УДК 519.642

Г. Л. Милейко, С. Г. Солодкий (Ін-т математики НАН України, Київ)

ГІПЕРБОЛІЧНИЙ ХРЕСТ І СКЛАДНІСТЬ РІЗНИХ КЛАСІВ ЛІНІЙНИХ НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ

The present paper is a survey of the latest results obtained in the fields of information and algorithmic complexity of severely ill-posed problems.

Приведен обзор последних результатов в области информационной и алгоритмической сложности некорректных задач.

1. Вступ. На сьогодні однією з найбільш актуальних проблем, що виникають при побудові чисельних методів розв'язування різного роду задач, є підвищення їх ефективності шляхом забезпечення мінімально можливих інформаційних та обчислювальних витрат зі збереженням точності наближення. Подібного роду питання інтенсивно вивчаються в межах загальної теорії оптимальних алгоритмів, основи якої були закладені у монографіях [16, 33]. У рамках цієї теорії під інформаційною складністю розуміється найменший обсяг дискретної інформації, що необхідна для знаходження наближеного розв'язку із заданою точністю, а під алгоритмічною складністю – мінімальне число арифметичних дій, які потрібно виконати для побудови такого розв'язку.

Варто зазначити, що для некоректних задач проблема їх складності до недавнього часу залишалася відкритою. Більш того, в [34, 35] обговорювалася принципова можливість коректної постановки подібних задач. Тому результати робіт [13, 23], що містять перші точні порядкові оцінки інформаційної та алгоритмічної складності деяких класів помірно некоректних задач, можна вважати відправною точкою у вивченні зазначеної проблематики.

Основним об'єктом досліджень у теорії лінійних некоректних задач є операторне рівняння

$$Ax = f, \tag{1}$$

де A — лінійний неперервний оператор, що діє між просторами X та Y. Далі вважатимемо, що $X = Y$ — гільбертів простір. Для скорочення позначимо скалярний добуток в X через $(\cdot, \cdot)$ і відповідну йому норму через $\|\cdot\|$. До того ж таким самим символом $\|\cdot\|$ позначатимемо стандартну операторну норму.

Метою наших досліджень є наближене знаходження розв'язку $x \in X$ рівняння (1), що відповідає правій частині $f \in X$. Враховуючи можливість невиконання умови єдиності (в умовах коректності за Адамаром), далі будемо будувати наближення до точного розв'язку (1), який має мінімальну норму у просторі X. Такий розв'язок (див., наприклад, [17]) називають нормальним розв'язком (1) і позначають символом $x^\dagger$. Для отримання оцінок точності необхідна додаткова інформація про властивості гладкості шуканого розв'язку. Тому зазвичай припускається, що розв'язок $x^\dagger$ задовольняє деяку умову джерела. Загальна умова джерела має вигляд

$$x^\dagger \in M_\rho(A) := \big\{u \colon u = \varphi(A^*A)v, \|v\| \le \rho\big\}, \tag{2}$$

де A^* — оператор, спряжений до A, а індексна функція φ є монотонно зростаючою і такою, що $\varphi(0) = 0$. При цьому φ може припускатися як відомою (апріорний випадок), так і невідомою (апостеріорний випадок). Найбільш досліджуваною на сьогодні є умова джерела гельдерівського типу. Тут φ — степенева функція $\varphi(\lambda) = \lambda^p$, де $p > 0$ — параметр, що характеризує гладкість розв'язку. У цьому випадку

$$x^\dagger \in M_{p,\rho}(A) := \{u \colon u = (A^*A)^{p/2}v, \|v\| \leq \rho\}. \tag{3}$$

Задачі (1), розв'язки яких задовольняють умову (3), називаються помірно некоректними і є традиційним об'єктом дослідження в теорії некоректних задач (див., наприклад, [5]).

Інший, не менш поширений, тип гладкості розв'язків характеризується умовою джерела логарифмічного типу. У цьому випадку маємо

$$x^\dagger \in M^K_{p,\rho}(A) := \{u \colon u = (\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K \text{ разів}}(A^*A)^{-1})^{-p}v, \|v\| \leq \rho\}. \tag{4}$$

Задачі (1) з розв'язками (4) називаються жорстко некоректними (див., наприклад, [18, 25]).

Зауважимо, що умова джерела гельдерівського вигляду (3) зберігає тип гладкості розв'язку порівняно з множиною $\mathrm{Range}(A)$: наприклад, якщо оператор діє у простір функцій скінченної гладкості, то й розв'язок $x^\dagger$ матиме скінченну гладкість. Така ж ситуація має місце і для помірно некоректних задач у разі просторів нескінченно диференційовних функцій. На відміну від описаної ситуації для жорстко некоректних задач спостерігається суттєве погіршення гладкості розв'язку $x^\dagger$ вигляду (4) щодо гладкості оператора A. Тут характерними є такі випадки: операторам нескінченної гладкості відповідають розв'язки із класів функцій соболєвського типу, а операторам скінченної гладкості — розв'язки, швидкість спадання коефіцієнтів Фур'є яких буде більш повільною, ніж у функцій соболєвського типу гладкості. Відомо (див., наприклад, [19]), що на класі задач (1) з розв'язками вигляду (2) оптимальний порядок точності розв'язування є $O\big(\varphi(\theta^{-1})(\delta/\rho)\big)$, де $\theta(t) = \sqrt{t}\varphi(t),\ t > 0$. Це означає, зокрема, що для помірно некоректних задач із розв'язками (3) оптимальний порядок точності складає $O\big(\delta^{p/(p+1)}\big)$ (див. [3, с. 14]), а у випадку жорстко некоректних задач із розв'язками (4) — $O\left(\left(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K \text{ разів}}\frac{1}{\delta}\right)^{-p}\right)$ (див. [32]). Таким чином, хоча для помірно некоректних задач і спостерігається втрата точності відновлення розв'язків (порівняно з рівнем збурення), проте обидві ці величини належать до однієї шкали $\big(O(\delta^{p/(p+1)})$ і δ відповідно $\big)$. З іншого боку, для жорстко некоректних задач ситуація принципово інша — рівень точності наближення розв'язків визначається логарифмом від рівня збурення вхідних даних.

***Приклад* 1.** *Обернена задача теплопровідності*. Розглянемо рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad x \in [0,\pi], \quad t \geq 0, \tag{5}$$

з однорідними граничними умовами Діріхле $u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0$, та припустимо, що задано кінцеву температуру $f(x) := u(x,1),\ x \in [0,\pi]$, де $f(0) = f(\pi) = 0$. Необхідно визначити початкову температуру $v(x) := u(x,0),\ x \in [0,\pi]$.

Відомо (див., наприклад, [17]), що обернена задача еквівалентна розв'язуванню інтегрального рівняння першого роду

$$Kv(x) := \int_0^{\pi} k(x,\tau)\, v(\tau) d\tau = f(x), \tag{6}$$

де

$$k(x,\tau) := \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \sin(n\tau) \sin(nx).$$

Зазначимо, що сингулярна система для інтегрального оператора в (6) задається у вигляді

$$\left(e^{-n^2}; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \right). \tag{7}$$

Відомо (див. [17]), що розв'язок рівняння (6) визначається формулою

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2} f_n \sin(nx), \tag{8}$$

де f_n — коефіцієнти Фур'є правої частини (6) за тригонометричним базисом. Нехай тепер f_n такі, що $|f_n| \asymp e^{-2n^2}$, тоді $v_0(x)$:

$$|v_n| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{n^2} |f_n| \asymp \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-n^2},$$

де v_n, $n = 1, 2, \ldots$, визначають коефіцієнти Фур'є функції $v(x)$. Тоді гладкість розв'язку вимірюється у такій самій шкалі (див. співвідношення вище), що й гладкість оператора (див. сингулярну систему (7)), а це означає, що задача (6) є помірно некоректною при $p = 1$.

Зазначимо, що якщо f_n такі, що $|f_n| \asymp e^{-n^2} \dfrac{1}{n}$, то для коефіцієнтів Фур'є розв'язку справджується оцінка

$$|v_n| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{n^2} |f_n| \asymp \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n}.$$

Порівнюючи (7) із наведеним вище співвідношенням, робимо висновок, що у такому випадку задача (6) є жорстко некоректною з розв'язками вигляду (4) при $K = 1$ й $p = \dfrac{1}{2}$.

Нехай далі X — сепарабельний гільбертів простір, а $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ — деякий ортонормований базис в X. Розглянемо такі класи лінійних неперервних операторів:

$$\mathcal{H}^{r,s}_{\gamma,E}(D) = \mathcal{H}^{r,s}_{\gamma}(D) := \left\{ A : A \in \mathcal{L}(X,X),\ \|A\| \le \gamma_0,\quad \sum_{n+m=1}^{\infty} (Ae_m, e_n)^2 \underline{n}^{2r} \underline{m}^{2s} \le \gamma_1^2 \right\},$$

$$\mathcal{H}^{r,s}_{\gamma,E}(S) = \mathcal{H}^{r,s}_{\gamma}(S) := \left\{ A : A \in \mathcal{L}(X,X),\ \|A\| \le \gamma_0,\quad \sum_{n+m=1}^{\infty} (Ae_m, e_n)^2 (\underline{n}^{2r} + \underline{m}^{2s}) \le \gamma_1^2 \right\},$$

де $r, s > 0$, $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $\underline{n} = 1$ при $n = 0$ і $\underline{n} = n$ у протилежному випадку.

Відомо (див., наприклад, [9]), що змістовним прикладом операторів із класу $\mathcal{H}^{r,s}_{\gamma}(S)$ є інтегральні оператори Фредгольма

$$Af(t) = \int_0^1 a(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad t \in [0,1], \tag{9}$$

з ядрами $a(t,\tau)$, що належать до соболєвського класу функцій $W_2^{r,s}$. Якщо $a(t,\tau)\in W_2^{r,s}$ має, крім того, обмежену похідну $\dfrac{\partial^{r+s}a(t,\tau)}{\partial t^r\partial\tau^s}$, то такий оператор (9) належить до класу $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D)$.

Класи рівнянь (1) з операторами $A\in\mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ і розв'язками $x^\dagger\in M_p$ позначатимемо $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p)$, де під $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ далі розумітимемо клас $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(S)$ або $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D)$, а під M_p — $M_{p,\rho}(A)$ (3) або $M^1_{p,\rho}(A)$ (4), де $K=1$. Звісно, що для жорстко некоректних задач цілком природною буде умова $\gamma_0\le e^{-1/2}$.

Наведемо тепер строгу постановку задачі, що досліджується. Оскільки $\mathrm{Range}(A)$ не припускається замкненим $\big($тобто вважається, що $\overline{\mathrm{Range}(A)}\neq\mathrm{Range}(A)\big)$, то задача (1) не є коректною у сенсі Адамара, а отже, для побудови стійкого наближеного розв'язку (1) необхідна регуляризація.

Далі зосередимося на дослідженні проекційних методів розв'язування помірно та жорстко некоректних задач із визначених вище класів $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p)$ при $r\ge s$.

Візьмемо довільну обмежену область $\Omega\subset[1;\infty)\times[1;\infty)$ координатної площини. Через $\omega_1,\ \omega_2$ позначимо проекції цієї області на осі Oi та Oj: $\omega_1:=\big\{i:(i;j)\in\Omega\big\}$, $\omega_2:=\big\{j:(i;j)\in\Omega\big\}$. За допомогою Ω виконаємо перехід до дискретизованого рівняння $A_\Omega x=P_{\omega_1}f_\delta$, де

$$A_\Omega x=\sum_{(i,j)\in\Omega}(Ae_j,e_i)(x,e_j)e_i,\qquad P_{\omega_1}f_\delta=\sum_{k\in\omega_1}(f_\delta,e_k)e_k. \tag{10}$$

Набір скалярних добутків вигляду

$$(Ae_j,e_i),\qquad (f_\delta,e_k),\quad (i;j)\in\Omega,\quad k\in\omega_1, \tag{11}$$

що використовуються при побудові (10), називають гальоркінською інформацією про (1), а під $\mathrm{card}(\Omega)$ розуміється загальна кількість скалярних добутків вигляду (Ae_j,e_i) з (11). Зокрема, якщо $\Omega=[1;n]\times[1;m]$, $\omega_1=[1,n]$, то ми одержуємо стандартну гальоркінську схему дискретизації з $\mathrm{card}(\Omega)=n\cdot m$. Дослідження різних класів некоректних задач за допомогою саме такої схеми були проведені у низці робіт, серед яких виділимо [19, 20].

Наведемо класичне означення регуляризатора (див. [15]).

Означення 1. *Сім'я обмежених операторів $R_\alpha: X\to X$ називається методом регуляризації* (*регуляризатором*) *задачі* (1), *якщо для кожного $f\in\mathrm{Range}(A)$ виконується*

$$\sup_{f_\delta:\,\|f-f_\delta\|\le\delta}\ \inf_{x\in A^{-1}f}\|R_\alpha f_\delta-x\|\to 0$$

при $\alpha\to0$, де $\alpha=\alpha(\delta)\to0$ при $\delta\to0$. Тут $A^{-1}f$ — повний прообраз елемента f.

Таким чином, згідно з означенням 1 регуляризатори забезпечують збіжність наближень до точного розв'язку при $\delta\to0$. На сучасному етапі розвитку чисельного аналізу при побудові стійких методів увага насамперед приділяється таким регуляризаторам, що додатково забезпечують оптимальний порядок точності. Саме такі методи регуляризації прийнято називати регуляризаторами за Бакушинським. Отже, наслідуючи А. Б. Бакушинського [2], будемо розглядати оператори регуляризації, які можна подати у вигляді

$$R_\alpha:=g_\alpha(A^*A)A^*$$

за допомогою твірної функції g_α, що задовольняє умови

$$\sup_{0<\lambda\leq 1} \lambda^{\mu}\big|1-\lambda g_{\alpha}(\lambda)\big| \leq \varkappa_{\mu}\alpha^{\mu},$$
$$\sup_{0<\lambda\leq 1} \lambda^{1/2}\big|g_{\alpha}(\lambda)\big| \leq \varkappa_{*}\alpha^{-1/2} \tag{12}$$

при деяких додатних сталих $\varkappa_{\mu}, \varkappa_{*}$ та параметрі $0 \leq \mu \leq \mu_{*}$. При цьому μ_{*} називають кваліфікацією методу R_{α}. Ця величина визначає максимальну „гладкість” розв'язку, при якій метод R_{α} досягає оптимального порядку точності. Зауважимо (див., наприклад, [3]), що більшість відомих регуляризаторів (у тому числі стандартний метод Тихонова та його узагальнений й ітерований варіанти) відповідають умовам (12).

Означення 2. *Під проекційним методом розв'язування рівняння* (1) *будемо розуміти будь-яке відображення $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Omega)\colon X \to X$, яке за допомогою гальоркінської інформації* (11) *про рівняння* (1) *зіставляє правій частині розв'язуваного рівняння елемент $\mathcal{P}(A_{\Omega})f_{\delta} \in X$, що є многочленом за базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ з номерами гармонік із ω_2. Цей елемент приймається за наближений розв'язок рівняння* (1).

Зазначимо, що від методу $\mathcal{P}$ не вимагається ані лінійності, ані неперервності. Таке загальне розуміння методу корисне, зокрема, при порівнянні апроксимаційних властивостей якомога більш широкого кола можливих способів розв'язування рівняння (1).

Під похибкою методу $\mathcal{P}(\Omega)$ на класі рівнянь $(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}, M_p)$, зазвичай, будемо розуміти його найбільше відхилення

$$\varepsilon_{\delta}\left(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}, M_p, \mathcal{P}(\Omega)\right) = \sup_{A\in\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}} \sup_{x^{\dagger}\in M_p} \sup_{f_{\delta}\colon \|f-f_{\delta}\|\leq\delta} \big\|x^{\dagger} - \mathcal{P}(A_{\Omega})f_{\delta}\big\|.$$

Мінімальний радіус гальоркінської інформації задамо величиною

$$R_{N,\delta}\left(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}, M_p\right) = \inf_{\Omega\colon\ \mathrm{card}(\Omega)\leq N} \inf_{\mathcal{P}(\Omega)} \varepsilon_{\delta}\left(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}, M_p, \mathcal{P}(\Omega)\right).$$

Ця величина визначає найменшу можливу точність серед усіх проекційних методів при обмеженні на обсяг гальоркінської інформації. Таким чином, $R_{N,\delta}$ характеризує інформаційну складність класу задач $(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}, M_p)$.

Позначимо через Π_M множину всіх можливих проекційних методів, які для побудови наближеного розв'язку потребують виконання не більш ніж M елементарних арифметичних операцій. Мінімальний радіус обсягу обчислювальних витрат задамо величиною

$$\overline{R}_{M,\delta}\left(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}, M_p\right) = \inf_{\Omega\colon\ \ \mathrm{card}(\Omega)\leq M} \ \inf_{\mathcal{P}(\Omega)\in\Pi_M} \ \varepsilon_{\delta}\left(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}, M_p, \mathcal{P}(\Omega)\right).$$

Ця величина визначає найменшу можливу точність проекційних методів при обмеженні на обсяг обчислювальних витрат. Таким чином, $\overline{R}_{M,\delta}$ характеризує алгоритмічну складність класу задач $(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}, M_p)$ у сенсі кількості задіяних елементарних арифметичних дій.

Зрозуміло, що запропоновані нижче підходи будуть регуляризуючими, завдяки чому стає можливим досягнення найменших значень $R_{N,\delta}$, $\overline{R}_{M,\delta}$. З іншого боку, інфімум у цих величинах береться по всіх можливих проекційних методах (не обов'язково стійких) для забезпечення максимальної широти підходів, що порівнюються.

Щодо історії дослідження складності некоректних задач зауважимо, що вперше економічні проекційні методи розв'язування помірно некоректних задач були побудовані в роботі [20], де в якості схеми дискретизації використовувалася стандартна схема Гальоркіна. Пізніше в роботі [23] були отримані перші порядкові оцінки мінімального радіуса гальоркінської інформації для помірно некоректних задач із розв'язками (3) при фіксованому $p = 2$ й операторами з класів $\mathcal{H}_\gamma^{r,r}$. Далі дослідження, ініційовані у [23], були продовжені в низці робіт, серед яких і роботи [14, 26]. При цьому, як виявилося, оптимальні порядки величин, що характеризують інформаційну та алгоритмічну складність рівнянь (1), реалізуються не в рамках стандартної схеми Гальоркіна, а деякої її модифікації, що ґрунтується на ідеї гіперболічного хреста (докладніше про це див. підпункт 2.1). Зауважимо, що складність некоректних задач довгий час вивчалася лише у випадку рівнянь (1) із розв'язками вигляду (3). Щодо інших типів некоректних задач (зокрема, жорстко некоректних), то перші кроки у цьому напрямку були зроблені у [19], де розглядалося питання економічної дискретизації в межах стандартної схеми Гальоркіна для задач (1) з розв'язками, що задовольняють загальну умову джерела (2). Проте оцінки складності в роботі [19] не було знайдено. Відправною точкою дослідження складності жорстко некоректних задач можна вважати статтю [29], результати якої знайшли свій подальший розвиток у роботах [27, 30]. Основні досягнення вказаного напрямку викладено у підпунктах 2.3, 2.4.

2. Економічна модифікація гальоркінської схеми. Оцінки складності. Оскільки на практиці при побудові чисельного розв'язку припустиме використання лише скінченного обсягу дискретної інформації про задачу, то замість вихідного рівняння доводиться розглядати його скінченновимірний аналог. Такий етап побудови наближеного розв'язку в чисельному аналізі прийнято називати дискретизацією. У зв'язку з цим виникає актуальна проблема мінімізації обсягу задіяної дискретної інформації та зменшення кількості виконуваних у процесі розв'язування арифметичних дій *без втрати точності*.

Для економічної дискретизації рівнянь з $\left(\mathcal{H}_\gamma^{r,s} M_\rho(A)\right)$ замість стандартної схеми Гальоркіна $P_n A P_m$ застосуємо її модифікацію, що називається гіперболічним хрестом. Слід зазначити, що вперше гіперболічний хрест був запроваджений К. І. Бабенко [1] при обчисленні колмогоровських поперечників для деяких класів періодичних функцій, що мають домінуючу мішану частинну похідну. Ідея застосування гіперболічного хреста при розв'язуванні операторних рівнянь другого роду належить С. В. Переверзєву й реалізована ним у низці робіт (див., наприклад, [8, 10, 11, 22]). Ефективність використання гіперболічного хреста при розв'язуванні некоректних задач продемонстрована у роботах [21, 23, 27, 31].

Отже, наближений розв'язок шукатимемо у вигляді

$$x_{\alpha,\delta}^n = g_\alpha(A_\Omega^* A_\Omega) A_\Omega^* P_\Omega f_\delta, \tag{13}$$

де g_α задовольняє умови (12), а Ω — гіперболічний хрест (конкретні приклади див. нижче).

***2.1. Помірно некоректні задачі* (*апріорний випадок*).** За область Ω у випадку помірно некоректних задач візьмемо такі хрести:

для рівнянь з класу $\left(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\right)$, $1 < p \leq 2$:

$$\Omega_1 = \{1\} \times \left[1; 2^{\frac{pr}{s}n}\right] \bigcup_{k=1}^{n} \left(2^{k-1}; 2^k\right] \times \left[1; 2^{\frac{pr}{s}(n-k/2)}\right] \subset [1; 2^n] \times \left[1; 2^{\frac{pr}{s}n}\right], \tag{14}$$

де $2^{-(p+1)rn} \asymp \delta$;

для рівнянь з $\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\big)$, $2 \le p \le 2\mu_*$:

$$\Omega_2 = \{1\} \times \Big[1; 2^{\frac{2rn}{s}}\Big] \bigcup_{k=1}^{n} \Big(2^{k-1}; 2^k\Big] \times \Big[1; 2^{\frac{2rn}{s} - \frac{(3p-2)rk}{2ps}}\Big] \subset [1; 2^n] \times \Big[1; 2^{\frac{2rn}{s}}\Big], \qquad (15)$$

де $2^{-(p+1)rn/p} \asymp \delta$;

для рівнянь з $\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(S), M_{p,\rho}(A)\big)$, $2 \le p \le 2\mu_*$:

$$\Omega_3 = \{1\} \times \Big[1; 2^{\frac{2rn}{s}}\Big] \bigcup_{k=1}^{n} \Big(2^{k-1}; 2^k\Big] \times \Big[1; 2^{\frac{2rn}{s} - \frac{(p-1)rk}{ps}}\Big] \subset [1; 2^n] \times \Big[1; 2^{\frac{2rn}{s}}\Big], \qquad (16)$$

де $2^{-2(p-1)rn/p} \asymp \delta$.

Тоді областям (14) – (16) відповідатимуть такі дискретизовані оператори:

$$A_{\Omega_1} := P_1 A P_{2^{\frac{pr}{s}n}} + \sum_{k=1}^{n} \left(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}\right) A P_{2^{\frac{pr}{s}(n-k/2)}},$$

$$A_{\Omega_2} := P_1 A P_{2^{\frac{2rn}{s}}} + \sum_{k=1}^{n} \left(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}\right) A P_{2^{\frac{2rn}{s} - \frac{(3p-2)rk}{2ps}}},$$

$$A_{\Omega_3} := P_1 A P_{2^{\frac{2rn}{s}}} + \sum_{k=1}^{n} \left(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}\right) A P_{2^{\frac{2rn}{s} - \frac{(p-1)rk}{ps}}}.$$

Як відомо, для помірно некоректних задач параметр регуляризації α слід вибирати (апріорно) згідно з правилом

$$\alpha \asymp \delta^{2/(p+1)}. \qquad (17)$$

Проекційні методи (12), (13), (17) зі схемами дискретизації (14), (15), (16) позначимо через $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ відповідно.

Далі під c_i будемо розуміти різні додатні сталі, що, взагалі кажучи, не залежать від δ та N.

Теорема 1. А. 1. *Якщо* $1 < p \le 2$ *і* $r/s > 2/p$, *то для* $N \asymp \delta^{-\frac{p}{(p+1)s}}$ *справджується*

$$R_{N,\delta}\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\big) \asymp N^{-s} \asymp \delta^{\frac{p}{p+1}}.$$

Зазначений порядок на класі $\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\big)$ *реалізується у межах проекційного методу* $\mathcal{P}_1$.

2. *Якщо* $p \ge 2$ *і* $r/s > \dfrac{2p}{3p-2}$, *то для* $N \asymp \delta^{-\frac{p}{(p+1)s}}$ *справджується*

$$R_{N,\delta}\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\big) \asymp N^{-s} \asymp \delta^{\frac{p}{p+1}}.$$

Зазначений порядок на класі $\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\big)$ *реалізується у межах проекційного методу* $\mathcal{P}_2$.

Б. 1. *Якщо* $1 < p \le 2$ *і* $r/s = 2/p$, *то для* $N \asymp \delta^{-\frac{p}{(p+1)s}} \ln 1/\delta$ *справджується*

$$c_1 N^{-s} \le R_{N,\delta}\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\big) \le c_2 N^{-s} \ln^s N.$$

Зазначений порядок на класі $\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\big)$ *реалізується у межах проекційного методу* $\mathcal{P}_1$.

2. *Якщо* $p \geq 2$ *і* $r/s = \dfrac{2p}{3p-2}$, *то для* $N \asymp \delta^{-\frac{p}{(p+1)s}} \ln 1/\delta$ *справджується*

$$c_3 N^{-s} \leq R_{N,\delta}\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\big) \leq c_4 N^{-s} \ln^s N.$$

Зазначений порядок на класі $\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\big)$ *реалізується у межах проекційного методу* $\mathcal{P}_2$.

Теорема 2. *Нехай* $p \geq 2$. *Тоді для* $r/s > \dfrac{p}{p-1}$ *справджується*

$$R_{N,\delta}\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(S), M_{p,\rho}(A)\big) \asymp N^{-s} \asymp \delta^{\frac{p}{p+1}}$$

при $N \asymp \delta^{-\frac{p}{(p+1)s}}$, *а для* $r/s = \dfrac{p}{p-1}$ *виконується*

$$c_5 N^{-s} \leq R_{N,\delta}\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(S), M_{p,\rho}(A)\big) \leq c_6 N^{-s} \ln^s N$$

при $N \asymp \delta^{-\frac{p}{(p+1)s}} \ln 1/\delta$. *Зазначений порядок на класі* $\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(S), M_{p,\rho}(A)\big)$ *реалізується у межах проекційного методу* $\mathcal{P}_3$.

Теорема 3. А. 1. *Якщо параметри* p, r *і* s *такі, що точка* $(p, r/s)$ *належить множині* $(1,2] \times (4/p, \infty)$, *то для* $N \asymp \delta^{-\frac{p}{(p+1)s}}$ *справджується*

$$\overline{R}_{N,\delta}\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\big) \asymp N^{-s} \asymp \delta^{\frac{p}{p+1}}.$$

Зазначений порядок на класі $\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\big)$ *реалізується у межах проекційного методу* $\mathcal{P}_1$, *де як регуляризатор використано узагальнений метод Тихонова з* $g_\alpha(\lambda) = \lambda^q(\alpha^{q+1} + \lambda^{q+1})^{-1}$, $q \geq -\dfrac{1}{2}$, $\mu_* = q+1$.

2. *Якщо параметри* p, r *і* s *такі, що точка* $(p, r/s)$ *належить множині*

$$[2,6] \times \left(\frac{2p}{3p-4}, \infty\right) \bigcup (6,\infty) \times [3/2, \infty),$$

то для $N \asymp \delta^{-\frac{p}{(p+1)s}}$ *справджується*

$$\overline{R}_{N,\delta}\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\big) \asymp N^{-s} \asymp \delta^{\frac{p}{p+1}}.$$

Зазначений порядок на класі $\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\big)$ *реалізується у межах проекційного методу* $\mathcal{P}_2$, *де як регуляризатор використано узагальнений метод Тихонова.*

Б. 1. *Якщо* $1 < p \leq 2$, $r/s = 4/p$, *то для* $N \asymp \delta^{-\frac{p}{(p+1)s}} \ln 1/\delta$ *справджується*

$$c_7 N^{-s} \leq \overline{R}_{N,\delta}\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\big) \leq c_8 N^{-s} \ln^s N.$$

Зазначений порядок на класі $\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\big)$ *реалізується у межах проекційного методу* $\mathcal{P}_1$, *де як регуляризатор використано узагальнений метод Тихонова.*

2. *Якщо* $2 \leq p \leq 6$, $r/s = \dfrac{2p}{3p-4}$, *то для* $N \asymp \delta^{-\frac{p}{(p+1)s}} \ln 1/\delta$ *справджується*

$$c_9 N^{-s} \leq \overline{R}_{N,\delta}\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\big) \leq c_{10} N^{-s} \ln^s N.$$

Зазначений порядок на класі $\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_{p,\rho}(A)\big)$ *реалізується у межах проекційного методу* $\mathcal{P}_2$, *де як регуляризатор використано узагальнений метод Тихонова.*

Теорема 4. *Нехай $p \geq 2$. Тоді для $r/s > \dfrac{2p}{p-1}$ справджується*

$$\overline{R}_{N,\delta}\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(S), M_{p,\rho}(A)\big) \asymp N^{-s} \asymp \delta^{\frac{p}{p+1}}$$

при $N \asymp \delta^{-\frac{p}{(p+1)s}}$, а для $r/s = \dfrac{2p}{p-1}$ виконується

$$c_{11}N^{-s} \leq \overline{R}_{N,\delta}\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(S), M_{p,\rho}(A)\big) \leq c_{12}N^{-s}\ln^s N$$

при $N \asymp \delta^{-\frac{p}{(p+1)s}} \ln 1/\delta$. Зазначений порядок на класі $\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(S), M_{p,\rho}(A)\big)$ реалізується у межах проекційного методу $\mathcal{P}_3$, де як регуляризатор використано узагальнений метод Тихонова.

Доведення теорем 1 – 4 опубліковано у [12, 13].

***2.2. Помірно некоректні задачі* (*апостеріорний випадок*).** Недоліком апріорного вибору α є його обов'язкове „налаштування” на певне значення p. При цьому оптимальний порядок точності $O(\delta^{p/(p+1)})$ або $O\left(\left(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K \text{ разів}}\frac{1}{\delta}\right)^{-p}\right)$ забезпечується лише для задач (1) з нормальним розв'язком $x^\dagger \in M_{p,\rho}(A)$ або $x^\dagger \in M_{p,\rho}^K(A)$ відповідно, де величина p є фіксованою. Очевидно, що такий підхід до розв'язування некоректних задач можливий, якщо нам точно відомо значення параметра p. Але оскільки така інформація, зазвичай, або відсутня, або не є точною, то на практиці необхідні апостеріорні правила вибору параметра регуляризації, реалізація яких не потребує додаткових знань про гладкість розв'язку. Одним із найбільш розповсюджених таких правил є принцип нев'язки Морозова, який уперше було застосовано для помірно некоректних задач у [4, 6, 7]. Для жорстко некоректних задач цей принцип розглядався, зокрема, у роботі [25].

Замість множини $M_{p,\rho}(A)$ введемо у розгляд множину

$$M(A) = \bigcup_{0<p\leq 2\mu_*} M_{p,\rho}(A). \tag{18}$$

У цьому підпункті для економічного розв'язування рівнянь із класів $\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M(A)\big)$ та $\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(S), M(A)\big)$ буде запропоновано підхід, що полягає у комбінуванні ітерованого методу Тихонова з правилом зупинки згідно з принципом нев'язки Морозова.

Для дискретизації застосовується хрест вигляду

$$\Omega_4 = \{1\} \times \big[1; 2^{2an}\big] \bigcup_{k=1}^{2n} (2^{k-1}; 2^k] \times \big[1; 2^{(2n-k)a}\big] \subset \big[1; 2^{2n}\big] \times \big[1; 2^{2an}\big], \tag{19}$$

де a — довільне число таке, що $1 < a < \dfrac{r}{s}$, $r > s$ і $a = 1$, $r = s$. Тоді

$$A_{\Omega_4} = P_1 A P_{2^{2an}} + \sum_{k=1}^{n} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{(2n-k)a}}.$$

Проекційний метод (12), (13), (19) з вибором параметра регуляризації згідно з принципом нев'язки Морозова позначимо через $\mathcal{P}_4$.

Теорема 5. *Для достатньо малих δ виконується*

$$\overline{c}_1 N^{-\frac{pr}{p+1}} \le R_{N,\delta}\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,r}(D), M(A)\big) \le \overline{c}_2 N^{-\frac{pr}{p+1}} \ln^{\frac{p(1+2r)}{2(p+1)}} N, \quad r = s, \tag{20}$$

$$R_{N,\delta}\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M(A)\big) \asymp N^{-\frac{ps}{p+1}}, \quad r > s, \tag{21}$$

де сталі $\overline{c}_1, \overline{c}_2 > 0$ не залежать від δ та N. Оптимальні за порядком оцінки інформаційної складності реалізуються у рамках алгоритму $\mathcal{P}_4$, де як регуляризатор використовується ітерований метод Тихонова з $g_{m,\alpha}(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}\big(1-(1+\alpha^{-1}\lambda)^{-m}\big)$, $\lambda \ne 0, m \ge 1,$ $\mu_* = m$.

Доведення цієї теореми наведено у [12, 13].

2.3. Жорстко некоректні задачі (апріорний випадок). Для економічної дискретизації рівнянь із класу $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_p^1(A)),$ $0 < p < \infty$, застосуємо проекційну схему з

$$\Omega_5 = \{1\} \times \big[1; 2^{bn}\big] \bigcup_{k=1}^{n} (2^{k-1}; 2^k] \times \big[1; 2^{bn - rk/s}\big] \subset [1; 2^n] \times \big[1; 2^{bn}\big], \tag{22}$$

де $\dfrac{r}{s} < b \le \dfrac{2r}{s}$, $n \in \mathbb{N}$ та

$$A_{\Omega_5} = P_1 A P_{2^{bn}} + \sum_{k=1}^{n} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{bn - \frac{r}{s}k}}. \tag{23}$$

Проекційний метод (12), (13), (23) з апріорним правилом вибору параметра регуляризації α

$$\ln^{-p} \alpha^{-1} = \delta / \sqrt{\alpha} \tag{24}$$

позначимо через $\mathcal{P}_5$.

Теорема 6. *При N, що задовольняють умову*

$$N^{-s} \ln^{-p} N^{2s} \asymp \begin{cases} \dfrac{\delta}{\ln^{s+1} \delta^{-1}}, & r = s, \\ \dfrac{\delta}{\ln \delta^{-1}}, & r > s, \end{cases}$$

справджується

$$R_{N,\delta}\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p^1(A)\big) \asymp \ln^{-p} N^{2s} \asymp \ln^{-p} \delta^{-1}.$$

Зазначений оптимальний порядок на класі $\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_p^1(A)\big)$, $0 < p < \infty$, $r \ge s$, реалізується в рамках проекційного методу $\mathcal{P}_5$.

Теорема 7. *При $r \ge 2s$ мають місце співвідношення*

$$\overline{R}_{N,\delta}\big(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D), M_p^1(A)\big) \asymp \ln^{-p} \delta^{-1} \asymp \ln^{-p} N^{2s}, \tag{25}$$

де N — обсяг обчислювальних витрат. При цьому

$$N = \begin{cases} O\left(\delta^{-\frac{1}{s}} (\ln \delta^{-1})^{\frac{1-p+s}{s}}\right), & r = 2s, \\ O\left(\delta^{-\frac{1}{s}} (\ln \delta^{-1})^{\frac{1-p}{s}}\right), & r > 2s. \end{cases} \tag{26}$$

Зазначений оптимальний порядок реалізується в рамках проекційного методу $\mathcal{P}_5$, де за регуляризатор вибрано стандартний метод Тихонова.

Доведення теорем 6 та 7 опубліковано в роботах [27, 29].

***Зауваження* 1.** З оцінки (26) випливає, що збільшення гладкості оператора A за зовнішньою змінною r (від $r = 2s$ до $r > 2s$) приводить до зменшення на логарифмічний множник в оцінці обсягу обчислювальних витрат, що необхідні для досягнення оптимального порядку точності.

***Зауваження* 2.** З результатів роботи [19] випливає, що для стандартної схеми Гальоркіна обсяг обчислювальних витрат на тих самих класах рівнянь складає $O(\delta^{-1/s}\delta^{-2\varepsilon/r}\ln^{-p/s}\delta^{-1})$. Порівнюючи цей результат з теоремою 7, можна дійти висновку, що запропонований проекційний метод $\mathcal{P}_5$ дозволяє не лише скоротити обсяг обчислень відносно стандартної гальоркінської схеми, а й реалізувати порядкові оцінки величини $\overline{R}_{N,\delta}$ на класах рівнянь $\big(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma(D), M^1_p(A)\big)$, $r \geq 2s$.

***Зауваження* 3.** Для досягнення оптимального порядку точності при розв'язуванні жорстко некоректних задач достатньо скористатися регуляризатором малої кваліфікації ($\mu_* = 1$). Ця ситуація принципово відрізняється від випадку помірно некоректних задач, де збільшення параметра p призводить до використання регуляризатора великої кваліфікації.

***2.4. Жорстко некоректні задачі* (*апостеріорний випадок*).** Нехай параметр p в (4) є невідомим. Шукатимемо розв'язок з множини

$$M^1(A) := \bigcup_{p\in(0,p_1]} M^1_p(A). \tag{27}$$

Тут $p_1 < \infty$ — верхня межа можливих значень p.

Для економічного розв'язування рівнянь із класу $\big(\mathcal{H}^{r,r}_\gamma(D), M^1(A)\big)$ буде запропоновано два підходи, що полягають у комбінуванні стандартного методу Тихонова з принципом нев'язки Морозова, а також з принципом рівноваги відповідно.

В межах наших досліджень скористаємося проекційною схемою з хрестом вигляду

$$\Omega_6 = \{1\}\times[1;2^{2n}]\bigcup_{k=1}^{2n}(2^{k-1};2^k]\times[1;2^{2n-k}] \subset [1;2^{2n}]\times[1;2^{2n}]. \tag{28}$$

Нагадаємо, що принцип рівноваги полягає у виборі значення параметра регуляризації таким чином, щоб врівноважити дві функції ($\Psi_1,\ \Psi_2$), що складають оцінку похибки: $\|x^\dagger - x_{\text{disc}}\| \leq$ $\leq \Psi_1(\alpha)+\Psi_2(\alpha)$, де $\Psi_1(\alpha) = \varphi(\alpha) = \ln^{-p}\alpha$ є монотонно зростаючою по α, а $\Psi_2(\alpha) =$ $= \dfrac{17}{10}\dfrac{\delta}{\sqrt{\alpha}}$ — монотонно спадною. Враховуючи поведінку функцій $\Psi_1,\ \Psi_2$ (а саме, їх монотонність та ввігнутість), вибір такого $\tilde{\alpha}$, що теоретично мінімізує праву частину оцінки похибки, буде врівноважувати функції Ψ_1 та Ψ_2. А оскільки функція φ, яка характеризує гладкість шуканого розв'язку, є невідомою, то апріорний вибір $\tilde{\alpha}$ неможливий. Замість теоретично найкращого $\tilde{\alpha}$ за параметр регуляризації, згідно з принципом рівноваги, беремо елемент

$$\alpha^+ = \max\big\{\alpha\colon \alpha\in D^+_n\big\},$$

що є досить близьким до $\tilde{\alpha}$. Тут

$$D^+_n = \Big\{i\colon \big\|x^\delta_{\alpha_i,n} - x^\delta_{\alpha_j,n}\big\| \leq 4\Psi_2(\alpha_j)\ \ \forall i > j,\ \ i = 1,\ldots,M\Big\}, \tag{29}$$

а множина можливих значень для параметра α визначається таким чином:

$$D_M = \left\{\alpha_i = \alpha_0(q^2)^i,\ i = 1, 2, \ldots, M\right\},$$

де $\alpha_0 = \left(\dfrac{17}{10}\right)^2 \delta^2,\ M = \left[\dfrac{\log \alpha_0^{-1}}{2\log q}\right]$. Саме такий підхід гарантує оптимальний порядок точності, який, як зазначалося вище, складає $O\left(\left(\ln \dfrac{1}{\delta}\right)^{-p}\right)$.

Проекційні методи (12), (13), (28) з правилами зупинки згідно з принципом нев'язки Морозова та принципом рівноваги відповідно будемо позначати через $\mathcal{P}_6$ та $\mathcal{P}_7$.

Теорема 8. *Має місце порядкова оцінка*

$$R_{N,\delta}\left(\mathcal{H}_\gamma^{r,r}(D), M^1(A)\right) \asymp \ln^{-p} N^{2r} \asymp \ln^{-p} \frac{1}{\delta},$$

де $N \asymp \delta^{-\frac{1}{r}} \ln^{1+\frac{1}{2r}} \delta^{-1}$. *Зазначений оптимальний порядок досягається у межах проекційних методів* $\mathcal{P}_6$, $\mathcal{P}_7$, *де як регуляризатор застосовано стандартний метод Тихонова.*

Доведення теореми 8 опубліковано в роботах [28, 30].

***Зауваження* 4.** Порівняння результатів для методу з [19], де як схему дискретизації використано стандартну схему Гальоркіна, з теоремою 8 дозволяє дійти висновку, що всі ці підходи гарантують оптимальний порядок точності на класі жорстко некоректних задач, тоді як задіяна нами модифікація гальоркінської схеми дискретизації (28) дозволяє суттєво скоротити обсяг дискретної інформації. З іншого боку, якщо порівнювати теорему 8 з теоремою 6, де параметр регуляризації вибирався апріорно, то у випадку апостеріорного вибору обсяг задіяної гальоркінської інформації є більшим на логарифмічний множник. Таке збільшення обсягу інформації можна розглядати як деяку „плату” за відмову від знання інформації про гладкість шуканого розв'язку.

Література

1. *Бабенко К. И.* О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**, № 2. – С. 247 – 250.
2. *Бакушинский А. Б., Кокурин М. Ю.* Итеративные методы для решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 192 с.
3. *Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. – М.: Наука, 1986. – 182 с.
4. *Иванов В. К.* О приближенном решении операторных уравнений первого рода // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1966. – **6**, № 6. – С. 1089 – 1094.
5. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: СО АН СССР, 1962. – 92 с.
6. *Морозов В. А.* О выборе параметра при решении функциональных уравнений методом регуляризации // Докл. АН СССР. – 1967. – **175**, № 6. – С. 1225 – 1228.
7. *Морозов В. А.* О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1966. – **6**, № 1. – С. 170 – 175.
8. *Переверзев С. В.* Гиперболический крест и сложность приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма II рода с дифференцируемыми ядрами // Сиб. мат. журн. – 1991. – **32**, № 1. – С. 107 – 115.
9. *Переверзев С. В.* Оптимизация методов приближенного решения операторных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996. – 252 с.
10. *Переверзев С. В.* О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма II рода с гладкими ядрами. I // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 84 – 91.

11. *Переверзев С. В.* О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма II рода с гладкими ядрами. II // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 189 – 193.
12. *Солодкий С. Г.* Информационная сложность проекционных алгоритмов решения уравнений Фредгольма I рода. I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 5. – С. 699 – 711.
13. *Солодкий С. Г.* Информационная сложность проекционных алгоритмов решения уравнений Фредгольма I рода. II // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 6. – С. 838 – 844.
14. *Солодкий С. Г.* Оптимизация проекционных методов решения линейных некорректных задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1999. – **39**, № 2. – С. 195 – 203.
15. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
16. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 382 с.
17. *Engl H. W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of inverse problems. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1996. – 321 p.
18. *Mair B. A.* Tikhonov regularization for finitely and infinitely smoothing operators // SIAM J. Math. Anal. – 1994. – **25**, № 1. – P. 135 – 147.
19. *Mathe P., Pereverzev S. V.* Discretization strategy for ill-posed problems in variable Hilbert scales // Inverse Problems. – 2003. – **19**, № 6. – P. 1263 – 1277.
20. *Plato R., Vainikko G. M.* On the regularization of projection methods for solving ill-posed problems // Numer. Math. – 1990. – **57**. – P. 63 – 79.
21. *Pereverzev S. V.* Optimization of projection methods for solving ill-posed problems // Computing. – 1995. – **55**. – P. 113 – 124.
22. *Pereverzev S., Scharipov C.* Information complexity of equations of second kind with compact operators in Hilbert space // J. Complexity. – 1992. – **8**. – P. 176 – 202.
23. *Pereverzev S. V., Solodky S. G.* The minimal radius of Galerkin information for the Fredholm problems of first kind // J. Complexity. – 1996. – **12**, № 4. – P. 401 – 415.
24. *Saranen J., Vainikko G.* Periodic integral and pseudodifferential equations with numerical approximation. – Berlin: Springer, 2002.
25. *Schock E., Pereverzev S. V.* Morozov's discrepancy principle for Tikhonov regularization of severely ill-posed problems in finite-dimensional subspaces // Numer. Funct. Anal. and Optim. – 2000. – **21**, № 7-8. – P. 901 – 916.
26. *Solodky S. G.* The optimal approximations for solving linear ill-posed problems // J. Complexity. – 2001. – **17**, № 1. – P. 98 – 116.
27. *Solodky S. G., Myleiko G. L.* On optimization of projection methods for solving some classes of severely ill-posed problems // J. Appl. Anal. – 2016. – **95**, № 4. – P. 826 – 841.
28. *Solodky S. G., Myleiko G. L.* On optimal selection of Galerkin information for solving severely ill-posed problems // J. Comput. and Appl. Math. – 2016. – **2(100)**. – P. 92 – 105.
29. *Solodky S. G., Myleiko G. L.* The minimal radius of Galerkin information for severely ill-posed problems // J. Inverse and Ill-Posed Probl. – 2014. – **22**, № 5. – P. 739 – 757.
30. *Solodky S. G., Semenova E. V.* About minimal informational efforts by solving exponentially ill-posed problems // J. Comput. and Appl. Math. – 2015. – **2**. – P. 90 – 100.
31. *Solodky S. G., Semenova E. V.* On the optimal order of accuracy of an approximate solution to the Symm's integral equation // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2012. – **52**, № 3. – С. 472 – 488.
32. *Tautenhahn U.* Optimality for ill-posed problems under general source condition // Numer. Funct. Anal. and Optim. – 1998. – **19**, № 3-4. – P. 377 – 398.
33. *Traub J. F, Wasilkowski G., Wozniakowski H.* Information-based complexity. – Boston: Acad. Press, 1988. – 523 p.
34. *Werschulz A. G.* What is the complexity of ill-posed problems? – New York: Columbia Univ., 1985. – 352 p.
35. *Wozniakowski H.* Information based complexity // Ann. Rev. Comput. Sci. – 1986. – **1**. – P. 319 – 380.

Одержано 13.09.16