УДК 517.5

С. Б. Гембарська, К. М. Жигалло (Східноєвроп. нац. ун-т ім. Л. Українки)

АПРОКСИМАТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ БІГАРМОНІЧНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА НА КЛАСАХ ГЕЛЬДЕРА

We establish asymptotic expansions for the values of approximation of functions from the Hölder class by biharmonic Poisson integrals in the uniform and integral metrics.

Получены асимптотические разложения величин приближения функций класса Гельдера бигармоническими интегралами Пуассона в равномерной и интегральной метриках.

Постановка задачі та деякі допоміжні твердження. Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається рівністю $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$.

Множину функцій $f \in L$, які задовольняють умову $\|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_1 \leq |t|$, будемо позначати через H_1^1, а множину функцій $f \in C$, для яких виконується умова $\|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_C \leq |t|$, — через H^1. Класи H^1 та H_1^1 називають класами Гельдера.

Для 2π-періодичної сумовної функції f через $B(f, x, \rho)$, $0 \leq \rho < 1$, будемо позначати (див., наприклад, [1, 2]) бігармонічний інтеграл Пуассона:

$$B(f, x, \rho) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t + x) K_\rho(t) dt,$$

де

$$K_\rho(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}\left(1 - \rho^2\right)\right) \rho^k \cos kt$$

— бігармонічне ядро Пуассона. Покладемо $\rho = e^{-1/\delta}$, $\delta > 0$, і далі бігармонічний інтеграл Пуассона будемо записувати у вигляді

$$B_\delta(f, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t + x) K_\delta(t) dt,$$

де

$$K_\delta(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\right) e^{-k/\delta} \cos kt.$$

У статті досліджується асимптотична поведінка при $\delta \to \infty$ величин

$$\mathcal{E}\left(H^1; B_\delta\right)_C := \sup_{f \in H^1} \|B_\delta(f, \cdot) - f(\cdot)\|_C, \qquad (1)$$

$$\mathcal{E}\left(H_1^1; B_\delta\right)_1 := \sup_{f \in H_1^1} \|B_\delta(f, \cdot) - f(\cdot)\|_1. \qquad (2)$$

Задачу про відшукання асимптотичних рівностей для величини (1) і (2), згідно з О. І. Степанцем [3, с. 198], називатимемо задачею Колмогорова – Нікольського для бігармонічного інтеграла Пуассона $B_\delta(f;x)$ на класах H^1 і H_1^1 у рівномірній та інтегральній метриках відповідно.

Вивченню апроксимативних властивостей бігармонічних інтегралів Пуассона на класах диференційовних функцій присвячено роботи [4 – 18].

Теорема. *При $\delta \to \infty$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}\left(H^1; B_\delta\right)_C = \mathcal{E}\left(H_1^1; B_\delta\right)_1 = \frac{1-e^{-2/\delta}}{\pi}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\zeta(2k)(2-2^{2-2k})}{(2k+1)\pi^{2k}}\frac{1}{\delta^{2k}}\right\}+$$

$$+\left(\frac{2}{\pi\delta}-\frac{1-e^{-2/\delta}}{\pi}\right)\left\{1+\ln 2+\ln\delta+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)(2-2^{2-2k})}{2k(2k+1)\pi^{2k}}\frac{1}{\delta^{2k}}\right\}, \tag{3}$$

де для $\{z\colon \operatorname{Re} z > 1\}$ $\zeta(z) := \sum_{s=1}^{\infty}\dfrac{1}{s^z}$ *— дзета-функція Рімана.*

Доведення. В роботі [9] показано, що має місце рівність

$$\mathcal{E}\left(H^1; B_\delta\right)_C = \mathcal{E}\left(H_1^1; B_\delta\right)_1 .$$

Тому достатньо довести справедливість рівності (3) лише для випадку рівномірної метрики.

Оскільки $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_\delta(t)dt = 1$, то

$$B_\delta(f,x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t+x)-f(x)\right)K_\delta(t)dt.$$

Звідси з урахуванням того, що $f \in H^1$, а $K_\delta(t) > 0,\ t \in [-\pi,\pi]$, отримуємо

$$\mathcal{E}\left(H^1; B_\delta\right)_C \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|K_\delta(t)\,dt. \tag{4}$$

З іншого боку, функція f_1^*, яка є 2π-періодичним продовженням функції $f_1(t) = |t|$, $t \in$ $\in [-\pi,\pi)$, належить до множини H^1 і

$$\mathcal{E}\left(H^1; B_\delta\right)_C \ge \|B_\delta(f_1^*,\cdot) - f_1^*(\cdot)\|_C \ge |B_\delta(f_1^*,0) - f_1^*(0)| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|K_\delta(t)\,dt. \tag{5}$$

Об'єднуючи (4) і (5), маємо

$$\mathcal{E}\left(H^1; B_\delta\right)_C = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|K_\delta(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}tK_\delta(t)\,dt. \tag{6}$$

Покладемо $\varphi_\delta(z) = \left(1+\dfrac{z}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right)e^{-z/\delta}\cos zt$ для $z \in [0,\infty)$ і нехай

$$\Phi_\delta(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\varphi_\delta(z)\cos zu dz$$

— косинус-перетворення Фур'є функції $\varphi_\delta(z)$. Запишемо $\Phi_\delta(u)$ у вигляді

$$\Phi_\delta(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-z/\delta}\cos zt\cos zu dz + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-2/\delta}}{2} ze^{-z/\delta}\cos zt\cos zu\,dz =$$

$$= \Phi_{\delta_1}(u) + \Phi_{\delta_2}(u). \tag{7}$$

Як і в [19], можна показати, що

$$\Phi_{\delta_1}(u) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{\frac{1}{\delta^2}+(t-u)^2} + \frac{1}{\frac{1}{\delta^2}+(t+u)^2}\right]. \tag{8}$$

Розглянемо тепер косинус-перетворення Фур'є

$$\Phi_{\delta_2}(u) = \frac{1-e^{-2/\delta}}{2\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_0^\infty ze^{-z/\delta}\cos z(u+t)dz + \int\limits_0^\infty ze^{-z/\delta}\cos z(u-t)dz\right). \tag{9}$$

Знайдемо інтеграли з правої частини рівності (9). Використовуючи формулу 3.944.6 з [20], маємо

$$\int\limits_0^\infty ze^{-z/\delta}\cos z(u\pm t)dz = \frac{1}{\frac{1}{\delta^2}+(u\pm t)^2}\cos\left(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{u\pm t}{\frac{1}{\delta}}\right) = \frac{\frac{1}{\delta^2}-(u\pm t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(u\pm t)^2\right)^2}. \tag{10}$$

Враховуючи (7)–(10), можемо записати

$$\Phi_\delta(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2}+(t-u)^2} + \frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2}+(t+u)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\left(\frac{\frac{1}{\delta^2}-(t+u)^2}{(\frac{1}{\delta^2}+(t+u)^2)^2} + \frac{\frac{1}{\delta^2}-(t-u)^2}{(\frac{1}{\delta^2}+(t-u)^2)^2}\right)\right].$$

Застосовуючи формулу підсумовування Пуассона (див., наприклад, [21, с. 82]), отримуємо

$$K_\delta(t) = \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{2}\Phi_\delta(0) + \sum_{k=1}^\infty \Phi_\delta(2\pi k)\right). \tag{11}$$

Враховуючи співвідношення (11), бігармонічний інтеграл Пуассона можемо записати у вигляді

$$B_\delta(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2}+t^2} + \frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2} + \right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2}+(t-2\pi k)^2}+\frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2}+(t+2\pi k)^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\left(\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-(t+2\pi k)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(t+2\pi k)^2\right)^2}+\frac{\frac{1}{\delta^2}-(t-2\pi k)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(t-2\pi k)^2\right)^2}\right)\right]\right]\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[f(t+x)]_{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}+\frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}\right)dt, \tag{12}$$

де $[f(\cdot)]_{2\pi}$ — парне 2π-періодичне продовження функції $f(\cdot)$ із $[-\pi,\pi]$ на всю числову вісь.

Аналогічним чином, використовуючи (11), рівність (6) можемо записати у вигляді

$$\mathcal{E}\left(H^1;B_\delta\right)_C=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}[t]_{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}+\frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}\right)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi\delta}\int\limits_0^{\pi}\frac{t}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt+\frac{1-e^{-2/\delta}}{\pi}\int\limits_0^{\pi}t\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}dt+$$

$$+\frac{2}{\pi\delta}\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{[t]_{2\pi}}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt+\frac{1-e^{-2/\delta}}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\infty}[t]_{2\pi}\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}dt=I_1+I_2+I_3+I_4. \tag{13}$$

Для інтеграла I_1 одержуємо

$$I_1=\frac{2}{\pi\delta}\int\limits_0^{\pi}\frac{t}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}\,dt=\frac{1}{\pi\delta}\int\limits_0^{\pi}\frac{d\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}=\frac{1}{\pi\delta}\left(\ln\left(\frac{1}{\delta^2}+\pi^2\right)-\ln\frac{1}{\delta^2}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi\delta}\left(\ln\delta+\ln\pi\right)+\frac{1}{\pi\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\pi^{2k}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2k}.$$

Розглянемо інтеграл I_2:

$$I_2=\frac{1-e^{-2/\delta}}{\pi}\int\limits_0^{\pi}t\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}\,dt=$$

$$= \frac{1-e^{-2/\delta}}{\pi}\left(\frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^{\pi}\frac{t}{\left(\dfrac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}\,dt-\int\limits_0^{\pi}\frac{t^3}{\left(\dfrac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}\,dt\right). \tag{14}$$

Знайдемо інтеграли з правої частини рівності (14):

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{t}{\left(\dfrac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{d\left(\dfrac{1}{\delta^2}+t^2\right)}{\left(\dfrac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}\,dt=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\dfrac{1}{\delta^2}+\pi^2}-\delta^2\right), \tag{15}$$

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{t^3}{\left(\dfrac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{1/\delta^2}^{1/\delta^2+\pi^2}\frac{x-\dfrac{1}{\delta^2}}{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{1/\delta^2}^{1/\delta^2+\pi^2}\frac{dx}{x}-\frac{1}{\delta^2}\int\limits_{1/\delta^2}^{1/\delta^2+\pi^2}\frac{dx}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{\delta^2}+\pi^2\right)-\ln\frac{1}{\delta^2}+\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{1}{\dfrac{1}{\delta^2}+\pi^2}-\delta^2\right)\right)=$$

$$=\ln\delta+\ln\pi+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\pi^{2k}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2k}+\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{1}{\dfrac{1}{\delta^2}+\pi^2}-\delta^2\right)\right). \tag{16}$$

Тоді, використовуючи (14) – (16), маємо

$$I_2=\frac{1-e^{-2/\delta}}{\pi}\left(-\frac{1}{2\delta^2}\left(\frac{1}{\dfrac{1}{\delta^2}+\pi^2}-\delta^2\right)-\ln\delta-\ln\pi-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\pi^{2k}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2k}+\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{1}{\dfrac{1}{\delta^2}+\pi^2}-\delta^2\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1-e^{-2/\delta}}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\pi^{2(k-1)}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2(k-1)}-\ln\delta-\ln\pi-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\pi^{2k}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2k}\right).$$

Для інтегралів I_3 та I_4 отримуємо

$$I_3=\frac{2}{\pi\delta}\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{[t]_{2\pi}}{\dfrac{1}{\delta^2}+t^2}\,dt=\frac{2}{\pi\delta}\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{[t]_{2\pi}}{t^2}\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{\delta t}\right)^2}\,dt=\frac{2}{\pi\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\delta^{2(k-1)}}\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{[t]_{2\pi}}{t^{2k}}\,dt,$$

$$I_4=\frac{1-e^{-2/\delta}}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\infty}[t]_{2\pi}\frac{\dfrac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(\dfrac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}\,dt=$$

$$= \frac{1 - e^{-2/\delta}}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\, 2k}{\delta^{2k}} \int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{[t]_{2\pi}}{t^{2k+2}}\, dt - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\delta^{2(k-1)}} \int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{[t]_{2\pi}}{t^{2k}}\, dt \right).$$

Підставляючи вирази для інтегралів $I_i,\ i = \overline{1,4}$, у співвідношення (13), дістаємо

$$\mathcal{E}\big(H^1; B_\delta\big)_C = \frac{1 - e^{-2/\delta}}{\pi} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(2k \int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{[t]_{2\pi}}{t^{2k+2}}\, dt - \frac{1}{\pi^{2k}} \right) \frac{1}{\delta^{2k}} \right\} +$$

$$+ \left(\frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} - \frac{1 - e^{-2/\delta}}{\pi} \right) \left\{ \ln \pi\delta + \int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{[t]_{2\pi}}{t^2}\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{2k\pi^{2k}} - \int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{[t]_{2\pi}}{t^{2k+2}}\, dt \right) \frac{1}{\delta^{2k}} \right\}. \quad (17)$$

Виконаємо деякі перетворення інтегралів $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{[t]_{2\pi}}{t^{2(k+1)}}\, dt$, що фігурують у (17):

$$\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{[t]_{2\pi}}{t^{2(k+1)}}\, dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{(2i-1)\pi}^{2i\pi} \frac{2i\pi - t}{t^{2(k+1)}}\, dt + \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{2i\pi}^{(2i+1)\pi} \frac{t - 2i\pi}{t^{2(k+1)}}\, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{2i\pi}{2k+1} \frac{1}{t^{2k+1}} + \frac{1}{2k} \frac{1}{t^{2k}} \right) \Bigg|_{(2i-1)\pi}^{2i\pi} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2k} \frac{1}{t^{2k}} + \frac{2i\pi}{2k+1} \frac{1}{t^{2k+1}} \right) \Bigg|_{2i\pi}^{(2i+1)\pi} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i}{(2k+1)\pi^{2k}} \left[\frac{1}{(2i-1)^{2k+1}} - \frac{2}{(2i)^{2k+1}} + \frac{1}{(2i+1)^{2k+1}} \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2k\pi^{2k}} \left[\frac{2}{(2i)^{2k}} - \frac{1}{(2i-1)^{2k}} - \frac{1}{(2i+1)^{2k}} \right]. \quad (18)$$

Для подальших перетворень скористаємося дзета-функцією Рімана (див., наприклад, [20, с. 1087])

$$\zeta(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^z}, \qquad \operatorname{Re} z > 1. \quad (19)$$

Використовуючи формулу 9.535.1 з [20], можемо записати

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^{2k}} = \zeta(2k) - 2^{-2k}\zeta(2k). \quad (20)$$

Тоді

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i}{2k+1} \left[\frac{1}{(2i-1)^{2k+1}} + \frac{1}{(2i+1)^{2k+1}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2k+1} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2i-1)^{2k}} + \frac{1}{(2i+1)^{2k}} + \frac{1}{(2i-1)^{2k+1}} - \frac{1}{(2i+1)^{2k+1}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2k+1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2i-1)^{2k}} + \frac{1}{(2i+1)^{2k}} \right] + 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2k+1}\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^{2k}}\right) = \frac{2}{2k+1}\left(\zeta(2k) - 2^{-2k}\zeta(2k)\right), \tag{21}$$

$$\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^{2k}} = \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2i-1)^{2k}} - 1\right) = \frac{1}{2k}\left(\zeta(2k) - 2^{-2k}\zeta(2k) - 1\right). \tag{22}$$

Використовуючи (19), (20) і підставляючи (21), (22) у (18), знаходимо

$$\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{[t]_{2\pi}}{t^{2(k+1)}}\,dt = \frac{2}{(2k+1)\pi^{2k}}\left(\zeta(2k) - 2^{-2k}\zeta(2k) - 2^{-2k}\zeta(2k)\right) +$$

$$+\frac{1}{2k\pi^{2k}}\left(2\cdot 2^{-2k}\zeta(2k) - \zeta(2k) + 2^{-2k}\zeta(2k) - \zeta(2k) + 2^{-2k}\zeta(2k) + 1\right) =$$

$$= \frac{2}{(2k+1)\pi^{2k}}\,\zeta(2k)\left[1 - 2^{-2k+1}\right] + \frac{2}{2k\pi^{2k}}\,\zeta(2k)\left[2^{-2k+1} - 1\right] + \frac{1}{2k\pi^{2k}} =$$

$$= \frac{2}{\pi^{2k}}\,\zeta(2k)\left[1 - 2^{-2k+1}\right]\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2k\pi^{2k}} = \frac{1}{2k\pi^{2k}} - \frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}}\,\frac{1 - 2^{-2k+1}}{2k(2k+1)}. \tag{23}$$

У випадку $k = 0$ маємо

$$\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{[t]_{2\pi}}{t^2}\,dt = \sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{(2i-1)\pi}^{2i\pi}\frac{2i\pi - t}{t^2}\,dt + \sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{2i\pi}^{(2i+1)\pi}\frac{t - 2i\pi}{t^2}\,dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{2i\pi}{t} - \ln t\right)\Bigg|_{(2i-1)\pi}^{2i\pi} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\ln t + \frac{2i\pi}{t}\right)\Bigg|_{2i\pi}^{(2i+1)\pi} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\Bigg(-\frac{2i\pi}{2i\pi} + \frac{2i\pi}{(2i-1)\pi} - \ln(2i\pi) + \ln[(2i-1)\pi)] + \ln[(2i+1)\pi)] -$$

$$- \ln(2i\pi) + \frac{2i\pi}{(2i+1)\pi} - \frac{2i\pi}{2i\pi}\Bigg) =$$

$$= -2 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2i}{2i-1} + \frac{2i}{2i+1}\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\ln\,\frac{(2i-1)(2i-1)}{2i\cdot 2i} =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{1}{(2i)^2}\right) = 1 + \ln\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2i)^2}\right).$$

Враховуючи формулу 0.262.2 з [20]

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2k)^2}\right) = \frac{2}{\pi},$$

отримуємо

$$\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{[t]_{2\pi}}{t^2}\,dt = 1 + \ln\,\frac{2}{\pi}. \tag{24}$$

Підставляючи (23) і (24) у (17), одержуємо (3).

Теорему доведено.

Література

1. *Петров В. А.* Бигармонический интеграл Пуассона // Лит. мат. сб. – 1967. – **7**, № 1. – С. 137 – 142.
2. *Гембарська С. Б.* Дотичні граничні значення бігармонійного інтеграла Пуассона в крузі // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1171 – 1176.
3. *Степанец А. И.* Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
4. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 5. – С. 995 – 998.
5. *Pych P.* On a biharmonic function in unit disk // Ann. pol. math. – 1968. – **20**, № 3. – P. 203 – 213.
6. *Фалалеев Л. П.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $\mathrm{Lip}_1 1$ от одного сингулярного интеграла // Теоремы вложения и их приложения: Матер. всесоюз. симп. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1976. – С. 163 – 167.
7. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Про наближення функцій класу Гельдера бігармонійними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 7. – С. 971 – 974.
8. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення диференційовних періодичних функцій їх бігармонійними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 9. – С. 1213 – 1219.
9. *Кальчук І. В., Харкевич Ю. І.* Асимптотика величин наближення в середньому класів диференційовних функцій за допомогою бігармонійних інтегралів Пуассона // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 8. – С. 1105 – 1115.
10. *Харкевич Ю. І., Жигалло Т. В.* Наближення функцій з класу $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ бігармонійними операторами Пуассона в рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 5. – С. 669 – 693.
11. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення спряжених диференційовних функцій бігармонічними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 3. – С. 333 – 345.
12. *Канієв С.* Точна оцінка відхилення в середньому бігармонічних в крузі функцій від їх граничних значень // Доп. АН УРСР. – 1964. – № 4. – С. 451 – 454.
13. *Трофимов В. Н., Цыганков А. С.* Точные неравенства для колебаний гармонических и бигармонических в круге функций // Сиб. мат. журн. – 1969. — **10**, № 2. — С. 398 – 416.
14. *Gonzales L., Keller E., Wildenhain G.* Über das Randverhalten des Poisson-Integrals der polyharmonischen Gleichung // Math. Nachr. – 1980. – **95**. – S. 157 – 164.
15. *Заставный В. П.* Точная оценка приближения некоторых классов дифференцируемых функций сверточными операторами // Укр. мат. вісн. – 2010. – **7**, № 3. – С. 409 – 433.
16. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення функцій з класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ бігармонічними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 7. – С. 939 – 959.
17. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення (ψ,β)-диференційовних функцій малої гладкості бігармонічними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 12. – С. 1602 – 1622.
18. *Кальчук І. В., Харкевич Ю. І.* Апроксимативні властивості бігармонічних інтегралів Пуассона на класах $W^r_\beta H^\alpha$ // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 11. – С. 1493 – 1504.
19. *Баскаков В. А.* О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля – Пуассона // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 2. – С. 169 – 180.
20. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматиз, 1963. – 1100 с.
21. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 460 с.

Одержано 23.12.16