УДК 512.64

В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош (Ін-т математики НАН України, Київ)

НЕРОЗКЛАДНІ ТА ІЗОМОРФНІ ОБ'ЄКТИ В КАТЕГОРІЇ МОНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ НАД ЛОКАЛЬНИМ КІЛЬЦЕМ

We study the indecomposability and isomorphism of objects from the category of monomial matrices $\mathrm{Mmat}(K)$ over a commutative local principal ideal ring K (whose objects are square monomial matrices and the morphisms from X to Y are the matrices C such that $XC = CY$). We also study the subcategory $\mathrm{Mmat}_0(K)$ of the category $\mathrm{Mmat}(K)$ with the same objects and only those morphisms that are monomial matrices.

Исследуются неразложимость и изоморфизм объектов категории мономиальних матриц $\mathrm{Mmat}(K)$ над коммутативным локальным кольцом главных идеалов K (объектами которой являются квадратные мономиальные матрицы, а морфизмами из X в Y — такие матрицы C, что $XC = CY$). Изучается также подкатегория $\mathrm{Mmat}_0(K)$ категории $\mathrm{Mmat}(K)$ с теми же самыми объектами и только теми морфизмами, которые являются мономиальными матрицами.

1. Вступ. Задача про опис, з точністю до подібності, матриць над комутативним локальним кільцем головних ідеалів, що не є полем, містить у собі класичну нерозв'язну задачу про пару матриць над полем [1] (у сучасній термінології такі задачі називаються дикими; більш детально про це див. у п. 7), тому актуальним є розгляд частинних випадків і вивчення матриць спеціального вигляду.

У роботах [2–5] розглядається задача про опис (з точністю до подібності) матриць розмірів 2×2, 3×3 і 4×4 над локальними кільцями. Багато робіт присвячено вивченню різних властивостей матриць над кільцями; серед них слід виділити відомі монографії [6, 7]. Але в цих роботах питання, пов'язані з нерозкладністю та подібністю матриць, по суті не розглядаються (за винятком вивчення деяких властивостей специфічного характеру та окремих простих випадків). Нерозкладність та подібність матриць вивчались, як правило, лише у зв'язку з матричними зображеннями скінченних груп і в основному циклічних груп (тобто у випадках, коли матриці задовольняють відповідні поліноміальні співвідношення).

Метою цієї статі є вивчення мономіальних матриць над комутативними кільцями. Хоча означення і частина результатів мають місце для довільних комутативних локальних кілець (при відповідних уточненнях), ми для простоти розглядаємо матриці над локальними кільцями головних ідеалів.

2. Категорії мономіальних матриць. Позначимо через K комутативне локальне кільце головних ідеалів, що не є полем, через K^* групу його оборотних елементів відносно множення. Тоді єдиний максимальний ідеал (радикал) R кільця K дорівнює tK, де t визначається однозначно з точністю до оборотного множника, і будь-який елемент $x \in K$ має вигляд εt^s, де $\varepsilon \in K^*$ і $s \geq 0$. Число s (яке не залежить від вибору t) називаємо *вагою елемента* x і позначаємо через $w(x)$. Елемент ε вже залежить від t; більш того, навіть при фіксованому t, якщо K не є областю цілісності, він визначається елементом x неоднозначно, а саме $\varepsilon t^s = \varepsilon' t^s$ тоді і лише тоді, коли ε і ε' рівні за модулем $\mathrm{Ann}\,(t^s) := \{y \in K \mid yt^s = 0\}$, тобто $\varepsilon - \varepsilon' \in \mathrm{Ann}\,(t^s)$. Ступінь нільпотентності елемента x позначаємо через $l(x)$; якщо x ненільпотентний, то вважаємо, що $l(x) = \infty$. Аналогічно вводиться позначення $l(R)$. Якщо K — область цілісності, то $l(R) = \infty$, і навпаки.

Матрицю над K (не обов'язково квадратну) назвемо *мономіальною*, якщо кожний її рядок і кожний стовпець містять не більше одного ненульового елемента. Квадратну матрицю назвемо *строго мономіальною*, якщо кожний її рядок і кожний стовпець містять рівно один ненульовий елемент.

Позначимо через $\mathrm{Mat}(K)$ категорію, об'єктами якої є квадратні матриці над кільцем K, а морфізмами із матриці X в матрицю Y — такі матриці C, що $XC = CY$. Називатимемо її *категорією квадратних матриць над* K. Ізоморфні об'єкти категорії $\mathrm{Mat}(K)$ — це подібні матриці. Повну підкатегорію категорії $\mathrm{Mat}(K)$, множина об'єктів якої складається із мономіальних матриць, позначимо через $\mathrm{Mmat}(K)$ і назвемо *категорією мономіальних матриць над* K. Через $\mathrm{Mmat}_0(K)$ позначимо підкатегорію категорії $\mathrm{Mmat}(K)$ з тими ж самими об'єктами і лише тими морфізмами, що є мономіальними матрицями; назвемо цю категорію *сильною категорією мономіальних матриць над* K.

Нагадаємо, що *переставно подібними* називаються квадратні матриці, які отримуються одна з одної однаковою перестановкою рядків і стовпців; у цьому випадку подібність здійснюється за допомогою строго мономіальної матриці, всі ненульові елементи якої дорівнюють одиничному елементу кільця. Якщо ж подібність здійснюється за допомогою діагональної матриці, то матриці називаються *діагонально подібними*. Дві квадратні матриці назвемо *переставно діагонально подібними*, якщо одна з них діагонально подібна матриці, що переставно подібна іншій.

Квадратну матрицю назвемо *переставно розкладною*, якщо вона переставно подібна прямій сумі двох матриць, і *переставно нерозкладною* — в протилежному випадку.

Має місце таке твердження.

Твердження 1. 1. *Квадратна мономіальна матриця над* K *нерозкладна як об'єкт категорії* $\mathrm{Mmat}_0(K)$ *тоді і лише тоді, коли вона переставно нерозкладна.*

2. *Дві мономіальні матриці над* K *ізоморфні в категорії* $\mathrm{Mmat}_0(K)$ *тоді і тільки тоді, коли вони переставно діагонально подібні.*

Зіставимо мономіальній матриці X орієнтований граф $\Gamma(X)$ з вершинами $1, 2, \ldots, n$ і стрілками $i \to j$ для всіх $x_{ij} \neq 0$. Очевидно, $\Gamma(X)$ є неперетинним об'єднанням ланцюгів і циклів, кожен з яких має однаковий напрямок стрілок. З точністю до переставної подібності матриця X є прямою сумою мономіальних матриць, що відповідають вказаним ланцюгам і циклам. Якщо граф $\Gamma(X)$ складається лише з одного ланцюга, то мономіальну матрицю X будемо називати *ланцюговою*, а якщо з одного циклу, то — *циклічною*. Очевидно, що обидва типи матриць переставно нерозкладні.

Отже, в категорії $\mathrm{Mmat}_0(K)$ кожна мономіальна матриця ізоморфна прямій сумі ланцюгових і циклічних матриць (які є нерозкладними об'єктами).

При дослідженні об'єктів і морфізмів категорії мономіальних матриць $\mathrm{Mmat}(K)$ основну роль повинні, очевидно, відігравати ланцюгові та циклічні матриці. Їх природно розглядати з точністю до переставної подібності (або, що те саме, перенумерації рядків і стовпців), і, як побачимо нижче, дуже зручно для кожного із такого типу матриць використовувати деяку їх канонічну форму відносно таких перетворень. З точки зору нашого методу основним є випадок циклічних матриць, а випадок ланцюгових матриць розглядається як „вироджений”. Вивчаються ці випадки відповідно в пп. 3 – 5 і 6.

3. Канонічно циклічні матриці. Очевидно, що циклічна матриця розміру $n \times n$ переставно подібна матриці вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таку матрицю ми називаємо *канонічно циклічною*. Послідовність $\overline{a} = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ називаємо *визначальною послідовністю* матриці A і пишемо $A = M(\overline{a}) = M(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$.

Дві послідовності $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $\overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, члени яких належать деякій множині, назвемо *циклічно еквівалентними*, якщо $\overline{y}$ отримується із $\overline{x}$ циклічною перестановкою її членів: $\overline{y} = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{i-1})$.

Оскільки перехід від циклічної матриці до переставно подібної їй канонічно циклічної матриці означає, що вершини графа $\Gamma(X)$ нумеруються числами $1, 2, \dots, n$ підряд і проти напрямку стрілок, то має місце таке твердження.

Твердження 2. *Матриця $M(\overline{b})$ переставно подібна матриці $M(\overline{a})$ тоді і лише тоді, коли їх визначальні послідовності циклічно еквівалентні.*

Послідовність ваг $\overline{w}(\overline{a}) = (w(a_1), \dots, w(a_{n-1}), w(a_n))$ членів визначальної послідовності $\overline{a}$ називаємо *ваговою послідовністю* матриці A і позначаємо $\overline{w}(A)$. Якщо зафіксувати твірний елемент t радикала R, то $\overline{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \dots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$, де $s_i = w(a_i)$ і ε_i — елементи із K^* (які, згідно з викладеним вище, визначаються послідовністю $\overline{a}$ неоднозначно, якщо K не є областю цілісності). В цьому випадку матрицю $M(\overline{a})$ позначаємо також через $M_t(\overline{a}) = M_t(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ або $M_t(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$, де $\overline{w} = \overline{w}(\overline{a})$ і $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$. Якщо добуток елементів $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n$ позначити через ε, то очевидно, що матриця $M_t(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$ діагонально подібна матриці $M_t(\overline{w}, \overline{\varepsilon}_0)$, де $\overline{\varepsilon}_0 = (1, \dots, 1, \varepsilon)$, яку позначатимемо також через $M_t(\overline{w}, \varepsilon)$. Згідно з викладеним канонічно циклічну матрицю вигляду $M_t(\overline{w}, \varepsilon)$ природно називати *зведеною*.

Твердження 3. *Матриці $M = M_t(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$ і $M' = M_t(\overline{w}, \overline{\varepsilon}')$, де $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$, $\overline{\varepsilon}' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{n-1}, \varepsilon'_n)$, діагонально подібні тоді і лише тоді, коли елементи $\varepsilon = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$ і $\varepsilon' = \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_{n-1} \varepsilon'_n$ кільця K рівні за модулем $\operatorname{Ann}(t^s)$, де s — найбільший член вагової послідовності $\overline{w}$.*

Доведення. Нехай $\overline{w} = (s_1, \dots, s_{n-1}, s_n)$. Очевидно, можна вважати, що $M = M_t(\overline{w}, \varepsilon)$ і $M' = M_t(\overline{w}, \varepsilon')$. Окрім того, за твердженням 2 можна вважати, що $s = s_n$, тобто $s_n \geq s_i$ для будь-якого $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Припустимо, що матриці M і M' діагонально подібні, тобто існує така оборотна діагональна матриця D, що $MD = DM'$. Скалярну рівність $(MD)_{ij} = (DM')_{ij}$ будемо позначати через (i, j). Якщо $(d_1, \dots, d_{n-1}, d_n)$ — головна діагональ матриці D, то вказана матрична рівність рівнозначна такій системі скалярних рівностей:

$$(i+1, i)\colon d_i t^{s_i} = d_{i+1} t^{s_i}, \quad \text{де} \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$(1, n)\colon \varepsilon d_n t^s = \varepsilon' d_1 t^s.$$

Враховуючи нерівності $s \geq s_i$ для $i = 1, 2, \dots, n-1$, із перших рівностей отримуємо $d_1 t^s = d_2 t^s = \ldots = d_n t^s$, а тоді рівність $(1, n)$, яка вже має вигляд $\varepsilon d_1 t^s = \varepsilon' d_1 t^s$, означає, що ε і ε' рівні за модулем $\operatorname{Ann}(t^s)$.

Обернене твердження є очевидним.

Твердження 1 (друга частина), 2 і 3 дають відповідь на питання про ізоморфізм двох канонічно циклічних матриць у категорії $\operatorname{Mmat}_0(K)$.

4. Нерозкладні канонічно циклічні матриці в категорії Mmat (K). Матриця A розміру $n \times n$ над комутативним кільцем називається *розкладною*, якщо вона (в кільці матриць розміру $n \times n$ над цим кільцем) подібна прямій сумі двох матриць, які мають розміри $n_1 \times n_1$ і $n_2 \times n_2$, де $n_1, n_2 > 0$, і *нерозкладною* — у протилежному випадку. Для мономіальної матриці A над кільцем K ці означення відповідають означенням розкладних і нерозкладних об'єктів категорії мономіальних матриць.

У цьому пункті розглядається питання про нерозкладність канонічно циклічних матриць у категорії $\mathrm{Mmat}(K)$.

4.1. Загальний критерій нерозкладності. Нам знадобиться наступне, більш відоме для полів, твердження для матриць над довільним комутативним локальним кільцем (яке має місце і для наборів матриць).

Теорема 1. *Квадратна матриця A над комутативним локальним кільцем розкладна тоді і лише тоді, коли існує ідемпотентна матриця X, відмінна від нульової і одиничної матриць, яка комутує з A.*

Доведення. Дійсно, будь-яка ідемпотентна матриця X над локальним кільцем діагоналізуєма (див., наприклад, [6, с. 334]) і до того ж кожен її діагональний елемент дорівнює 0 або 1. Отже, якщо X не є ані нульовою, ані одиничною матрицею, то існує така оборотна матриця C, що $X = C^{-1}(E \oplus 0)C$, де E — одинична матриця (яка є „непорожньою”, як і нульова матриця). Якщо ж така матриця X комутує з матрицею A, то CXC^{-1} комутує з $A' = CAC^{-1}$, звідки випливає, що матриця A' є прямою сумою двох матриць, а отже, матриця $A = C^{-1}A'C$ розкладна.

Обернене твердження очевидне: якщо матриця A є розкладною, тобто $A = C^{-1}A'C$, де A' — пряма сума двох матриць, то за ідемпотентну матрицю X можна взяти матрицю вказаного вище вигляду, тобто $X = C^{-1}(E \oplus 0)C$.

Квадратну матрицю над кільцем K назвемо *P-трикутною*, якщо вона переставно подібна нижньо-трикутній (а отже, і верхньо-трикутній) матриці.

Із попередньої теореми маємо такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай A — квадратна матриця над кільцем K і кожна ідемпотентна матриця X, що комутує з матрицею A:*

1) *є P-трикутною за модулем R;*

2) *за модулем R має рівні елементи на головній діагоналі.*

Тоді матриця A є нерозкладною.

Дійсно, якщо ідемпотентна матриця Y за модулем R є верхньо-трикутною з однаковими елементами на головній діагоналі, а будь-яка така матриця над полем (у даному випадку над полем K/R) є нульовою або одиничною, то $Y = tZ$ або $E - Y = tZ$. Це означає, що матриця tZ ідемпотентна, звідки $tZ = 0$ (оскільки рівність $t^2Z^2 = tZ$ еквівалентна рівності $\alpha tZ = 0$, де $\alpha = 1 - tZ$ — оборотний елемент). Отже, $Y = 0$ або $Y = E$. Таким чином, $X = 0$ або $X = E$ для будь-якої матриці X, переставно подібної матриці Y.

При застосуванні наслідку 1 потрібно аналізувати матричну рівність $AX = XA$, де $A = (a_{ij})$ — фіксована матриця деякого розміру $n \times n$ і X — довільна матриця такого ж розміру. Ця рівність еквівалентна системі скалярних рівностей $(AX)_{ij} = (XA)_{ij}$, де i, j пробігають числа від 1 до n; таку рівність будемо позначати через $[i, j]_A$. Якщо розглядати рівність $MX = XM$ для канонічно циклічної матриці $M_t(\overline{a})$ з визначальною послідовністю $\overline{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \ldots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$, де $\varepsilon_i \in K^*$, то відповідні скалярні рівності мають вигляд

$$[i, j]_M : \varepsilon_{i-1} t^{s_{i-1}} x_{i-1,j} = \varepsilon_j t^{s_j} x_{i,j+1}$$

або, в еквівалентній формі (після заміни $i-1$ на i),

$$[i+1, j]_M : \varepsilon_i t^{s_i} x_{ij} = \varepsilon_j t^{s_j} x_{i+1,j+1}, \qquad (1)$$

при цьому індекси 0 і $n+1$ потрібно замінити відповідно на індекси n і 1 (тобто індекси розглядаються за модулем n).

4.2. Частинний випадок (для канонічно циклічних матриць). Розглянемо випадок канонічно циклічної матриці $M = M(\overline{a})$, вагова послідовність $\overline{w}(\overline{a}) = (s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n)$ якої не має однакових членів. Задамо на числах $1, 2, \ldots, n$ лінійну впорядкованість $\prec$, вважаючи, що $i \prec j$ тоді і лише тоді, коли $s_i < s_j$. Розташуємо числа $1, 2, \ldots, n$ в порядку зростання відносно $\prec$: $p_1 \prec p_2 \prec \ldots \prec p_n$.

Зафіксуємо твірний елемент t радикала R. Тоді $\overline{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \ldots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$, де $\varepsilon_i \in$ $\in K^*$.

Розглянемо матричну рівність $MX = XM$, де $X = (x_{ij})$ — довільна матриця. Із рівностей (1) випливає, що $x_{ij} \in R$, якщо $s_i < s_j$. Тоді матриця, отримана з матриці X розташуванням її рядків і стовпців у порядку $p_1, p_2, \ldots, p_n$, є нижньо-трикутною за модулем R, а це означає, що матриця X є P-трикутною. Далі, із рівностей (1) при $i = j$ випливає, що матриця X має за модулем R рівні елементи на головній діагоналі. Отже, за наслідком 1 матриця M є нерозкладною.

Таким чином, доведено наступне твердження.

Твердження 4. *Канонічно циклічна матриця з різними вагами її ненульових елементів є нерозкладною в категорії* $\mathrm{Mmat}(K)$.

У загальному випадку подібна теорема не справджується. Наприклад, якщо $t^2 \neq 0$ і характеристика кільця K не дорівнює двом, то канонічно циклічна матриця $M_t(1, t, 1, t)$ є розкладною:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Але теорема залишається справедливою у випадку неперіодичної вагової послідовності. Щоб зробити такий висновок із системи рівностей (1), потрібно мати зручний критерій неперіодичності вагової послідовності. Це питання розглядається в наступному підпункті.

4.3. Частковий порядок на послідовностях. Нехай $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$ ($\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел). Лексикографічний порядок на множині $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \ldots \times \mathbb{N}_0$ (n разів) позначаємо через $<_n$. Іншими словами, якщо $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то $\overline{x} <_n \overline{y}$ тоді і лише тоді, коли існує таке число $1 \leq i \leq n$, що $x_1 = y_1, \ \ldots, \ x_{i-1} = y_{i-1}, \ x_i < y_i$. Число i будемо позначати через $l(\overline{x}, \overline{y})$.

Зафіксуємо деяку послідовність $\overline{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ і введемо для її циклічних перестановок таке позначення:

$$\overline{v}_i = (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+n-1}),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

(індекси розглядаються за модулем n). Задамо на множині $[1, n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ відношення строгого часткового порядку $\prec_{\overline{v}}$ таким чином:

$$i \prec_{\overline{v}} j \Longleftrightarrow \overline{v}_i <_n \overline{v}_j.$$

Послідовність $\overline{v}$ називається періодичною, якщо $\overline{v}_j = \overline{v}$ для деякого $j > 1$.

Твердження 5. *Наступні умови є еквівалентними*:

a) *послідовність $\overline{v}$ періодична;*

b) *існує таке $j \in \{2, \ldots, n\}$, що $a_{1+s} = a_{j+s}$ для будь-якого $s \in \mathbb{Z}$ (індекси розглядаються за модулем s)*;

c) *існує таке натуральне число $q \neq n$, що $q|n$ і $a_{i+pq} = a_i$ для довільних $i = 1, 2, \ldots, q$, $p = 1, 2, \ldots, n/q$.*

Доведення. Імплікації a) $\Leftrightarrow$ b) і c) $\Rightarrow$ a) очевидні. Доведемо імплікацію b) $\Rightarrow$ c). Позначимо через V множину всіх $j \in \mathbb{N}$, які задовольняють умову b), і покладемо $V_0 = \{j - 1 \,|\, j \in \in V\} \setminus 0$. Враховуючи співвідношення Безу, маємо, що найбільший спільний дільник двох чисел $a, b \in V_0$ також належить V_0. І для доведення умови c) залишилося лише врахувати, що $\{1, 2, \ldots, n - 1\} \cap V_0 \neq \varnothing$ (згідно з умовою b)) і $n \in V_0$.

У випадку періодичності послідовності $\overline{v}$ будь-яке число q, вказане в умові c), називається її *періодом*. Легко показати (замінивши в наведених вище міркуваннях співвідношення Безу на співвідношення $a = yb + r$, де $0 \leq r < b$), що найменший період ділить всі інші.

Безпосередньо із викладеного вище випливає таке твердження.

Твердження 6. *Наступні умови є еквівалентними:*

a) *послідовність $\overline{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ періодична;*

b) *частковий порядок $\prec_{\overline{v}}$ не є лінійним;*

c) *послідовності $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ утворюють мультимножину, що не є множиною.*

4.4. Випадок неперіодичної вагової послідовності. У цьому підпункті ми доведемо наступну теорему для канонічно циклічних матриць над кільцем K.

Теорема 2. *Канонічно циклічна матриця з неперіодичною ваговою послідовністю нерозкладна в категорії* $\mathrm{Mmat}(K)$.

Розглядаємо канонічно циклічну матрицю з неперіодичною ваговою послідовністю

$$M = M_t(\overline{a}) = M_t(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = M_t(\varepsilon_1 t^{s_1}, \ldots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n}),$$

де t — фіксований твірний радикала, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n$ — оборотні елементи. Члени вагової послідовності $\overline{w} = (s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n)$ належать множині $[0, m - 1] := \{0, 1, \ldots, m - 1\}$, де $m = l(R)$ — ступінь нільпотентності R (при $m = \infty$ вважаємо, що $m - 1 = m$). Згідно з викладеним у попередньому пункті, матриці M відповідає часткова впорядкованість $\prec_{\overline{w}}$ множини $[1, n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, а саме

$$i \prec_{\overline{w}} j \Longleftrightarrow \overline{w}_i <_n \overline{w}_j \ \ (\text{в } [0, m-1]^n \subseteq \mathbb{N}_0^n),$$

де $\overline{w}_i$ та $\overline{w}_j$ — циклічні перестановки послідовності $\overline{w}$ відповідно з першим членом i та j. За твердженням 6 цей порядок є лінійним.

Розглянемо матричну рівність $MX = XM$, де $X = (x_{ij})$ — довільна матриця.

Лема 1. *Якщо $i \prec_{\overline{w}} j$, то $x_{ij} \in R$.*

Доведення проводимо індукцією по $l(\overline{w}_i, \overline{w}_j)$ (див. пп. 4.2). Відносно бази індукції див. пп. 4.1. Отже, нехай $i \prec_{\overline{w}} j$ і при цьому $l(\overline{w}_i, \overline{w}_j) > 1$. Тоді: a) $s_i = s_j$ і b) $\overline{w}_{i+1} <_n \overline{w}_{j+1}$. Із нерівності b) маємо $(i+1) \prec_{\overline{w}} (j+1)$, до того ж, очевидно, $l(\overline{w}_{i+1}, \overline{w}_{j+1}) = l(\overline{w}_i, \overline{w}_j) - 1$. За індукційним припущенням $x_{i+1,j+1} \in R$. Далі, із рівностей a) і $\varepsilon_i t^{s_i} x_{ij} = \varepsilon_j t^{s_j} x_{i+1,j+1}$ (див. (1)) випливає, що $\varepsilon_i t^{s_i}(x_{ij} - \varepsilon_i^{-1}\varepsilon_j x_{i+1,j+1}) = 0$, звідки $x_{ij} - \varepsilon_i^{-1}\varepsilon_j x_{i+1,j+1} \in R$. І оскільки $x_{i+1,j+1} \in R$, то і $x_{ij} \in R$.

Із цієї леми і лінійності порядку $\prec_{\overline{w}}$ випливає, що X — P-трикутна матриця (див. доведення твердження 4), а із рівностей (1) при $i = j$ — що матриця X має за модулем R рівні елементи на головній діагоналі. Отже, за наслідком 1 матриця M є нерозкладною.

4.5. d-Зведені канонічно циклічні матриці. Нехай $M = M_t(\overline{a})$ — зведена канонічно циклічна матриця з визначальною послідовністю $\overline{a} = (t^{s_1}, \ldots, t^{s_{n-1}}, \varepsilon t^{s_n})$. Вважаємо, що вагова послідовність $\overline{w} = (s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n)$ періодична, і нехай d — деякий її період (не обов’язково найменший). Покладемо $n_d = \dfrac{n}{d}$. Клітину Фробеніуса Φ з характеристичним поліномом $f(x) = x^{n_d} - \varepsilon$ назвемо d-*визначальною клітиною Фробеніуса матриці* M:

$$\Phi = \Phi_{n_d}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \varepsilon \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розташувавши рядки і стовпці матриці M в порядку $1, 1+d, 1+2d, \ldots, 1+(n_d-1)d,\ 2, 2+d, 2+2d, \ldots, 2+(n_d-1)d,\ \ldots,\ d, 2d, \ldots, n_d d$, отримаємо наступну (переставно подібну до M) матрицю з блоками розміру $n_d \times n_d$:

$$M_d = M_{dt}(\overline{a}) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & t^{s_d}\Phi \\ t^{s_1}E_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & t^{s_{d-1}}E_{d-1} & 0 \end{pmatrix},$$

де $E_1 = \ldots = E_{d-1} = E$ — одинична матриця.

Послідовність $\overline{w}_d = (s_1, \ldots, s_{d-1}, s_d)$ назвемо d-*ваговою послідовністю* блокової матриці $M_d = M_{dt}(\overline{a})$, а саму матрицю M_d, яку будемо позначати також через $M_{dt}(\overline{w}_d, \varepsilon)$, — d-*зведеною канонічно циклічною матрицею*. Клітину Фробеніуса $\Phi = \Phi_{n_d}(\varepsilon)$ назвемо d-*визначальною клітиною Фробеніуса матриці* M.

Отже, кожній зведеній канонічно циклічній матриці $M = M(\overline{w}, \varepsilon)$ з періодичною ваговою послідовністю $\overline{w}$ і фіксованому періоду d цієї послідовності відповідає (переставно подібна до неї) d-зведена канонічно циклічна матриця. Оскільки перестановка рядків і стовпців по суті не змінює структуру матриці, то можна сказати, що d-зведені канонічно циклічні матриці — це одна із форм існування зведених канонічно циклічних матриць, а в узагальненому сенсі і взагалі канонічно циклічних матриць (оскільки вони діагонально подібні до зведених).

Зауважимо, що формально в цю схему входить і випадок неперіодичних послідовностей. Дійсно, якщо покласти $d = n$, вже не обов’язково вважаючи, що вагова послідовність $\overline{w}$ періодична (число n не є періодом, але є „квазіперіодом” у тому сенсі, що $w_{i+n} = w_i$ для довільного натурального числа s), то d-зведена матриця M_d вводиться аналогічним чином і дорівнює початковій матриці M. Але в цій статті випадки періодичних і неперіодичних вагових послідовностей розглядаються окремо.

4.6. Випадок періодичної вагової послідовності. Нехай $M = M_t(\overline{a})$ — канонічно циклічна матриця над K розміру $n \times n$ з визначальною послідовністю $\overline{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \varepsilon_2 t^{s_2}, \ldots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$ та періодичною ваговою послідовністю $\overline{w}$ і d_0 — найменший період вагової послідовності. Покладемо $n_0 = \dfrac{n}{d_0}$ і $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$. Клітину Фробеніуса $\Phi = \Phi_{n_0}(\varepsilon)$ з характеристичним поліномом $f(x) = x^{n_0} - \varepsilon$ назвемо *визначальною клітиною Фробеніуса матриці* M (див. попередній підпункт).

Як було показано в пп. 4.2, у випадку періодичної вагової послідовності канонічно циклічна матриця може бути розкладною. У наступній теоремі питання про нерозкладні і розкладні канонічно циклічні матриці розглядається (в цій ситуації) більш детально.

Теорема 3. *Канонічно циклічна матриця $M = M_t(\overline{a})$ з періодичною ваговою послідовністю розкладна, якщо розкладна її визначальна клітина Фробеніуса, і нерозкладна, якщо її визначальна клітина Фробеніуса нерозкладна за модулем R.*

Доведення. Очевидно, можна вважати, що $\overline{a} = (t^{s_1}, t^{s_2}, \ldots, t^{s_{n-1}}, \varepsilon t^{s_n})$, тобто M є зведеною. Більш того, замість матриці M можна розглядати відповідну d_0-зведену канонічно циклічну матрицю $M_0 := M_{d_0 t}(\overline{w}_0, \varepsilon)$, де $\overline{w}_0$ позначає послідовність $\overline{w}_{d_0}$.

Легко бачити, що матриця M_0 розкладна, якщо розкладна матриця Φ (якщо $P^{-1}\Phi P = A \oplus B$ і Q — пряма сума d екземплярів матриці P, то матриця $Q^{-1} M_0 Q$ переставно подібна прямій сумі двох матриць).

Покажемо тепер, що матриця M_0 нерозкладна, якщо матриця Φ нерозкладна за модулем R.

Оскільки період d найменший, то d_0-вагова послідовність $\overline{w}_0$ (блокової) матриці M_0 неперіодична, а отже, матриці M_0 можна зіставити лінійну впорядкованість $\prec_{\overline{w}_0}$ множини $[1, d]$, яку будемо позначати через $\prec_0$ (див. пп. 4.3, 4.4).

Розглянемо матричну рівність $M_0 X = X M_0$, де $X = (X_{ij})$ — довільна блокова матриця з блоками розміру $n_0 \times n_0$; матриці M_0 і X будемо перемножати поблоково. Ця рівність еквівалентна системі матричних рівностей

$$\langle i, j \rangle_0 \colon (M_0 X)_{ij} = (X M_0)_{ij},$$

де i, j пробігають числа від 1 до d_0 (тут в обох частинах рівностей вказано блоки, які стоять на перетині i-ї горизонтальної та j-ї вертикальної смуг відповідних матриць). Легко бачити, що ці рівності мають вигляд

$$\langle i, j \rangle_0 = \begin{cases} t^{s_{i-1}} X_{i-1,j} = t^{s_j} X_{i,j+1}, & \text{якщо} \quad i \neq 1, \quad j \neq d, \\ t^{s_d} \Phi X_{dj} = t^{s_j} X_{1,j+1}, & \text{якщо} \quad i = 1, \quad j \neq d, \\ t^{s_{i-1}} X_{i-1,d} = t^{s_d} X_{i1} \Phi, & \text{якщо} \quad i \neq 1, \quad j = d, \\ t^{s_d} \Phi X_{dd} = t^{s_d} X_{11} \Phi, & \text{якщо} \quad i = 1, \quad j = d. \end{cases} \tag{2}$$

Лема 2. *Якщо $i \prec_0 j$, то $X_{ij} = 0$ за модулем R.*

Доведення аналогічне доведенню леми 1.

Оскільки порядок $\prec_0$ лінійний, то з леми 2 випливає, що за допомогою однакової перестановки горизонтальних і вертикальних смуг матрицю X можна привести до нижньо-блоково-трикутного вигляду (див. доведення твердження 4). Далі, із рівностей (2) при $i = j$ випливає, що діагональні блоки X_{ii} матриці X рівні між собою за модулем R (при цьому слід враховувати, що матриця Φ є оборотною). Тоді з рівності $\langle 1, d \rangle_0$ випливає, що за модулем R матриця X_{11}

комутує з матрицею Φ, а оскільки Φ нерозкладна за модулем R, то знову ж таки за модулем R виконуються рівності $X_{11} = \ldots = X_{dd} = 0$ або $X_{11} = \cdots = X_{dd} = E$ (за теоремою 1 для поля $k = K/R$). Із викладеного випливає, що виконуються обидві умови наслідку 1 і, отже, матриця M_0 є нерозкладною.

5. Ізоморфізм канонічно циклічних матриць в категорії Mmat (K). У цьому пункті розглядається задача про ізоморфізм двох канонічно циклічних матриць у категорії мономіальних матриць, тобто про подібність канонічно циклічних матриць за допомогою довільних оборотних матриць.

5.1. Частковий порядок на послідовностях (продовження). Продовжуючи дослідження, розпочаті в пп. 4.3, розглянемо випадок двох послідовностей.

На множині всіх скінченних послідовностей із членами, що належать $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$, введемо наступний частковий порядок $<_\infty$: $\overline{x} <_\infty \overline{y}$ для $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ тоді і лише тоді, коли існує таке число $i \in \mathbb{N}$, що $x_1 = y_1, \ \ldots, \ x_{i-1} = y_{i-1}, \ x_i < y_i$. При цьому індекси $j > n$ у виразах x_j і $j > k$ у виразах y_j розглядаються відповідно за модулем n і k. Число i позначається через $l(\overline{x}, \overline{y})$. Очевидно, що на множині послідовностей довжини n відношення $<_\infty$ дорівнює відношенню $<_n$.

Зафіксуємо деякі послідовності $\overline{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n, \ \overline{v}' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_k) \in \mathbb{N}_0^k$ і покладемо $[1,k]' = \{i' \,|\, i \in [1,k]\} = \{1', 2', \ldots, k'\}$. Використавши позначення для циклічних перестановок послідовностей, введених у пп. 4.3, задамо на множині $[1,n] \cup [1,k]'$ відношення строгого часткового порядку $\prec_{\overline{v}\,\overline{v}'} \equiv \prec_{\overline{v}'\overline{v}}$ таким чином:

$$i \prec_{\overline{v}\,\overline{v}'} j \iff \overline{v}_i <_\infty \overline{v}_j, \quad \text{якщо} \quad i, j \in [1,n],$$

$$i' \prec_{\overline{v}\,\overline{v}'} j' \iff \overline{v}'_i <_\infty \overline{v}'_j, \quad \text{якщо} \quad i', j' \in [1,k]',$$

$$i \prec_{\overline{v}\,\overline{v}'} j' \iff \overline{v}_i <_\infty \overline{v}'_j, \quad \text{якщо} \quad i \in [1,n], \quad j' \in [1,k]',$$

$$i' \prec_{\overline{v}\,\overline{v}'} j \iff \overline{v}'_i <_\infty \overline{v}_j, \quad \text{якщо} \quad i' \in [1,k]', \quad j \in [1,n].$$

Послідовності $\overline{v}$ і $\overline{v}'$ назвемо *циклічно залежними*, якщо існують такі i та j, що $a_{i+s} = a'_{j+s}$ для довільного $s \in \mathbb{N}$, і *циклічно незалежними* — у протилежному випадку. Із означення випливають такі факти:

1) послідовності однакової довжини циклічно залежні тоді і лише тоді, коли вони циклічно еквівалентні;

2) неперіодична послідовність не може бути циклічно залежною з послідовністю меншої довжини.

Безпосередньо із викладеного вище випливає таке твердження.

Твердження 7. *Наступні умови є еквівалентними:*

a) *послідовності* $\overline{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *і* $\overline{v}' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_k)$ *неперіодичні і циклічно незалежні;*

b) *частковий порядок* $\prec_{\overline{v}\,\overline{v}'}$ *є лінійним.*

5.2. Основний результат. Має місце така теорема.

Теорема 4. *Канонічно циклічні матриці* $M_t(\overline{a})$ *і* $M_t(\overline{a}')$ *ізоморфні в категорії* $\mathrm{Mmat}(K)$ *тоді і лише тоді, коли вони ізоморфні в категорії* $\mathrm{Mmat}_0(K)$.

Доведення. *Достатність* є очевидною.

Необхідність. Нехай $\overline{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \ldots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$, $\overline{a}' = (\varepsilon'_1 t^{s'_1}, \ldots, \varepsilon'_{n-1} t^{s'_{n-1}}, \varepsilon'_n t^{s'_n})$, де $\varepsilon_i, \varepsilon'_i \in K^*$, $\overline{w} = (s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n)$, $\overline{w}' = (s'_1, \ldots, s'_{n-1}, s'_n)$.

Розглянемо спочатку випадок, коли обидві вагові послідовності матриць $M = M_t(\overline{a})$ і $M' = M_t(\overline{a}')$ неперіодичні.

Нам знадобиться одне допоміжне твердження.

Нехай X — деяка така матриця, що $MX = XM'$. Ця рівність еквівалентна системі скалярних рівностей $(MX)_{ij} = (XM')_{ij}$, де i, j пробігають числа від 1 до n; таку рівність будемо позначати через $[i, j] = [i, j]_{MM'}$. Легко бачити (див. у зв'язку з цим пп. 4.1), що ці рівності мають вигляд

$$[i+1, j]_{MM'} : \varepsilon_i t^{s_i} x_{ij} = \varepsilon'_j t^{s'_j} x_{i+1, j+1} \tag{3}$$

(індекси розглядаються за модулем n). Згідно з викладеним у попередньому пункті, на множині $[1, n] \cup [1, n]'$ задано частковий порядок $\prec_{\overline{w}\,\overline{w}'}$.

Лема 3. *Нехай $i, j \in [1, n]$. Якщо $i \prec_{\overline{w}\,\overline{w}'} j'$, то $x_{ij} \in R$, а якщо $i' \prec_{\overline{w}\,\overline{w}'} j$, то $x_{j+1, i+1} \in$ $\in R$.*

Лема доводиться аналогічно лемі 1.

Нехай тепер матриці $M = M_t(\overline{a})$ і $M' = M_t(\overline{a}')$ ізоморфні в категорії $\mathrm{Mmat}(K)$, тобто існує така оборотна матриця X над K, що $MX = XM'$. Покажемо спочатку, що послідовності $\overline{w}$ і $\overline{w}'$ циклічно еквівалентні.

Припустимо протилежне. Тоді вони циклічно незалежні (див. факт 1 в пп. 5.1) і за твердженням 7 частковий порядок $\prec_{\overline{w}\,\overline{w}'}$, заданий у даному випадку на множині $[1, n] \cup [1, n]'$, є лінійним. Позначимо єдиний максимальний елемент через m_0. Якщо $m_0 = k \in [1, n]$, то $s' \prec_{\overline{w}\,\overline{w}'} k$ для довільного $s' \in [1, n]'$, а якщо $m_0 = k' \in [1, n]'$, то $s \prec_{\overline{w}\,\overline{w}'} k'$ для довільного $s \in [1, n]$. Тоді за лемою 3 в першому випадку $x_{k+1, s+1} \in R$ для всіх $s = 0, 1, \ldots, n-1$, а в другому — $x_{sk} \in R$ для всіх $s = 1, 2, \ldots, n$. Отже, матриця X має за модулем R нульовий рядок або нульовий стовпець, і тому не може бути оборотною над K. Прийшли до суперечності.

Отже, вагові послідовності $\overline{w}$ і $\overline{w}'$ циклічно еквівалентні, а тоді за твердженням 2 можна вважати, що вони рівні. З огляду на другу частину твердження 1 залишилося показати діагональну подібність матриць $M_t(\overline{a})$ і $M_t(\overline{a}')$.

Частковий порядок $\prec_{\overline{w}\,\overline{w}}$, який будемо позначати через $\prec_{2\overline{w}}$, вже не є лінійним: j і j' будуть непорівняльними для довільного $j \in [1, n]$. Із неперіодичності послідовності $\overline{w}$, очевидно, випливає, що інших пар непорівняльних елементів в $[1, n] \cup [1, n]'$ немає. Отже, існують рівно два максимальних елементи, які позначимо через m_0 і m'_0 ($m_0 \in [1, n]$). Оскільки $i \prec_{2\overline{w}} m'_0$ для будь-якого $i \neq m_0$ із $[1, n]$, то за лемою 3 всі елементи m_0-го стовпця матриці X, за винятком x_{m_0, m_0}, є нульовими за модулем R. Отже, елемент $x_{m_0, m_0} \in K$ є оборотним (бо оборотна матриця X). Із рівностей (3) при $i = j$ випливає, що $\varepsilon x_{m_0, m_0} = \varepsilon' x_{m_0, m_0}$, де $\varepsilon = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$ і $\varepsilon' = \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_{n-1} \varepsilon'_n$. Звідси маємо $\varepsilon = \varepsilon'$, а отже, за твердженням 3 матриці $M_t(\overline{a})$ і $M_t(\overline{a}')$ діагонально подібні.

Нехай тепер вагові послідовності $\overline{w}$ і $\overline{w}'$ матриць $M = M_t(\overline{a})$ і $M' = M_t(\overline{a}')$ періодичні. Позначимо найменші їх періоди через p і q; покладемо $n_p = \dfrac{n}{p}$, $n_q = \dfrac{n}{q}$. Оскільки матриця M переставно діагонально подібна відповідній їй p-зведеній канонічно циклічній матриці $M_0 = M_{pt}(\overline{w}_0, \varepsilon)$, де $\overline{w}_0$ позначає послідовність $\overline{w}_p$, а матриця M' — матриці $M'_0 = M_{qt}(\overline{w}'_0, \varepsilon)$, де $\overline{w}'_0$ позначає послідовність $\overline{w}_q$, то замість M і M' можна розглядати відповідно M_0 і M'_0. Оскільки p і q — найменші періоди послідовностей $\overline{w}$ і $\overline{w}'$, то послідовності $\overline{w}_0$ і $\overline{w}'_0$ неперіодичні. Визначальні клітини Фробеніуса матриць M і M' позначимо відповідно через Φ і Φ'.

Доведення в цьому випадку проводиться за схемою, аналогічною схемі доведення у випадку неперіодичних послідовностей (але проведеною не для всіх матриць, як у доведенні, а лише для зведених), з використанням міркувань із доведення теореми 3. Тому доведення буде викладено в дещо скороченому вигляді.

Нехай матриці M_0 і M_0' ізоморфні в категорії $M_t(\overline{a}')$ і X — така оборотна матриця, що $M_0X = XM_0'$. Будемо розглядати X як блокову матрицю $X = (X_{ij})$ з блоками X_{ij} розміру $n_0 \times n_0'$; матриці в указаній рівності будемо перемножати поблоково. Тоді ця матрична рівність еквівалентна системі матричних рівностей

$$\langle i, j\rangle_{00'} : (M_0X)_{ij} = (XM_0')_{ij},$$

де i пробігає числа від 1 до p, а j — від 1 до q. Ці рівності мають такий же вигляд, як і рівності (2), але з двома відмінностями: d потрібно замінити на q і у правих частинах рівностей Φ замінити на Φ'.

Покажемо спочатку, що послідовності $\overline{w}_0$ і $\overline{w}_0'$ мають однакову довжину і циклічно еквівалентні.

Припустимо, що хоча б одна з цих умов не виконується. Покладемо $\alpha = \overline{w}_0$, $\alpha' = \overline{w}_0'$. Тоді вони циклічно незалежні (див. виділені у пп. 4.1 факти 1 і 2), і за твердженням 7 частковий порядок $\prec_{\alpha\alpha'}$, заданий у даному випадку на множині $[1, p] \cup [1, q]'$, є лінійним. Отже (див. доведення у випадку неперіодичних вагових послідовностей матриць M і M'), матриця X має за модулем R нульову горизонтальну або вертикальну смугу, і тому не може бути оборотною. Прийшли до суперечності.

Таким чином, послідовності $\overline{w}_0$ і $\overline{w}_0'$ мають однакову довжину (а отже, $p = q$) і циклічно еквівалентні, а тоді, очевидно, циклічно еквівалентними є і послідовності $\overline{w}$ і $\overline{w}'$.

Для завершення доведення достатньо показати, що елементи $\varepsilon = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n$ і $\varepsilon' = \varepsilon_1' \ldots \varepsilon_{n-1}'\varepsilon_n'$, що відповідають визначальним послідовностям матриць M і M', дорівнюють один одному (див. твердження 3).

Оскільки за твердженням 2 можна вважати, що вагові послідовності $\overline{w}$, $\overline{w}'$ і матриці M, M' рівні, то p-зведені канонічно циклічні матриці, які їм відповідають, мають однакові відповідні блоки, за винятком тих, що стоять на перетині перших горизонтальних смуг з останніми вертикальними смугами, а це визначальні клітини Фробеніуса матриць M і M'. Як і у випадку неперіодичних вагових послідовностей матриць M і M', доводиться, що існує таке $m_0 \in [1, p]$, що діагональний блок X_{m_0,m_0} матриці X оборотний і $\Phi X_{m_0,m_0} = X_{m_0,m_0}\Phi'$. Прирівнюючи визначники обох частин цієї рівності, переконуємося, що визначники фробеніусових матриць Φ і Φ' рівні. Звідси $\varepsilon = \varepsilon'$, що і потрібно було довести.

Єдиний ще нерозглянутий випадок, коли матриця M має неперіодичну вагову послідовність, а матриця M' періодичну, неможливий. Це випливає із міркувань, які в попередньому випадку привели до рівності найменших періодів, якщо для першої матриці за p взяти „квазіперіод” n.

6. Канонічно ланцюгові матриці, їх нерозкладність та подібність. Питання про нерозкладність та подібність ланцюгових матриць більш прості, ніж такі ж питання про циклічні матриці. Розглядаючи ланцюгові матриці як вироджений випадок циклічних матриць, можна досліджувати їх за тією ж схемою, що і циклічні матриці.

Будь-яка ланцюгова матриця розміру $n \times n$ переставно подібна, очевидно, матриці вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таку матрицю називатимемо *канонічно ланцюговою*.

Послідовність $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ називаємо *визначальною послідовністю* матриці A і пишемо $A = N(\overline{a}) = N(a_1, \ldots, a_{n-1})$. Послідовність ваг $\overline{w}(\overline{a}) = (w(a_1), \ldots, w(a_{n-1}))$ членів визначальної послідовності $\overline{a}$ називаємо *ваговою послідовністю* матриці A і позначаємо $\overline{w}(A)$.

Мають місце наступні твердження.

Твердження 8. *Матриці $N(\overline{b})$ і $N(\overline{a})$ переставно подібні тоді і лише тоді, коли їх визначальні послідовності рівні, і діагонально подібні, коли рівні їх вагові послідовності.*

Отже, враховуючи твердження 1, переконуємося, що канонічно ланцюгові матриці є (як і канонічно циклічні матриці) нерозкладними об'єктами категорії $\mathrm{Mmat}_0(K)$, а дві такі матриці ізоморфні в ній тоді і лише тоді, коли рівними є їх вагові послідовності.

Якщо зафіксувати твірний елемент t радикала R, то $\overline{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \ldots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}})$, де $s_i = w(a_i)$ і ε_i — деякі елементи із K^*. У цьому випадку матрицю $N(\overline{a})$ позначаємо також через $N_t(\overline{a}) = N_t(a_1, \ldots, a_{n-1})$ або $N_t(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$, де $\overline{w} = \overline{w}(\overline{a})$ і $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$. Очевидно, що матриця $N_t(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$ діагонально подібна матриці $N_t(\overline{w}, \overline{1})$, де $\overline{1} = (1, \ldots, 1)$. Згідно з викладеним канонічно ланцюгову матрицю вигляду $N_t(\overline{w}, \overline{1})$ природно називати *зведеною*.

Для канонічно ланцюгових матриць як об'єктів категорії $\mathrm{Mmat}(K)$ справедливі теореми, аналогічні теоремам 2 і 4.

Теорема 5. *Канонічно ланцюгова матриця нерозкладна в категорії* $\mathrm{Mmat}(K)$.

Теорема 6. *Канонічно ланцюгові матриці $N_t(\overline{a})$ і $N_t(\overline{a}')$ ізоморфні в категорії* $\mathrm{Mmat}(K)$ *тоді і лише тоді, коли вони ізоморфні в категорії* $\mathrm{Mmat}_0(K)$.

Доведення цих теорем проводиться аналогічно доведенню теореми 2 і теореми 4 (випадок двох неперіодичних вагових послідовностей).

Вкажемо лише, як у цьому випадку дається означення строгих часткових порядків $\prec_{\overline{w}}$ і $\prec_{\overline{w}\,\overline{w}'}$, які у випадку канонічно циклічних матриць введено відповідно в пп. 4.4 і 5.2 (див. додатково пп. 4.3 і 5.1). У цьому випадку $<_n$ буде позначати лексикографічний порядок на множині $\overline{\mathbb{N}}_0^n$, де $\overline{\mathbb{N}}_0 = 0 \cup \mathbb{N} \cup \infty$ (в якій $s < \infty$ для будь-якого $s \neq \infty$).

Нехай $\overline{w} = (s_1, \ldots, s_{n-1})$ — вагова послідовність матриці $N = N_t(\overline{a})$. Її члени належать множині $[0, m-1]$, де $m = l(R)$. Частковий порядок $\prec_{\overline{w}}$ на множині $[1, n]$ вводиться таким же чином, як у випадку канонічно циклічних матриць, але $\overline{w}_i$ вже позначають не циклічні перестановки послідовності $\overline{w}$, а такі послідовності довжини n: $\overline{w}_i = (w_i, \ldots, w_{n-1}, w_n, w_1, \ldots, w_{i-1})$, де $w_n = w_1 = \ldots = w_{i-1} = m$, $i = 1, 2, \ldots, n$; зокрема, всі члени послідовності $\overline{w}_n$ дорівнюють m.

Отже, з урахуванням даних позначень $i \prec_{\overline{w}} j \iff \overline{w}_i <_n \overline{w}_j$. Очевидно, що цей порядок є лінійним.

Нехай тепер $\overline{w} = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$ і $\overline{w}' = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_{n-1})$ — вагові послідовності матриць $N = N_t(\overline{a})$ і $N' = N_t(\overline{a}')$. Частковий порядок $\prec_{\overline{w}\,\overline{w}'}$ на множині $[1, n] \cup [1, n]'$, де $[1, n]' = \{i' \mid i \in [1, n]\}$, вводиться таким же чином, як у випадку двох канонічно циклічних матриць з неперіодичними послідовностями. А саме (з урахуванням нових позначень)

$$i \prec_{\overline{w}\,\overline{w}'} j \iff \overline{w}_i <_n \overline{w}_j, \quad \text{якщо} \quad i, j \in [1, n],$$

$$i' \prec_{\overline{w}\,\overline{w}'} j' \Longleftrightarrow \overline{w}'_i <_n \overline{w}'_j, \quad \text{якщо} \quad i', j' \in [1,n]',$$

$$i \prec_{\overline{w}\,\overline{w}'} j' \Longleftrightarrow \overline{w}_i <_n \overline{w}'_j, \quad \text{якщо} \quad i \in [1,n], \quad j' \in [1,n]',$$

$$i' \prec_{\overline{w}\,\overline{w}'} j \Longleftrightarrow \overline{w}'_i <_n \overline{w}_j, \quad \text{якщо} \quad i' \in [1,n]', \quad j \in [1,n].$$

Цей порядок також є лінійним.

На завершення вкажемо на зв’язок (в сенсі подібності) між канонічно ланцюговими та циклічними матрицями.

Теорема 7. *Канонічно ланцюгова матриця N та канонічно циклічна матриця M не можуть бути ізоморфними в категорії* $\mathrm{Mmat}(K)$.

Дійсно, нехай $C^{-1}NC = M$ і $v_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Тоді $(v_0C)M = v_0CC^{-1}NC = (v_0N)C = 0$. Оскільки вектор v_0C містить оборотну координату, скажімо, на i-му місці, то $i-1$-й стовпець матриці M буде нульовим, що неможливо для циклічної матриці ($i-1$ при $i=1$ ототожнюється з n).

7. Додаток: ручні та дикі матричні задачі. Матричні задачі (задачі про еквівалентність заданих наборів матриць за допомогою заданих перетворень) бувають двох типів: або задача повністю розв’язується, або містить в собі класичну нерозв’язну задачу лінійної алгебри про опис пар матриць над полем із точністю до подібності (коротко — задачу про пару матриць). Зауважимо, що в другому випадку початкова задача містить у собі задачу про подібність n-ок матриць для будь-якого $n > 2$ (що є основною причиною вважати задачу про пару матриць еталоном складності в теорії матричних задач та теорії зображень). Протягом довгого часу математики дотримувались саме такої (очевидно, нестрогої) точки зору і в цих напрямках велися дослідження. В одних роботах розв’язувались конкретні задачі, в інших доводилось, що та чи інша задача містить у собі задачу про пару матриць. Пізніше такі задачі почали називати відповідно ручними та дикими (відносно самої ідеї див. роботу [8], а відносно строгих означень та основних теорем у загальному випадку — роботи [9, 10]).

Перший результат про задачі, які містять у собі задачу про пару матриць, отримав І. М. Гельфанд [11], і полягає він у тому, що задача про подібність пари комутуючих матриць A, B над полем містить у собі задачу про пару матриць. Обидві матриці A, B (які залежать від двох матриць як параметрів) вибрано трикутними і нільпотентними, а звідси випливає, що задачу про пару матриць містить у собі задача про опис матричних зображень нескінченної групи $Z \times Z$, а отже, і вільної абелевої групи рангу більшого двох.

Для матричних зображень скінченних груп (над полем) можна говорити про пару матриць лише у модулярному випадку, коли характеристика поля ділить порядок групи. Перші результати в цьому напрямку отримані П. М. Гудивком (не опубліковано) і С. А. Кругляком [12], які довели, що задача про опис модулярних зображень групи $(p, p), p \neq 2$, містить у собі задачу про пару матриць. Задачу поставив С. В. Берман у зв’язку з розв’язанням В. А. Башевим [13] задачі про опис модулярних зображень групи $(2, 2)$, найменшої діедральної групи (опис зображень довільної діедральної групи над полем характеристики 2 отримано в [14] і незалежно, але лише для 2-груп, у [15]). Загальний випадок для модулярних зображень скінченних груп розглянуто в роботі [16]; на цей час вже існували строгі означення ручних і диких задач і можна було використовувати теореми Ю. А. Дрозда.

Для матриць над комутативними кільцями (що не є полями) перші результати, пов’язані з парою матриць, отримано в роботі [17] для деяких областей цілісності (зокрема, для кільця цілих p-адичних чисел) і в роботі [1] для областей нецілісності (більш точно, для кілець класів лишків за модулем p^s, p — просте число). У цих статтях доведено, що задача про подібність однієї матриці (над вказаними кільцями) містить у собі задачу про пару матриць над полем. Крім того, розглядаються і випадки, коли матриця задає зображення скінченної циклічної групи, але ми не будемо детально це обговорювати, як і взагалі зображення скінченних груп над кільцями (див. у зв'язку з цим монографію [18]).

Сформулюємо більш точно результат, отриманий першим автором у роботі [1], який найбільш цікавий у зв'язку з тематикою цієї статті (див. вступ); при цьому замість кільця класів лишків розглядається довільне комутативне локальне кільце головних ідеалів K (формулювання і доведення із [1] переноситься на цей загальний випадок автоматично).

Зафіксуємо в радикалі R кільця K твірний елемент t і розглянемо таку матрицю над K:

$$M(A,B) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} E & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & E \\ \hline 0 & tE & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & tE & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & tB & E & tE \\ 0 & 0 & 0 & 0 & tA & 0 & 0 & E \end{array}\right),$$

де A і B — довільні квадратні матриці над K однакового розміру, а E позначає одиничну матрицю такого ж розміру. Доведено, що матриці $M(A,B)$ і $M(A',B')$ подібні (як матриці над K) тоді і лише тоді, коли пари матриць (A,B) і (A',B') подібні за модулем R. А це і означає, що задача про подібність оборотної матриці над кільцем K містить у собі задачу про пару матриць над полем $k = K/R$, або, в сучасній термінології, є дикою.

В останні півстоліття дослідження ручних та диких випадків проводилося не лише для зображень класичних об'єктів (напівгрупи, групи, алгебри тощо), а і для нових матричних задач: зображення сагайдаків, зображення частково впорядкованих множин (в тому числі з додатковими структурами на них), зображення в'язок напівланцюгів тощо, включаючи і задачі, які не пов'язані безпосередньо із зображеннями об'єктів, але зводяться до них (відносно вказаних нових задач див., зокрема, роботи [19 – 58]).

Література

1. *Бондаренко В. М.* О подобии матриц над кольцом классов вычетов // Мат. сб. – Киев: Наук. думка, 1976. – С. 275 – 277.
2. *Нечаев А. А.* О подобии матриц над коммутативным локальным артиновым кольцом // Труды сем. им. И. Г. Петровского. –1983. – Вып. 9. – Р. 81 – 101.
3. *Pizarro A.* Similarity classes of 3×3 matrices over a discrete valuation ring // Linear Algebra and Appl. – 1983. – **54**. – P. 29 – 51.
4. *Avni N., Onn U., Prasad A., Vaserstein L.* Similarity classes of 3×3 matrices over a local principal ideal ring // Communs Algebra. – 2009. – **37**, № 8. – P. 2601 – 2615.
5. *Prasad A., Singla P.* Similarity of matrices over local rings of length two // Indiana Univ. Math. J. – 2015. – **64**, № 2. – P. 471 – 514.
6. *McDonald B. R.* Linear algebra over commutative ring. – New York; Basel: M. Dekker, 1984. – 544 p.
7. *Brown W. C.* Matrices over commutative rings. – New York etc.: M. Dekker, 1993. – 294 p.
8. *Donovan P., Freislich M. R.* Some evidence for an extension of the Brauer – Thrall conjecture // Sonderforschungsbereich Theor. Math. (Bonn). – 1972. – **40**. – P. 24 – 26.

9. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 104 – 114.
10. *Дрозд Ю. А.* Ручные и дикие матричные задачи // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 39 – 74.
11. *Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве // Функцион. анализ и его прил. – 1969. – **3**, № 4. – С. 81 – 82.
12. *Кругляк С. А.* О представлениях группы (p, p) над полем характеристики p // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 6. – С. 1253 – 1256.
13. *Башев В. А.* Представления группы $Z_2 \times Z_2$ в поле характеристики 2 // Докл. АН СССР. – 1961. – **141**, вып. 5. – С. 1015 – 1018.
14. *Бондаренко В. М.* Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – **96**, вып. 1. – С. 63 – 74.
15. *Ringel C.* The indecomposable representations of dihedral 2-groups // Math. Ann. – 1975. – **214**, № 1. – P. 19 – 34.
16. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24 – 41.
17. *Гудивок П. М.* О модулярных и целочисленных представлениях конечных групп // Докл. АН СССР. – 1974. – **214**, № 5. – С. 993 – 996.
18. *Гудивок П. М.* Представления конечных групп над коммутативными локальными кольцами. – Ужгород: Изд-во Ужгород. нац. ун-та, 2003. – 118 с.
19. *Gabriel P.* Unzerlegbure Darstellungen, I // Manuscr. Math. – 1972. – **6**, № 1. – P. 71 – 103.
20. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 5 – 31.
21. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32 – 41.
22. *Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В., Бондаренко В. М.* Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69 – 92.
23. *Donovan P., Freislich M. R.* The representation theory of finite graphs and associated algebras // Carleton Lect. Notes. – 1973. – № 5. – P. 3 – 86.
24. *Назарова Л. А.* Представления колчанов бесконечного типа // Изв. АН СССР. – 1973. – **37**, № 4. – С. 752 – 791.
25. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34 – 42.
26. *Loupias M.* Indecomposable representations of finite ordered sets // Lect. Notes Math. – 1975. – **488**. – P. 201 – 209.
27. *Назарова Л. А.* Частично упорядоченные множества бесконечного типа // Изв. АН СССР. – 1975. – **39**, № 5. – С. 963 – 991.
28. *Завадский А. Г., Шкабара А. С.* Коммутативные колчаны и матричные алгебры конечного типа. – Киев, 1976. – 52 с. – (Препринт/АН УССР, Ин-т математики; 76.3).
29. *Плахотник В. В.* Представления частично упорядоченных множеств над коммутативными кольцами // Изв. АН СССР. – 1976. – **40**, № 3. – С. 527 – 543.
30. *Назарова Л. А., Овсиенко С. А., Ройтер А. В.* Поликолчаны конечного типа // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1978. – **148**. – С. 190 – 194.
31. *Кириченко В. В.* Классификация пар взаимно аннулирующих операторов в градуированном пространстве и представления диады обобщенно однорядных алгебр // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1978. – **75**. – С. 91 – 109.
32. *Кириченко В. В.* Скінченно-породжені модулі над діадою узагальнено однорядних кілець // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Математика і механіка. – 1983. – № 25. – С. 91 – 96.
33. *Bekkert V. I.* Tame two-point quivers with relations // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. – 1986. – № 12. – P. 62 – 64.
34. *Назарова Л. А., Бондаренко В. М., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств с инволюцией. – Киев, 1986. – 26 с. – (Препринт/АН УССР, Ин-т математики; 86.80).
35. *Бондаренко В. М.* Связки полуцепных множеств и их представления. – Киев, 1988. – 32 с. – (Препринт/АН УССР, Ин-т математики; 88.60).
36. *Назарова Л. А., Бондаренко В. М., Ройтер А. В.* Ручные частично упорядоченные множества с инволюцией // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1990. – **183**. – С. 149 – 159.

37. *Simson D.* On the representation type of stratified posets // C. r. Acad. sci. Ser. I. – 1990. – **311**, № 1. – P. 5 – 10.
38. *Bondarenko V. M., Zavadskij A. G.* Posets with an equivalence relation of tame type and of finite growth // Can. Math. Soc. Conf. Proc. – 1991. – **11**. – P. 67 – 88.
39. *Бондаренко В. М.* Представления связок полуцепных множеств и их приложения // Алгебра и анализ. – 1991. – **3**, вып. 5. – С. 38 – 67.
40. *Сергейчук В. В.* Замечание о классификации голоморфных матриц с точностью до подобия // Функцион. анализ и его прил. – 1991. – **25**, № 2. – С. 65.
41. *Kasjan S., Simson D.* Fully wild prinjective type of posets and their quadratic forms // J. Algebra. – 1995. – **172**, № 2. – P. 506 – 529.
42. *Arnold D., Dugas M.* Representation type of posets and finite rank Butler groups // Colloq. Math. – 1997. – **74**, № 2. – P. 299 – 320.
43. *Dräxler P., Geiss Ch.* A note on the D_n-pattern // Can. Math. Soc. Conf. Proc. – 1998. – **24**. – P. 145 – 152.
44. *Drozd Yu. A.* Representations of bisected posets and reflection functors // Can. Math. Soc. Conf. Proc. – 1998. – **24**. – P. 153 – 165.
45. *von Hohne H. J., Simson D.* Bipartite posets of finite prinjective type // J. Algebra. – 1998. – **201**, № 1. – P. 86 – 114.
46. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Конечнопредставимые диадические множества // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 10. – С. 1363 – 1396.
47. *Brüstle Th., König S., Mazorchuk V.* The coinvariant algebra and representation types of blocks of category $\mathcal{O}$ // Bull. London Math. Soc. – 2001. – **33**, № 6. – P. 669 – 681.
48. *Drozd Y. A., Greuel G. M.* Tame and wild projective curves and classification of vector bundles // J. Algebra. – 2001. – **246**, № 1. – P. 1 – 54.
49. *Bondarenko V. M.* On dispersing representations of quivers and their connection with representations of bundles of semichains // Algebra and Discrete Math. – 2002. – **1**, № 1. – P. 19 – 31.
50. *Bondarenko V. M.* Linear operators on S-graded vector spaces // Linear Algebra and Appl. – 2003. – **365**. – P. 45 – 90.
51. *Drozd Yu. A., Greuel G. M., Kashuba I.* On Cohen – Macaulay modules on surface singularities // Mosc. Math. J. – 2003. – **3**, № 2. – P. 397 – 418.
52. *Zavadskij A.* Tame equipped posets // Linear Algebra and Appl. – 2003. – **365**. – P. 389 – 465.
53. *Burban I., Drozd Y.* Derived categories of nodal algebras // J. Algebra. – 2004. – **272**, № 1. – P. 46 – 94.
54. *Belitskii G., Bondarenko V. M., Lipyanski R., Plachotnik V. V., Sergeichuk V. V.* The problems of classifying pairs of forms and local algebras with zero cube radical are wild // Linear Algebra and Appl. – 2005. – **402**. – P. 135 – 142.
55. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* On finite posets of inj-finite type and their Tits forms // Algebra and Discrete Math. – 2006. – **5**, № 2. – P. 17 – 21.
56. *Arnold D. M., Simson D.* Representations of finite posets over discrete valuation rings // Communs Algebra. – 2007. – **35**, № 10. – P. 3128 – 3144.
57. *Belitskii G., Dmytryshyn A. R., Lipyanski R., Sergeichuk V. V., Tsurkov A.* Problems of classifying associative or Lie algebras over a field of characteristic not two and finite metabelian groups are wild // Electron. J. Linear Algebra. – 2009. – **18**. – P. 516 – 529.
58. *Bondarenko V. M., Futorny V., Klimchuk T., Sergeichuk V. V., Yusenko K.* Systems of subspaces of a unitary space // Linear Algebra and Appl. – 2013. – **438**, № 5. – P. 2561 – 2573.

Одержано 13.06.17