УДК 517.9

І. В. Веригіна (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ),
В. Д. Кошманенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗАДАЧА ПРО ОПТИМАЛЬНУ СТРАТЕГІЮ В МОДЕЛЯХ КОНФЛІКТНОГО ПЕРЕРОЗПОДІЛУ РЕСУРСНОГО ПРОСТОРУ

The theory of conflict dynamical systems is applied to finding of the optimal strategy in the problem of redistribution of the resource space between two opponents. In the case of infinite fractal division of the space, we deduce an explicit formula for finding the Lebesgue measure of the occupied territory in terms of probability distributions. In particular, this formula gives the optimal strategy for the occupation of the whole territory. The necessary and sufficient condition for the parity distribution of the territory are presented.

Теория динамических систем конфликта применяется для нахождения оптимальной стратегии в задаче перераспределения ресурсного пространства между двумя оппонентами. В настоящей статье найдена явная формула для меры Лебега оккупированной территории в терминах вероятностных распределений в случае бесконечного фрактального разбиения пространства. В частности, она дает оптимальную стратегию для оккупации всей территории. Получены необходимые и достаточные условия для паритетного распределения территории.

1. Постановка задачі. Розглянемо модель складної системи з двох протидіючих сторін, назвемо їх опонентами A та B, які ведуть конфліктну боротьбу за певним фіксованим правилом (законом) з метою захоплення максимальної території деякого ресурсного простору Ω.

Задля спрощення покладаємо, що простором конфлікту є відрізок $\Omega = [0,1]$. Природно вважати, що цей простір є структурованим, тобто поділеним на n регіонів, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$, де $2 \leq n < \infty$ є фіксованим. Більш того, будемо припускати, що задано ітераційний спосіб подрібнення простору, який застосовується у фрактальній геометрії (див., наприклад, [1, 2]). А саме, для фіксованого набору чисел $q_1, q_2, \ldots, q_n$, де $q_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$, покладаємо $\lambda(\Omega_i) \equiv |\Omega_i| = q_i$, де λ — міра Лебега. Тоді на k-му кроці подрібнення, $\Omega = \bigcup\limits_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \Omega_{i_1\ldots i_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, міра Лебега відрізка $\Omega_{i_1\ldots i_k}$ визначається за формулою

$$\lambda(\Omega_{i_1\ldots i_k}) = \left|\Omega_{i_1\ldots i_k}\right| = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots q_n^{m_n}, \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i = k, \tag{1}$$

де $0 \leq m_i \leq k$ позначає кількість індексів в $\Omega_{i_1\ldots i_k}$, що дорівнюють i.

Початковий (доконфліктний) розподіл присутності опонентів A та B на Ω задається довільними ймовірнісними мірами μ та ν:

$$\mu(\Omega_{i_1\ldots i_k}) = p_{i_1\ldots i_k}, \qquad \nu(\Omega_{i_1\ldots i_k}) = r_{i_1\ldots i_k}, \qquad \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} p_{i_1\ldots i_k} = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} r_{i_1\ldots i_k} = 1. \tag{2}$$

Згідно з теорією динамічних систем конфлікту (див. [3 – 5]), при фіксованих правилах конфліктної взаємодії між опонентами еволюція складної системи відбувається таким чином, що за умови $p_{i_1\ldots i_k} > r_{i_1\ldots i_k}$ (стартового пріоритету A над B в $\Omega_{i_1\ldots i_k}$) міра присутності опонента A у цьому регіоні наближається до деякого ненульового значення, а міра присутності опонента B у цьому ж регіоні стає нульовою. Тобто у регіоні $\Omega_{i_1\ldots i_k}$ „перемагає” опонент A. У такому випадку говоримо, що регіон $\Omega_{i_1\ldots i_k}$ буде захоплений (окупований, контрольований) опонентом A. Позначимо такий регіон $\Omega^A_{i_1\ldots i_k}$. І навпаки, якщо $p_{i_1\ldots i_k} < r_{i_1\ldots i_k}$ (в $\Omega_{i_1\ldots i_k}$ пріоритет належить B), то регіон $\Omega_{i_1\ldots i_k}$ буде захоплений (окупований) опонентом B. Позначимо такий регіон $\Omega^B_{i_1\ldots i_k}$. У випадку $p_{i_1\ldots i_k} = r_{i_1\ldots i_k}$ (паритетний стартовий розподіл) обидва опоненти в результаті конфліктної взаємодії з часом повністю втрачають свій вплив у регіоні $\Omega_{i_1\ldots i_k}$. Такий регіон не буде належати жодному з опонентів, позначимо його $\Omega^{A=B}_{i_1\ldots i_k}$. В загальному випадку питання про граничні (післяконфліктні) взаєморозподіли опонентів є самостійною задачею. Абстрактні результати в цьому напрямку одержано в [6, 7].

Стартові пріоритети чи паритети у кожному з регіонів залежать і визначаються стратегіями опонентів. У моделі, що розглядається, стратегії опонентів A, B фіксуються відповідними послідовностями додатних чисел:

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \qquad \beta_1, \ldots, \beta_n, \qquad \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i = 1.$$

Згідно з цими стратегіями (якщо їх зафіксувати), числові характеристики присутності опонентів A та B в кожному з регіонів на k-му кроці подрібнення визначаються за формулами

$$p_{i_1\ldots i_k} = \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\ldots\alpha_n^{m_n}, \qquad r_{i_1\ldots i_k} = \beta_1^{m_1}\beta_2^{m_2}\ldots\beta_n^{m_n}. \tag{3}$$

Припускаємо, що стратегії опонентів не є тотожно рівними, тобто існують такі індекси i, що $\alpha_i \neq \beta_i$. Тому, взагалі, $p_{i_1\ldots i_k} \neq r_{i_1\ldots i_k}$. У роботах [8, 9] було виявлено цікаву властивість. Якщо на k-му кроці подрібнення у регіоні $\Omega_{i_1\ldots i_k}$ „перемагає” опонент A, то через скінченну кількість кроків подальшого подрібнення в цьому регіоні з’являються менші регіони, в яких A втрачає пріоритет, і вони будуть контрольовані опонентом B. При наступних кроках подрібнення в цих регіонах, контрольованих опонентом B, з’являються ще менші регіони, де знову перемагає опонент A, і так далі.

Для врахування динаміки пріоритетів та паритетів на k-му кроці подрібнення зберемо окремо всі регіони, що контролюються A або B, а також ті, де вони обидва втрачають свій вплив. Міри Лебега цих територій позначимо відповідно так:

$$T_k^A = \sum \left|\Omega^A_{i_1\ldots i_k}\right|, \qquad T_k^B = \sum \left|\Omega^B_{i_1\ldots i_k}\right|, \qquad T_k^{A=B} = \sum \left|\Omega^{A=B}_{i_1\ldots i_k}\right|. \tag{4}$$

Нас цікавить, як змінюються значення цих мір, коли k необмежено зростає. Їх граничні значення позначимо таким чином:

$$T^A = \lim_{k\to\infty} T_k^A, \qquad T^B = \lim_{k\to\infty} T_k^B, \qquad T^{A=B} = \lim_{k\to\infty} T_k^{A=B}.$$

Ми доведемо, що ці границі існують та їх можна явно обчислити.

2. Міра Лебега захопленої території у ймовірнісній формі. Щоб знайти явну залежність введених вище мір територій від фіксованих стратегій, проведемо деякий аналіз.

На k-му кроці подрібнення відрізок $\Omega = [0,1]$ є об’єднанням n^k регіонів: $\Omega = \bigcup_{i_1,\ldots,i_k=1}^n \Omega_{i_1\ldots i_k}$. Згідно з постановкою задачі, розподіли опонентів у початковий момент конфліктної взаємодії задано формулами (2), (3). Розглянемо регіони $\Omega_{i_1\ldots i_k}$, де міра присутності опонента A є більшою, ніж міра присутності опонента B, тобто $p_{i_1\ldots i_n} > r_{i_1\ldots i_n}$. У термінах стратегій це означає, що

$$\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\ldots\alpha_n^{m_n} > \beta_1^{m_1}\beta_2^{m_2}\ldots\beta_n^{m_n}$$

або, еквівалентно,

$$\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{m_1}\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{m_2}\ldots\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^{m_n} > 1.$$

Логарифмуючи цю нерівність, одержуємо

$$m_1\ln\frac{\alpha_1}{\beta_1} + m_2\ln\frac{\alpha_2}{\beta_2} + \ldots + m_n\ln\frac{\alpha_n}{\beta_n} > 0.$$

Знак нерівності не зміниться, якщо її поділити на крок подрібнення k. Введемо позначення

$$\theta_k = \frac{m_1}{k}\ln\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{m_2}{k}\ln\frac{\alpha_2}{\beta_2} + \ldots + \frac{m_n}{k}\ln\frac{\beta_n}{\alpha_n} > 0.$$

Отже, виконання умови

$$\theta_k = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{k}\ln\frac{\alpha_i}{\beta_i} > 0 \tag{5}$$

забезпечує „перемогу” опонента А у регіоні $\Omega_{i_1\ldots i_k}$. Такий регіон ми позначили $\Omega^A_{i_1\ldots i_k}$. Нагадаємо, що m_i — це кількість індексів в $\Omega_{i_1\ldots i_k}$, що дорівнюють i. Тоді $\omega_i = \dfrac{m_i}{k}$ називається відносною частотою появи індексу i у послідовності $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$.

Нехай $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ — такий набір цілих значень кількості індексів, що дорівнюють $1, 2, \ldots, n$, при якому виконується нерівність (5) за умови $m_1 + \ldots + m_n = k$. Виходячи із способу фрактального подрібнення відрізка $[0, 1]$, неважко зрозуміти, що кількість відповідних цьому набору регіонів $\Omega^A_{i_1\ldots i_k}$ дорівнює $C_k^{m_1,\ldots,m_n} = \dfrac{k!}{m_1!m_2!\ldots m_n!}$, а завдяки (1) їх загальна міра Лебега дорівнює добутку $C_k^{m_1,\ldots,m_n} q_1^{m_1}\ldots q_n^{m_n}$. Нехай M позначає множину всіх наборів $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ при фіксованому k, для яких виконується нерівність (5). Отже, можемо записати

$$T_k^A = \sum_{(m_1,m_2,\ldots,m_n)\in M}\left|\Omega^A_{i_1\ldots i_k}\right| = \sum_{(m_1,m_2,\ldots,m_n)\in M} C_k^{m_1,m_2,\ldots,m_n} q_1^{m_1} q_2^{m_2}\ldots q_n^{m_n}. \tag{6}$$

Зазначимо, що компоненти останньої суми у рівності (6) в точності збігаються з імовірностями поліноміального розподілу (див., наприклад, [10]). Дійсно, будемо розглядати послідовність індексів $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ у нумерації певного регіону $\Omega_{i_1\ldots i_k}$ як результат k незалежних випробувань, у кожному з яких з'являється один з індексів $\{1, 2, \ldots, n\}$. При цьому будемо вважати, що ймовірність появи індексу i у кожному з випробувань дорівнює q_i, записуємо $\mathrm{P}\{i_s = i\} = q_i$, $i = 1, \ldots, n$. Саме така інтерпретація приводить до поліноміального розподілу. Згідно з результатами [10], якщо відбувається серія k незалежних випробувань, у кожному з яких можна спостерігати лише одну з подій $A_1, \ldots, A_n$ з відповідними ймовірностями $q_1, \ldots, q_n$ (у даному випадку подія A_i означає появу індексу i), то ймовірність того, що у серії k випробувань події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ з'являться відповідно $m_1, m_2, \ldots, m_n$ разів $\left(\sum_{i=1}^n m_i = k\right)$, визначається формулою поліноміального розподілу

$$\mathrm{P}_k(m_1, \ldots, m_n) = \frac{k!}{m_1!m_2!\ldots m_n!} q_1^{m_1}\ldots q_n^{m_n} = C_k^{m_1,\ldots,m_n} q_1^{m_1}\ldots q_n^{m_n}.$$

Порівнюючи цю формулу з формулою (6), робимо висновок, що

$$T_k^A = \sum_{(m_1,m_2,\ldots,m_n)\in M} \mathrm{P}_k(m_1,\ldots,m_n).$$

У свою чергу остання сума поліноміальних імовірностей — це ймовірність того, що для набору індексів $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ виконується умова (5). Отже, на k-му кроці подрібнення міра Лебега території, де перемагає опонент А, дорівнює ймовірності того, що виконується умова (5):

$$T_k^A = \mathrm{P}\{\theta_k > 0\}.$$

Аналогічні міркування можна провести при оцінюванні лебегової міри територій T_k^B та $T_k^{A=B}$. Отже, встановлено справедливість такого твердження.

Твердження 1. *Величини, введені в* (4), *допускають імовірнісну інтерпретацію*

$$T_k^A = \mathrm{P}\{\theta_k > 0\}, \qquad T_k^B = \mathrm{P}\{\theta_k < 0\}, \qquad T_k^{A=B} = \mathrm{P}\{\theta_k = 0\}.$$

Наведемо кілька зауважень. Згідно з вказаною вище інтерпретацією, випадкова величина $\theta_k = \sum_{i=1}^n \dfrac{m_i}{k} \ln \dfrac{\alpha_i}{\beta_i}$ є лінійною комбінацією випадкових величин $\omega_i = \dfrac{m_i}{k}$. Відомо (див., наприклад, [10]), що математичне сподівання таких величин визначається як $\mathrm{M}\{\omega_i\} = \mathrm{M}\left\{\dfrac{m_i}{k}\right\} = q_i$, а при великих k поведінка випадкових величин $\omega_i = \dfrac{m_i}{k}$ є нормально розподіленою. Тому поведінка випадкової величини θ_k, як лінійної комбінації ω_i, при великих k також буде нормально розподіленою. Математичне сподівання $\mathrm{M}\{\theta_k\}$ цієї випадкової величини позначимо через Θ. Отже,

$$\Theta := \mathrm{M}\{\theta_k\} = \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i}. \tag{7}$$

Для подальшого важливо, що введена величина Θ пов'язує алгоритм фрактального поділу простору Ω на регіони із співвідношеннями між початковими стратегіями опонентів, тобто з наборами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ та $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Число Θ визначається при постановці задачі та не залежить від кроку подрібнення k.

3. Основний результат.

Теорема 1. *При нескінченному фрактальному подрібненні простору конфлікту Ω на регіони можливі лише три випадки граничних поділів простору між опонентами. А саме, залежно від знака величини Θ міри Лебега відповідних територій мають такі значення*:

1) *якщо* $\Theta > 0$, *то* $T^A = 1$, $T^B = 0$ *і* $T^{A=B} = 0$;
2) *якщо* $\Theta < 0$, *то* $T^A = 0$, $T^B = 1$ *і* $T^{A=B} = 0$;
3) *якщо* $\Theta = 0$, *то* $T^A = \dfrac{1}{2}$, $T^B = \dfrac{1}{2}$ *і* $T^{A=B} = 0$.

Доведення. Розглянемо перший випадок, коли $\Theta > 0$. Згідно з теоремою Бернуллі (див. [10, 11]), $\lim_{k\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\dfrac{m_i}{k} - q_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$ для довільного $\varepsilon > 0$. Це означає, що відносна частота $\omega_i = \dfrac{m_i}{k}$ збігається за ймовірністю до q_i при зростанні k. Враховуючи цей факт, легко бачити, що для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{k} \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i} - \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i}\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

або
$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{P}\left\{|\theta_k - \Theta| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{8}$$
Це означає, що при великих k величина θ_k збігається за ймовірністю до Θ. Тому з умови $\Theta > 0$ і завдяки (8) одержуємо $\lim_{k\to\infty} \mathrm{P}\{\theta_k > 0\} = 1$. Нагадаємо, що, згідно з твердженням 1, $\mathrm{P}\{\theta_k > 0\} = T_k^A$. Тому
$$T^A = \lim_{k\to\infty} T_k^A = \lim_{k\to\infty} \mathrm{P}\{\theta_k > 0\} = 1.$$
Оскільки $T_k^A + T_k^B + T_k^{A=B} = 1$ для кожного $k = 1, 2, \ldots$, то з існування $\lim_{k\to\infty} T_k^A = T^A = 1$ випливає існування $\lim_{k\to\infty} T_k^B = T^B = 0$ та $\lim_{k\to\infty} T_k^{A=B} = T^{A=B} = 0$. Теорему у першому випадку доведено.

Доведення теореми у другому випадку ($\Theta < 0$) є аналогічним.

Розглянемо третій випадок, тобто коли $\Theta = 0$. Згідно з твердженням 1, число $T_k^A = \mathrm{P}\{\theta_k > 0\} = \mathrm{P}\{\theta_k > \Theta\}$ — це ймовірність того, що випадкова величина θ_k набуває значень більших за своє математичне сподівання. Як було зазначено раніше, при великих k поведінка величини θ_k є нормально розподіленою. Для нормально розподіленої величини, завдяки симетричності нормального розподілу, ймовірність того, що величина набуває значень більших за своє середнє, дорівнює $\dfrac{1}{2}$. Тому T_k^A при великих k збігається до $\dfrac{1}{2}$: $\lim_{k\to\infty} T_k^A = T^A = \dfrac{1}{2}$. Аналогічно, $T^B = \dfrac{1}{2}$. Як наслідок, $T^{A=B} = 0$.

Теорему повністю доведено.

***Приклад* 1.** Нехай подрібнення простору Ω проведено при $n = 2$:
$$\Omega = \bigcup_{i_1,\ldots,i_k=1}^{2} \Omega_{i_1\ldots i_k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$
а стратегії опонентів A та B задаються парами чисел $\alpha = \{\alpha_i\}$, $\beta = \{\beta_i\}$, $i = 1, 2$, таким чином, щоб
$$0 < \alpha_1 = \alpha < 0{,}5, \qquad \alpha_2 = 1 - \alpha, \quad \beta_1 = \beta, \qquad \beta_2 = 1 - \beta, \quad \alpha < \beta.$$
Тоді, згідно з формулою (7), $\Theta = q_1 \ln \dfrac{\alpha}{\beta} + (1 - q_1) \ln \dfrac{1-\alpha}{1-\beta}$. Позначимо
$$\tau = \frac{\ln \dfrac{1-\alpha}{1-\beta}}{\ln \dfrac{1-\alpha}{1-\beta} + \ln \dfrac{\beta}{\alpha}}.$$
Неважко бачити, що умова $\Theta < 0$ рівносильна нерівності $\tau < q_1$, умова $\Theta > 0$ — нерівності $\tau > q_1$, а умова $\Theta = 0$ означає, що $\tau = q_1$. Застосовуючи теорему 1, отримуємо $T^A = 0, T^{A=B} = 0, T^B = 1$ при $\tau < q_1$; $T^A = 1$, $T^{A=B} = 0$, $T^B = 0$ при $\tau > q_1$; $T^A = T^B = \dfrac{1}{2}$, $T^{A=B} = 0$ при $\tau = q_1$. Це в точності збігається з результатом, отриманим у [9].

***Приклад* 2.** Нехай спосіб подрібнення простору Ω та обрані стратегії опонентів A та B є симетрично дзеркальними, тобто $q_i = q_{n-i+1}$, $\alpha_i = \beta_{n-i+1}$ при всіх $i = 1, \ldots, n$. У цьому випадку за формулою (7) отримуємо $\Theta = 0$. Тоді за теоремою 1 $T^A = T^B = 1/2$, а це означає, що розподіл території між опонентами A та B з необхідністю є паритетним.

4. Порівняння стратегій опонентів у термінах ентропії. Введемо величини

$$H(\alpha, q) = -\sum_{i=1}^{n} q_i \ln \alpha_i, \qquad H(\beta, q) = -\sum_{i=1}^{n} q_i \ln \beta_i.$$

Вони пов'язують набори $\alpha = \{\alpha_i\}$ та $\beta = \{\beta_i\}$, що задають початкові стратегії опонентів A та B, з набором чисел $q = \{q_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, який визначає фрактальне подрібнення Ω на регіони. Нехай $H(q) = H(q, q) = -\sum_{i=1}^{n} q_i \ln q_i$. Зазначимо, що за умов розглядуваної задачі ці величини є додатними: $H(\alpha, q)$, $H(\beta, q)$, $H(q) > 0$. У теорії інформації величина $H(q)$ має назву *ентропії* (див., наприклад, [11]). Її зміст — міра невизначеності, нестачі інформації про систему. Величини $H(\alpha, q)$, $H(\beta, q)$ — це так звані *перехресні ентропії*, які характеризують зв'язок між розподілами α та q, β та q відповідно. Чим менше різняться між собою розподіли α та q, тим меншою є *перехресна ентропія* $H(\alpha, q)$ розподілу α відносно розподілу q. Цей факт має точне формулювання.

Твердження 2. $H(q) = \min\limits_{\alpha} H(\alpha, q)$.

Доведення. Розглянемо різницю

$$H(\alpha, q) - H(q) = -\sum_{i=1}^{n} q_i \ln \frac{\alpha_i}{q_i} = -\sum_{i=1}^{n} q_i \ln \left(1 + \frac{\alpha_i - q_i}{q_i}\right).$$

Використовуючи нерівність $\ln(1 + x) \leq x$ для всіх $x > -1$, де рівність можлива лише для $x = 0$, маємо

$$H(\alpha, q) - H(q) \geq -\sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\alpha_i - q_i}{q_i} = -\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - q_i) = \sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 - 1 = 0.$$

Отже, завжди $H(\alpha, q) \geq H(q)$. Рівність $H(\alpha, q) = H(q)$ можлива лише для таких розподілів, коли $\alpha_i = q_i$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Тому мінімальним серед можливих значень $H(\alpha, q)$ є значення $H(q)$.

Теорема 2. *Якщо* $H(\alpha, q) < H(\beta, q)$, *то* $T^A = 1$, $T^B = 0$. *Якщо* $H(\alpha, q) = H(\beta, q)$ (*за умови* $\alpha \neq \beta$), *то* $T^A = T^B = \dfrac{1}{2}$.

Доведення. Нехай $H(\alpha, q) < H(\beta, q)$, тоді

$$\Theta = \sum_{i=1}^{n} q_i \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i} = -\sum_{i=1}^{n} q_i \ln \beta_i + \sum_{i=1}^{n} q_i \ln \alpha_i = H(\beta, q) - H(\alpha, q) > 0.$$

З огляду на теорему 1 робимо висновок, що в цьому випадку $T^A = 1$, $T^B = 0$, тобто опонент, що має меншу перехресну ентропію відносно розподілу q, захоплює більшість території, тоді як інший опонент повністю її втрачає. Нехай $H(\alpha, q) = H(\beta, q)$, тоді

$$\Theta = \sum_{i=1}^{n} q_i \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i} = -\sum_{i=1}^{n} q_i \ln \beta_i + \sum_{i=1}^{n} q_i \ln \alpha_i = H(\beta, q) - H(\alpha, q) = 0.$$

У цьому випадку $T^A = T^B = \dfrac{1}{2}$, тобто опоненти ділять територію порівну.

Теорема 3 (про оптимальну стратегію)**.** *Нехай* $\beta \neq \alpha$. *Якщо* $\alpha_i = q_i$ *для всіх* $i = 1, \ldots, n$, *то* $T^A = 1,\ T^B = 0$.

Доведення. Якщо розподіл опонента А є таким, що $\alpha_i = q_i$ для всіх $i = 1, \ldots, n$, то $H(\alpha, q) = H(q)$. За твердженням 2 значення $H(q)$ є мінімальним серед усіх можливих значень перехресних ентропій відносно розподілу q. Тоді при будь-якому розподілі β опонента В, який не збігається з розподілом α опонента А, справджується нерівність $H(\alpha, q) < H(\beta, q)$. За теоремою 2 це означає, що $T^A = 1,\ T^B = 0$. Тобто вся територія буде захоплена опонентом А. Отже, стратегія $\alpha_i = q_i,\ i = 1, \ldots, n$, є оптимальною.

Теорему доведено.

Варто навести цікавий факт, який випливає з останніх теорем. При порівнянні стратегій $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ та $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ опонентів A та B може виявитися, що у більшості регіонів перевагу має B (можливо навіть, що $\alpha_i < \beta_i$ в усіх регіонах Ω_i, за винятком лише одного Ωi_0). Проте якщо для перехресних ентропій виконується нерівність $H(\alpha, q) < H(\beta, q)$ (у можливості такої ситуації неважко пересвідчитись), то для всіх k починаючи з деякого k_0 буде справджуватися нерівність $T_k^A > T_k^B$, що гарантує для опонента A остаточну перемогу: $T^A = 1$. При цьому стратегія α така, що $\alpha_i = q_i,\ i = 1, \ldots, n$, є оптимальною для A. Це означає, що $T_k^A \to 1$ при будь-якій іншій стратегії $\beta \neq \alpha$ для B.

Насамкінець зауважимо, що рівність $T^A = 1$ можна довести іншим способом на основі Q_n-зображення дійсних чисел, що випливає з робіт [1, 12, 13].

Література

1. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід в дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
2. *Koshmanenko V.* The infinite direct products of probability measures and structural similarity // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2011. – **17**, № 1. – P. 20 – 28.
3. *Кошманенко В. Д.* Теорема про конфликт для пары стохастических векторов // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 4. – С. 555 – 560.
4. *Koshmanenko V.* Theorem of conflicts for a pair of probability measures // Math. Meth. Oper. Res. – 2004. – **59**, № 2. – P. 303 – 313.
5. *Кошманенко В. Д.* Спектральна теорія динамічних систем конфлікту. – Київ: Наук. думка, 2016. – 287 с.
6. *Koshmanenko V.* Existence theorems of the ω-limit states for conflict dynamical systems // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2014. – **20**, № 4. – P. 379 – 390.
7. *Кошманенко В. Д., Петренко С. М.* Розклад Гана – Жордана як рівноважний стан системи конфлікту // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 1. – С. 64 – 77.
8. *Koshmanenko V., Verygina I.* Dynamical systems of conflict in terms of structural measures // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2016. – **22**, № 1. – P. 81 – 93.
9. *Веригіна І. В.* Порівняння стратегій пари опонентів у задачі „захоплення” території // Доп. НАН України. – 2016. – **20**, № 5. – С. 379 – 390.
10. *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1972. – 287 с.
11. *Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В.* Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1965. – 512 с.
12. *Замрій І. В., Працьовитий М. В.* Сингулярність інверсора цифр Q_3-зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 1. – С. 55 – 70.
13. *Працьовитий М. В., Фещенко О. Ю.* Математичні моделі двосторонніх динамічних конфліктів // Наук. зап. НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. – 2003. – **4**. — С. 260 – 269.

Одержано 01.03.16