psi_k\|_{\infty,m}=$$

$$=C\left(\mathcal{J}_1^1+\mathcal{J}_1^2+\mathcal{J}_1^3+\mathcal{J}_1^4+\mathcal{J}_1^5\right).$$

Докажем сходимость рядов $\mathcal{J}_1^j,\ j=\overline{1,5}$. В силу лемму 2.5 и условия $0\le\alpha<2$ находим

$$\mathcal{J}_1^1=C_1(f)\sum_{k\in I_1}\mu_k^{\alpha-3}\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}\le$$

$$\le C_1(f)\sum_{k\in I_1}\frac{\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}}{\mu_k^{1+(2-\alpha)}}\le C\,C_1(f)\,2^{\alpha-2}<\infty. \tag{3.1}$$

Для оценки ряда $\mathcal{J}_1^2$ сначала применим неравенство Гельдера для суммы, а затем леммы 2.5 и 2.8:

$$\mathcal{J}_1^2=\sum_{l=1}^{m}\sum_{k\in I_1}\mu_k^{-1}\left|\int_0^1\overline{f'_l(t)}\exp(i\omega_3\mu_k t)\,dt\right|\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}\le$$

$$\le\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k\in I_1}\frac{\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}}{\mu_k^p}\right)^{1/p}\left\{\sum_{k\in I_1}\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}\left|\int_0^1\overline{f'_l(t)}\exp(i\omega_3\mu_k t)\,dt\right|^q\right\}^{1/q}\le$$

$$\le C\;M_p2^{-\frac{1}{q}}\sum_{l=1}^{m}\left\|f'_l\right\|_p\le C\;2^{-\frac{1}{q}}\left\|f'\right\|_{p,m}<\infty.$$

Ряд $\mathcal{J}_1^3$ оценивается так же, как ряд $\mathcal{J}_1^2$. Для оценки ряда $\mathcal{J}_1^4$ применим лемму 2.5:

$$\mathcal{J}_1^4=\left(\|f\|_{\infty,m}+\left\|f'\right\|_{1,m}\right)\sum_{k\in I_1}\mu_k^{-2}\left(\sum_{r=2}^{3}\mu_k^{2-r}\|U_r\|_1\right)\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}\le$$

$$\le C\;\left(\|f\|_{\infty,m}+\left\|f'\right\|_{1,m}\right)\left(\sum_{r=2}^{3}\|U_r\|_1\,2^{1-r}\right)<\infty. \tag{3.2}$$

Теперь оценим ряд $\mathcal{J}_1^5$. Для этого сначала применим неравенство Гельдера, а затем леммы 2.4 и 2.6:

$$\mathcal{J}_1^5=\sum_{l=1}^{m}\sum_{k\in I_1}\mu_k^{-1}\|\Psi_k\|_{\infty,m}\left|\int_0^1\overline{f_l'(t)}\exp(-i\mu_k t)\,dt\right|\leq$$

$$\leq\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k\in I_1}\mu_k^{-p}\|\Psi_k\|_{\infty,m}^{p}\right)^{1/p}\left\{\sum_{k\in I_1}\left|\int_0^1\overline{f_l'(t)}\exp(-i\mu_k t)\,dt\right|^q\right\}^{1/q}\leq$$

$$\leq C2^{-\frac{1}{q}}\left\|f'\right\|_{p,m}<\infty.$$

Таким образом, ряд $\mathcal{J}_1$ равномерно сходится на $\overline{G}$. Применяя оценку (2.6) для коэффициентов f_k, точно так же доказывается равномерная сходимость ряда $\mathcal{J}_2$ на $\overline{G}$. Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|f_k||\Psi_k(x)|$ равномерно сходится на $\overline{G}$. В силу полноты системы $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2^m(G)$ и непрерывности $f(x)$ на $\overline{G}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}f_k\Psi_k(x)$ равномерно сходится именно к $f(x)$, т. е. имеет место равенство

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\Psi_k(x),\qquad x\in\overline{G}. \tag{3.3}$$

Теперь убедимся в справедливости оценки (1.2). В силу равенства (3.3)

$$|R_\nu(x,f)|=|f(x)-\sigma_\nu(x,f)|=\left|\sum_{\mu_k>\nu}f_k\Psi_k(x)\right|\leq$$

$$\leq\sum_{\mu_k\geq\nu}|f_k|\,\|\Psi_k\|_{\infty,m}=\sum_{k\in B_1(\nu)}|f_k|\,\|\Psi_k\|_{\infty,m}+$$

$$+\sum_{k\in B_2(\nu)}|f_k|\,\|\Psi_k\|_{\infty,m}=K_1(\nu)+K_2(\nu),$$

где $B_1(\nu)=\{k\colon \mu_k\geq\nu,\operatorname{Im}\lambda_k<0\}$, $B_2(\nu)=\{k\colon \mu_k\geq\nu,\operatorname{Im}\lambda_k>0\}$.

Ряды $K_1(\nu)$ и $K_2(\nu)$ оцениваются по схеме, аналогичной оцениванию рядов $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$. В результате получаем

$$K_j(\nu)\leq C\Bigg\{C_1(f)\,\nu^{\alpha-2}+\nu^{-\frac{1}{q}}\left\|f'\right\|_{p,m}+$$

$$+\nu^{-1}\left(\|f\|_{\infty,m}+\|f\|_{1,m}\right)\sum_{r=2}^{3}\nu^{2-r}\|U_r\|_1\Bigg\},\quad j=1,2.$$

Следовательно, при $1<p\leq 2$ справедлива оценка (1.2). Теорема 1.1 в случае $1<p\leq 2$ доказана. При $p>2$ справедливость теоремы 1.1 следует из вложения $L_p^m(G)\subset L_2^m(G)$.

Теорема 1.1 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.2.** Пусть $U_1(x)\in L_2(G)$, $U_r(x)\in L_1(G)$, $r=2,3$, $f(x)\in$ $\in W_{2,m}^1(G)$ и выполняется условие (1.1). Докажем равномерную сходимость ряда $\sum_{\mu_k\geq 2}|f_k||\Psi_k(x)|$ на $\overline{G}$. В силу оценки (2.4) находим

$$\sum_{\mu_k\ge 2}|f_k|\,|\Psi_k|_{\infty,m}\le C\left\{C_1(f)\sum_{\mu_k\ge 2}\mu_k^{\alpha-3}\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}+\right.$$

$$+\sum_{\mu_k\ge 2}\mu_k^{-1}\left|\left(U_1^*f,\mu_k^{-2}\Psi_k^{(2)}\right)\right|\|\Psi_k\|_{\infty,m}+\sum_{\mu_k\ge 2}\mu_k^{-1}\|\Psi_k\|_{\infty,m}\left|\left(f',\mu_k^{-2}\Psi_k^{(2)}\right)\right|+$$

$$\left.+\|f\|_{\infty,m}\sum_{\mu_k\ge 2}\mu_k^{-2}\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}\left(\sum_{r=2}^{3}\mu_k^{2-r}\|U_r\|_1\right)\right\}=C\{A_1+A_2+A_3+A_4\}.$$

Ряды A_1 и A_4 оцениваются так же, как ряды $\mathcal{J}_1^1$ и $\mathcal{J}_1^4$. Для A_1 выполняется оценка (3.1), а для A_4 — оценка (3.2) с заменой множителя $\|f\|_{\infty,m}+\|f'\|_{1,m}$ на множитель $\|f\|_{\infty,m}$.

Для оценивания рядов A_2 и A_3 применим лемму 2.3 для системы $\{\mu_k^{-2}\Psi_k^{(2)}(x)\},\ \mu_k\ge 2$, а также лемму 2.5 при $\delta=1,\ \mu=2$. В результате получим

$$A_2=\sum_{\mu_k\ge 2}\mu_k^{-1}\|\Psi_k\|_{\infty,m}\left|\left(U_1^*f,\mu_k^{-2}\Psi_k^{(2)}\right)\right|\le\left(\sum_{\mu_k\ge 2}\mu_k^{-2}\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\sum_{\mu_k\ge 2}\left|\left(U_1^*f,\mu_k^{-2}\Psi_k^{(2)}\right)\right|^2\right)^{1/2}\le C2^{-\frac12}\|U_1^*f\|_{2,m},$$

$$A_3=\sum_{\mu_k\ge 2}\mu_k^{-1}\|\Psi_k\|_{\infty,m}\left|\left(f',\mu_k^{-2}\Psi_k^{(2)}\right)\right|\le\left(\sum_{\mu_k\ge 2}\mu_k^{-2}\|\Psi_k\|^2_{\infty,m}\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\sum_{\mu_k\ge 2}\left|\left(f',\mu_k^{-2}\Psi_k^{(2)}\right)\right|^2\right)^{1/2}\le C\,2^{-\frac12}\left\|f'\right\|_{2,m}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|f_k||\Psi_k(x)|$ сходится равномерно на $\overline{G}$. Отсюда следует равномерная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}f_k\Psi_k(x)$. В силу полноты системы $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2^m(G)$ и непрерывности вектор-функции $f(x)$ будем иметь

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\Psi_k(x),\qquad x\in\overline{G}.$$

Нетрудно заметить, что для остатка $R_\nu(x,f)$ этого ряда будет справедлива оценка (в остатке суммирование ведется по номерам k, для которых $\mu_k>\nu$)

$$\|R_\nu(\cdot,f)\|_{C[0,1]}\le C\left\{C_1(f)\,\nu^{\alpha-2}+\nu^{-\frac12}\left(\|U_1^*f\|_{2,m}+\left\|f'\right\|_{2,m}\right)+\right.$$

$$\left.+\nu^{-1}\sum_{r=2}^{3}\nu^{2-r}\|U_r\|_1\right\},\qquad \nu\ge 2.$$

Теорема 1.2 доказана.

Для обоснования оценки $(1.3'')$ достаточно в доказательстве теоремы 1.2 учесть, что последовательность остатков сходящегося ряда стремится к нулю, т. е.

$$\sum_{\mu_k \geq \nu} \left| \left(U_1^* f, \mu_k^{-2} \Psi_k^{(2)} \right) \right|^2 = o(1), \qquad \nu \to +\infty,$$

$$\sum_{\mu_k \geq \nu} \left| \left(f', \mu_k^{-2} \Psi_k^{(2)} \right) \right|^2 = o(1), \qquad \nu \to +\infty.$$

***Доказательство теоремы* 1.3.** В силу ортонормированности системы $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2^m(G)$ выполняется условие (2.11). С другой стороны,

$$1 = |(\Psi_k, \Psi_k)| \leq \|\Psi_k\|_{p,m} \|\Psi_k\|_{q,m} \leq \|\Psi_k\|_{\infty,m} \|\Psi_k\|_{q,m}.$$

Отсюда следует, что $\|\Psi_k\|_{q,m}^{-q} \leq \|\Psi_k\|_{\infty,m}^{q}$. Поэтому в силу неравенства (2.11) и равномерной ограниченности системы $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ для любого $\tau > 0$ получаем

$$\sum_{0 \leq \mu_k \leq \tau} \|\Psi\|_{\infty,m}^{q} \|\Psi\|_{q,m}^{-q} \leq \sum_{0 \leq \mu_k \leq \tau} \|\Psi\|_{\infty,m}^{2q} \leq$$

$$\leq C \sum_{0 \leq \mu_k \leq \tau} 1 \leq C\tau.$$

Таким образом, для системы $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ выполняются все условия достаточной части теоремы 3 работы [10]. Поэтому система $\{\mu_k^{-2} \Psi_k^{(2)}(x)\}$, $\mu_k \geq 1$, удовлетворяет неравенству Рисса при $1 < p < 2$.

Для доказательства теоремы 1.3 достаточно оценить ряд A_3 $\big($все остальные ряды A_1, A_2, A_4 оценены в теореме 1.2 без требования равномерной ограниченности системы $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}\big)$. Применим неравенство Гельдера, неравенство Рисса для системы $\left\{\mu_k^{-2} \Psi_k^{(2)}(x)\right\}$, $\mu_k \geq 1$, и лемму 2.6. В результате этого для ряда A_3 и его остатка получим

$$A_3 = \sum_{\mu_k \geq 2} \mu_k^{-1} \|\Psi_k\|_{\infty,m} \left| \left(f', \mu_k^{-2} \Psi_k^{(2)} \right) \right| \leq \left(\sum_{\mu_k \geq 2} \mu_k^{-p} \|\Psi_k\|_{\infty,m}^{p} \right)^{1/p} \times$$

$$\times \left(\sum_{\mu_k \geq 2} \left| \left(f', \mu_k^{-2} \Psi_k^{(2)} \right) \right|^q \right)^{1/q} \leq C 2^{-\frac{1}{q}} \left\| f' \right\|_{p,m},$$

$$\sum_{\mu_k \geq \nu} \mu_k^{-1} \|\Psi_k\|_{\infty,m} \left| \left(f', \mu_k^{-2} \Psi_k^{(2)} \right) \right| \leq \left(\sum_{\mu_k \geq \nu} \mu_k^{-p} \|\Psi_k\|_{\infty,m}^{p} \right)^{1/p} \times$$

$$\times \left(\sum_{\mu_k \geq \nu} \left| \left(f', \mu_k^{-2} \Psi_k^{(2)} \right) \right|^q \right)^{1/q} \leq C \nu^{-\frac{1}{q}} \left\| f' \right\|_{p,m}.$$

Теорема 1.3 доказана.

Литература

1. *Ильин В. А.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. – 1983. – **273**, № 5. – С. 1048 – 1053.
2. *Lazetic N. L.* On uniform convergence on closed intervals of spectral expansions and their derivatives for functions from $W_p^{(1)}$ // Mat. Vestnik. – 2004. – **56**. – P. 91 – 104.
3. *Kurbanov V. M., Safarov R. A.* Uniform convergence of expansion responding to the Schrödinger operator // Proc. Inst. Math. and Mech. Nat. Acad. Sci. Azerbaijan. – 2004. – **20**. – P. 63 – 70.
4. *Kurbanov V. M. Garayeva A. T.* Absolute and uniform convergence of expansion in root-vector functions of the Schrödinger operator with matrix potential // Dokl. Math. – 2013. – **87**, № 3. – P. 304 – 306.
5. *Kurbanov V. M., Akhundova E. B.* Absolute convergence of spectral expansion in eigenfunctions of third order ordinary differential operator // Proc. Inst. Math. and Mech. Nat. Acad. Sci. Azerbaijan. Special Issue. – 2014. – **40**. – P. 264 – 274.
6. *Kurbanov V. M., Huseynova Y. I.* On convergence of spectral expansion of absolutely continuous vector-function in eigen vector-functions of fourth order differential operator // Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. – 2014. – **34**, № 1. – P. 83 – 90.
7. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
8. *Керимов Н. Б.* Некоторые свойства собственных и присоединенных функций обыкновенных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. – 1986. – **291**, № 5. – С. 1054 – 1055.
9. *Курбанов В. М.* О неравенстве Хаусдорфа – Юнга для систем корневых вектор-функций дифференциального оператора n-го порядка // Дифференц. уравнения. – 1997. – **33**, № 3. – С. 356 – 367.
10. *Курбанов В. М.* Об аналоге теоремы Рисса и базисности в L_p системы корневых функций дифференциального оператора. I, II // Дифференц. уравнения. – 2013. – **49**, № 1. – С. 7 – 19; № 4. – С. 437 – 449.
11. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 537 с.

Получено 15.07.16,
после доработки — 14.12.16