УДК 517.5

**Р. М. Рзаев** (Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Азерб. гос. пед. ун-т, Баку),
**З. Ш. Гахраманова, Л. Р. Алиева** (Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Баку)

# ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ БЕСОВА И КАМПАНАТО

We study the generalized Besov spaces and the spaces defined by the conditions imposed on local oscillations of locally summable functions (in the work, these spaces are called generalized Campanato spaces).

Вивчаються узагальнені простори Бєсова і простори, що визначаються умовами на локальну осциляцію локально сумовних функцій (у статті ці простори називаються узагальненими просторами Кампанато).

**1. Введение.** Функциональные пространства играют важную роль при исследовании интегральных, дифференциальных, интегро-дифференциальных и других уравнений. Поэтому изучение функциональных пространств, доказательство различных теорем вложения, получение утверждений об изоморфизмах между различными функциональными пространствами является актуальной задачей математического анализа. Данная работа посвящена исследованию обобщенных пространств Бесова и пространств, определяемых условиями на локальную осцилляцию локально суммируемых функций (в работе эти пространства называются обобщенными пространствами Кампанато).

Пространства Кампанато, иногда называемые также пространствами Моррея – Кампанато, были введены в [2] в случае ограниченных областей в $R^n$. Они являются обобщениями BMO-пространства функций ограниченной средней осцилляции, которое было введено в [8] и определено для открытых множеств $G \subset R^n$ посредством полунормы

$$\|f\|_{BMO} := \sup_{x\in G, r>0} \frac{1}{|G(x,r)|} \int\limits_{G(x,r)} \left|f(t) - f_{G(x,r)}\right| dt,$$

где $R^n$ — $n$-мерное евклидово пространство, $G(x,r) := G \cap B(x,r)$, $B(x,r) := \{t \in R^n : |t-x| \leq r\}$ — замкнутый шар в $R^n$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in R^n$, $|G(x,r)|$ — лебегова мера множества $G(x,r)$, $f_{G(x,r)} = \dfrac{1}{|G(x,r)|} \displaystyle\int_{G(x,r)} f(t)\, dt$.

Пусть $G \subset R^n$ — открытое множество, $1 \leq p < \infty$, $\lambda \geq 0$. Тогда пространство

$$L^{p,\lambda}(G) := \left\{ f \in L^p_{\mathrm{loc}}(G) \colon \|f\|_{L^{p,\lambda}(G)} < +\infty \right\},$$

где

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(G)} := \sup_{x\in G, r>0} \left( \frac{1}{r^\lambda} \int\limits_{G(x,r)} \left|f(t) - f_{G(x,r)}\right|^p dt \right)^{1/p},$$

называется пространством Кампанато. Отметим, что полунорма $\|f\|_{L^{p,\lambda}(G)}$ эквивалентна величине

$$\sup_{x\in G, r>0} \left( \frac{1}{r^\lambda} \inf_{c\in R^1} \int\limits_{G(x,r)} \left|f(t) - c\right|^p dt \right)^{1/p}.$$

Важность пространств Кампанато обусловлена тем, что при $n < \lambda \le n + p$ они совпадают с пространствами Гельдера, а в случае $0 < \lambda < n$ — с пространствами Моррея (в случае ограниченной области $G$) (см. [2, 11]). В случае $\lambda = n$ пространство $L^{p,\lambda}(G)$ совпадает с пространством $BMO(G)$.

В [3] Кампанато ввел пространства высшего порядка $L_k^{p,\lambda}(G)$ с помощью полунормы

$$\|f\|_{L_k^{p,\lambda}(G)} := \sup_{x\in G,\, r>0} \left( \frac{1}{r^\lambda} \inf_{P\in P_k} \int\limits_{G(x,r)} \big|f(t) - P(t)\big|^p \, dt \right)^{1/p},$$

где $P_k$ — множество всех полиномов в $R^n$, степень которых не выше $k \in N \cup \{0\}$, $N$ — множество всех натуральных чисел.

Обобщенное пространство высшего порядка $L_k^{p,\varphi}(G)$, которое определяется с помощью полунормы Кампанато

$$\|f\|_{L_k^{p,\varphi}(G)} := \sup_{x\in G,\, r>0} \left( \frac{1}{\varphi(r)} \inf_{P\in P_k} \int\limits_{G(x,r)} \big|f(t) - P(t)\big|^p \, dt \right)^{1/p},$$

где $\varphi(r)$ — неотрицательная функция, было исследовано в работе [23].

Дополнительную информацию о пространствах Кампанато см., например, в [11].

**2. Предварительные факты.** Совокупность всех функций, $p$-я степень модуля которых локально суммируема в $R^n$, обозначим через $L^p_{\text{loc}}(R^n)$, $1 \le p < \infty$, а совокупность всех локально ограниченных в $R^n$ функций — через $L^\infty_{\text{loc}}(R^n)$.

Пусть $f \in L^p_{\text{loc}}(R^n)$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, $k \in N$. Введем следующие функции:

$$\mu_f^k(x;r)_p := \inf\big\{\|f - \pi\|_{L^p(B(x,r))} : \pi \in P_{k-1}\big\}, \qquad r > 0, \quad x \in R^n,$$

$$\mu_f^k(r)_{pq} := \begin{cases} \big\|\mu_f^k(\cdot;r)_p\big\|_{L^q(R^n)}, & \text{если} \quad 1 \le q < \infty, \\ \sup\Big\{\mu_f^k(x;r)_p : x \in R^n\Big\}, & \text{если} \quad q = \infty. \end{cases}$$

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n)$, где $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ — неотрицательные целые числа, $|\vartheta| = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n$, $x^\vartheta = x_1^{\vartheta_1} x_2^{\vartheta_2} \ldots x_n^{\vartheta_n}$. Применим процесс ортогонализации относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \frac{1}{\big|B(0,1)\big|} \int\limits_{B(0,1)} f(t) g(t)\, dt$$

к системе степенных функций $x^\vartheta$, $|\vartheta| \le k$, $k \in N \cup \{0\}$, расположенных в частично лексикографическом порядке[1] (см. [15, 19]), где через $|E|$ обозначена лебегова мера множества $E \subset R^n$. Полученную ортонормированную систему обозначим через $\varphi_\vartheta$, $|\vartheta| \le k$.

Пусть $f \in L^1_{\text{loc}}(R^n)$. Рассмотрим полином [4, 14]

[1] Это означает, что $x^\vartheta$ предшествует $x^\lambda$, если либо $|\vartheta| < |\lambda|$, либо $|\vartheta| = |\lambda|$, но первая ненулевая разность $\vartheta_i - \lambda_i$ отрицательна.

$$P_{k,B(a,r)}f(x) := \sum_{|\vartheta|\le k}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int\limits_{B(a,r)} f(t)\varphi_\vartheta\left(\frac{t-a}{r}\right)dt\right)\varphi_\vartheta\left(\frac{x-a}{r}\right).$$

Очевидно, что $P_{k,B(a,r)}f$ принадлежит $P_k$.

Для функции $f\in L^p_{\mathrm{loc}}(R^n)$, $1\le p\le\infty$, обозначим

$$O_k\big(f,B(a,r)\big)_p := \|f-P_{k-1,B(a,r)}f\|_{L^p(B(a,r))}.$$

Величина $O_k\big(f,B(a,r)\big)_p$ называется локальной осцилляцией $k$-го порядка функции $f$ в шаре $B(a,r)$ в метрике $L^p$ [17].

Отметим, что если $k=0$, то

$$P_{k,B(a,r)}f(x)\equiv\frac{1}{\big|B(a,r)\big|}\int\limits_{B(a,r)} f(t)\,dt =: f_{B(a,r)},$$

и поэтому, в частности,

$$O_1(f,B(a,r))_1 = \int\limits_{B(a,r)}\big|f(t)-f_{B(a,r)}\big|\,dt.$$

Известно, что для любого полинома $\pi\in P_{k-1}$ и для любого шара $B(x,r)\subset R^n$ выполняется неравенство (см. [12])

$$\big\|f-P_{k-1,B(x,r)}f\big\|_{L^p(B(x,r))}\le c\,\|f-\pi\|_{L^p(B(x,r))},$$

где положительная постоянная $c$ не зависит от $p,\ f,\ B$ и $\pi$. Отсюда следует, что

$$\exists c>0\quad \forall x\in R^n\quad \forall r>0:$$

$$\mu_f^k(x,r)_p\le O_k(f,B(x,r))_p\le c\,\mu_f^k(x,r)_p. \tag{1}$$

Модуль непрерывности $k$-го порядка $(k\in N)$ функции $f$ в метрике $L^p$, $1\le p\le\infty$, определяется равенством

$$\omega_f^k(r)_p := \sup\left\{\big\|\Delta_h^k f\big\|_{L^p(R^n)} : |h|\le r\right\},\qquad r>0,$$

где $\Delta_h^1 f(x) := f(x+h)-f(x)$, $\Delta_h^k f = \Delta_h^1\big(\Delta_h^{k-1}f\big)$.

Отметим, что функции $\mu_f^k(x,r)_p$, $\mu_f^k(r)_{pq}$ и $\omega_f^k(r)_p$ монотонно возрастают на промежутке (0,+$\infty$) по аргументу $r$.

Напомним некоторые известные факты, необходимые для дальнейшего изложения.

**Теорема 1** [16]. *Если $f\in L^q(R^n)$, $1\le p\le q\le\infty$ (при $q=\infty$ предполагается, что $f$ эквивалентна непрерывной функции*[2]*), то выполняется неравенство*

$$\mu_f^k(r)_{pq}\le c\,r^{n/p}\,\omega_f^k(r)_q,\quad r>0, \tag{2}$$

*где постоянная* $\mathrm{c}>0$ *не зависит от $f$ и $r$.*

[2] Т. е. существует непрерывная в $R^n$ функция $g(x)$ такая, что $f(x)=g(x)$ почти всюду.

**Теорема 2** [16]. *Пусть* $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(R^n)$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q < \infty$,

$$\int\limits_0^1 t^{-n/q-1} \mu_f^k(t)_{qp}\, dt < +\infty.$$

*Тогда выполняется неравенство*

$$\omega_f^k(r)_p \le c \int\limits_0^r t^{-n/q-1} \mu_f^k(t)_{qp}\, dt, \quad r > 0 \tag{3}$$

(*если* $p = \infty$, *то* $f$ *эквивалентна непрерывной функции*), *где постоянная* $c > 0$ *не зависит от* $f$ *и* $r$.

**Теорема 3** [16]. *Пусть* $f \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(R^n)$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\omega_f^k(r)_\infty \le c\, \mu_f^k(r)_{\infty\infty}, \quad r > 0, \tag{4}$$

*где постоянная* $c > 0$ *не зависит от* $f$ *и* $r$.

**3. Теоремы вложения.** Пусть $\varPhi$ — класс всех положительных монотонно возрастающих на $(0, +\infty)$ функций $\varphi(t)$ таких, что $\varphi(+0) = 0$. Через $\varPhi_k$, $k \in (0, +\infty)$, обозначим совокупность всех функций $\varphi \in \varPhi$ таких, что $\varphi(t) t^{-k}$ почти убывает[3].

Пусть $k \in N$, $\varphi \in \varPhi_k$, $1 \le p$, $q \le \infty$. Через $B^{k,\varphi}_{p,q}$ обозначим совокупность всех функций $f \in L^p(R^n)$ (при $p = \infty$ предполагается, что $f$ эквивалентна непрерывной функции), для которых конечна полунорма

$$|f|_{B^{k,\varphi}_{p,q}} := \begin{cases} \left( \displaystyle\int\limits_0^\infty \left( \frac{\omega_f^k(t)_p}{\varphi(t)} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & \text{если} \quad 1 \le q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{t>0} \frac{\omega_f^k(t)_p}{\varphi(t)}, & \text{если} \quad q = \infty. \end{cases}$$

Норму в пространстве $B^{k,\varphi}_{p,q}$ введем посредством равенства

$$\|f\|_{B^{k,\varphi}_{p,q}} := \|f\|_{L^p(R^n)} + |f|_{B^{k,\varphi}_{p,q}}.$$

Пространства $B^{k,\varphi}_{p,q}$ в случае степенной функции $\varphi(t)$ были введены О. В. Бесовым (случай $q = \infty$ был ранее рассмотрен С. М. Никольским). Теория таких пространств изложена во многих работах, в том числе в [10]. Отметим, что обобщенное пространство Бесова $B^{k,\varphi}_{p,q}$ было рассмотрено в работах многих авторов (см., например, [6] и приведенную там библиографию).

Пусть $k \in N$, $1 \le p$, $q, \theta \le \infty$, $\varphi \in \Phi$. Через $L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}$ обозначим (см. [18]) класс всех функций $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(R^n)$ таких, что $\|f\|_{L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}} < +\infty$, где

[3] Неотрицательная функция $h(t)$, $t \in (0, \infty)$, называется почти убывающей, если $\exists c > 0$ $\forall t_1, t_2 \in (0, +\infty)$: $\big(t_1 < t_2 \Rightarrow h(t_1) \ge c\, h(t_2)\big)$.

$$\|f\|_{L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}} := \begin{cases} \left( \int\limits_0^\infty \left( \dfrac{\mu_f^k(t)_{pq}}{\varphi(t)} \right)^\theta \dfrac{dt}{t} \right)^{1/\theta} & \text{при} \quad 1 \le \theta < \infty, \\ \sup \left\{ \dfrac{\mu_f^k(r)_{pq}}{\varphi(r)} : r > 0 \right\} & \text{при} \quad \theta = \infty. \end{cases}$$

Класс $L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}$ рассматривается как подмножество в фактор-пространстве $L^p_{\text{loc}}(R^n)/P_{k-1}$. $L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}$ является банаховым пространством в норме $\|f\|_{L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}}$.

Введем еще следующие обозначения:

$$M^{k,\varphi}_{p,q,\theta} := L^{k,\varphi}_{p,q,\theta} \cap \ L^q(R^n),$$

$$\|f\|_{M^{k,\varphi}_{p,q,\theta}} := \|f\|_{L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}} + \|f\|_{L^q(R^n)}.$$

Пространства $L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}$ и $M^{k,\varphi}_{p,q,\theta}$ будем называть обобщенными пространствами Кампанато.

Из определения пространства $L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}$ следует, что если $1 \le p < \infty$, $q = \theta = \infty$ и $\varphi \in \Phi$, $\psi(t) = (\varphi(t))^p$, $t \in (0, +\infty)$, то $L^{k,\varphi}_{p,q,\theta} = L^{p,\psi}_{k-1}(R^n)$.

Следует отметить, что теория пространств, определяемых условиями на локальную осцилляцию функций, была развита во многих работах (см., например, [1, 2, 7 – 9, 11, 13, 19 – 22, 25]).

В [5] однородные пространства Бесова были исследованы в терминах средней осцилляции. Заметим, что с характеризацией обычных пространств Бесова $B^\alpha_{p,q}$ в терминах локальных осцилляций можно ознакомиться в [25]. Нижеследующие теоремы показывают важность обобщенных пространств $L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}$ и $M^{k,\varphi}_{p,q,\theta}$, в терминах которых удается описать обобщенные пространства Бесова. В этих утверждениях содержатся условия на функцию $\varphi(t)$, при которых обобщенное пространство Бесова и соответствующее обобщенное пространство Кампанато совпадают и их нормы эквивалентны.

**Теорема 4.** *Пусть* $k \in N$, $1 \le q \le p \le \infty$, $q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\varphi \in \Phi_k$, $\varphi_q(r) = r^{n/q}\,\varphi(r)$. *Тогда пространство* $B^{k,\varphi}_{p,\theta}$ *непрерывно вложено в пространство* $M^{k,\varphi_q}_{q,p,\theta}$.

***Доказательство.*** Докажем, что $B^{k,\varphi}_{p,\theta} \subset M^{k,\varphi_q}_{q,p,\theta}$ и

$$\exists C > 0 \quad \forall f \in B^{k,\varphi}_{p,\theta} : \|f\|_{M^{k,\varphi_q}_{q,p,\theta}} \le C \, \|f\|_{B^{k,\varphi}_{p,\theta}}. \tag{5}$$

Пусть $f \in B^{k,\varphi}_{p,\theta}$. В силу неравенства (2) получаем

$$\left( \int\limits_0^\infty \left( \frac{\mu_f^k(t)_{qp}}{\varphi(t) t^{n/q}} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} \le C \left( \int\limits_0^\infty \left( \frac{\omega_f^k(t)_p}{\varphi(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}$$

с соответствующей модификацией в случае $\theta = \infty$. Отсюда следует, что $B^{k,\varphi}_{p,\theta} \subset M^{k,\varphi_q}_{q,p,\theta}$ и справедливо соотношение (5), т. е. пространство $B^{k,\varphi}_{p,\theta}$ непрерывно вложено в пространство $M^{k,\varphi_q}_{q,p,\theta}$.

**Теорема 5.** *Пусть* $k \in N$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\varphi \in \Phi_k$, $\varphi_q(r) = r^{n/q}\varphi(r)$,

$$\int\limits_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t} dt = O\big(\varphi(\delta)\big), \qquad \delta > 0. \tag{6}$$

*Тогда пространство* $M^{k,\varphi_q}_{q,p,\theta}$ *непрерывно вложено в пространство* $B^{k,\varphi}_{p,\theta}$.

***Доказательство.*** В случае $\theta = \infty$ требуемое утверждение, т. е. непрерывное вложение пространства $M^{k,\varphi_q}_{q,p,\theta}$ в пространство $B^{k,\varphi}_{p,\theta}$, непосредственно следует из неравенства (3).

Пусть $f$ принадлежит $M^{k,\varphi_q}_{q,p,\theta}$, где $1\leq \theta < \infty$, $1\leq q \leq p \leq \infty$, $q < \infty$. Отсюда следует, что

$$\|f\|_{L^{k,\varphi_q}_{q,p,\theta}} = \left( \int\limits_0^\infty \left( \frac{\mu^k_f(t)_{qp}}{\varphi(t) t^{n/q}} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} < +\infty.$$

Тогда при $x \in (0, +\infty)$ имеем

$$\left( \int\limits_0^{2x} \left( \frac{\mu^k_f(t)_{qp}}{t^{n/q}\varphi(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} \geq \left( \int\limits_x^{2x} \left( \frac{\mu^k_f(t)_{qp}}{t^{n/q}\varphi(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} \geq$$

$$\geq \frac{\mu^k_f(x)_{qp}}{(2x)^{n/q}\varphi(2x)} (\ln 2)^{1/\theta} = 2^{-n/q} (\ln 2)^{1/\theta} \frac{\mu^k_f(x)_{qp}}{x^{n/q}\varphi(2x)}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\mu^k_f(x)_{qp}}{x^{n/q+1}} \leq 2^{n/q} (\ln 2)^{-1/\theta} \frac{\varphi(2x)}{x} \left( \int\limits_0^{2x} \left( \frac{\mu^k_f(t)_{qp}}{t^{n/q}\varphi(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} \leq$$

$$\leq 2^{n/q} (\ln 2)^{-1/\theta} \|f\|_{M^{k,\varphi_q}_{q,p,\theta}} \frac{\varphi(2x)}{x},$$

и, значит,

$$\int\limits_0^1 \frac{\mu^k_f(x)_{qp}}{x^{n/q+1}} dx \leq c\, \|f\|_{M^{k,\varphi_q}_{q,p,\theta}} \int\limits_0^1 \frac{\varphi(2x)}{x} dx < +\infty,$$

где $c = 2^{n/q}\ (\ln 2)^{-1/\theta}$. А это означает, что выполняются условия теоремы 2. Следовательно, имеет место неравенство (3). Можно проверить, что при выполнении условия (6) существует такое число $\varepsilon > 0$, что имеет место соотношение

$$\delta^\varepsilon \int\limits_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t^{1+\varepsilon}} dt \leq \mathrm{const} \cdot \varphi(\delta), \quad \delta > 0. \tag{7}$$

Пусть $\theta' \in (0, \theta)$ — такое число, что $\dfrac{1}{\theta'} - \dfrac{1}{\theta} = \varepsilon$. Тогда имеем

$$\left(\int\limits_0^{2x}\left(\frac{\mu_f^k(t)_{qp}}{t^{n/q}\varphi(t)t^{1/\theta}}\right)^{\theta'}dt\right)^{1/\theta'}\geq\left(\int\limits_x^{2x}\left(\frac{\mu_f^k(t)_{qp}}{t^{n/q}\varphi(t)t^{1/\theta}}\right)^{\theta'}dt\right)^{1/\theta'}\geq$$

$$\geq\frac{\mu_f^k(x)_{qp}}{(2x)^{n/q+1/\theta}\varphi(2x)}x^{1/\theta'}=2^{-n/q-1/\theta}\frac{\mu_f^k(x)_{qp}}{x^{n/q}\,\varphi(2x)}x^{\varepsilon},$$

поэтому

$$\frac{\mu_f^k(x)_{qp}}{x^{n/q+1}}\leq 2^{n/q+1/\theta}\frac{\varphi(2x)}{x^{1+\varepsilon}}\left(\int\limits_0^{2x}\left(\frac{\mu_f^k(t)_{qp}}{t^{n/q}\varphi(t)\,t^{1/\theta}}\right)^{\theta'}dt\right)^{1/\theta'}.$$

Отсюда для любого $\tau\in(0,+\infty)$ в силу (7) получаем

$$\int\limits_0^{\tau}\frac{\mu_f^k(x)_{qp}}{x^{n/q+1}}dx\leq c\left(\int\limits_0^{2\tau}\left(\frac{\mu_f^k(t)_{qp}}{t^{n/q}\varphi(t)t^{1/\theta}}\right)^{\theta'}dt\right)^{1/\theta'}\int\limits_0^{\tau}\frac{\varphi(2x)}{x^{1+\varepsilon}}dx\leq$$

$$\leq c_1\frac{\varphi(2\tau)}{\tau^{\varepsilon}}\left(\int\limits_0^{2\tau}\left(\frac{\mu_f^k(t)_{qp}}{t^{n/q}\varphi(t)\,t^{1/\theta}}\right)^{\theta'}dt\right)^{1/\theta'},$$

где $c$ и $c_1$ — положительные постоянные, не зависящие от $f$ и $\tau$.

Далее, применяя неравенство (3), имеем

$$\left(\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{\omega_f^k(t)_p}{\varphi(t)}\right)^{\theta}\frac{dt}{t}\right)^{1/\theta}\leq c_2\left(\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{\omega_f^k\left(\dfrac{t}{2}\right)_p}{\varphi(t)}\right)^{\theta}\frac{dt}{t}\right)^{1/\theta}\leq$$

$$\leq c_3\left(\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{\varphi(t)}\int\limits_0^{t/2}\frac{\mu_f^k(x)_{qp}}{x^{\frac{n}{q}+1}}dx\right)^{\theta}\frac{dt}{t}\right)^{1/\theta}\leq$$

$$\leq c_4\left(\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{\varphi(t)}\,\frac{\varphi(t)}{t^{\varepsilon}}\left(\int\limits_0^{t}\left(\frac{\mu_f^k(y)_{qp}}{y^{n/q}\,\varphi(y)\,y^{1/\theta}}\right)^{\theta'}dy\right)^{1/\theta'}\right)^{\theta}\frac{dt}{t}\right)^{1/\theta}=$$

$$=c_4\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{t^{\varepsilon\theta}}\left(\int\limits_0^{t}\left(\frac{\mu_f^k(y)_{qp}}{y^{n/q}\,\varphi(y)\,y^{1/\theta}}\right)^{\theta'}dy\right)^{\theta/\theta'}\frac{dt}{t}\right)^{1/\theta}=$$

$$=c_4\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{t^{1+\varepsilon\theta}}\left(\int\limits_0^{t}\left(\frac{\mu_f^k(y)_{qp}}{y^{n/q}\,\varphi(y)\,y^{1/\theta}}\right)^{\theta'}dy\right)^{\theta/\theta'}dt\right)^{1/\theta},$$

где положительные постоянные $c_2,\ c_3,\ c_4$ не зависят от $f$. Если учесть, что

$$1+\varepsilon\theta = 1+\left(\frac{1}{\theta'}-\frac{1}{\theta}\right)\theta = 1+\frac{\theta}{\theta'}-1=\frac{\theta}{\theta'},$$

то из последнего соотношения получаем

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{\omega_f^k(t)_p}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \le c_4 \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left(\frac{\mu_f^k(y)_{qp}}{y^{n/q}\,\varphi(y)\,y^{1/\theta}}\right)^{\theta'} dy\right)^{\theta/\theta'} dt\right)^{1/\theta}.$$

Отсюда с помощью неравенства Харди (см. [24]) имеем

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{\omega_f^k(t)_p}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \le c_5 \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{\mu_f^k(y)_{qp}}{y^{n/q}\,\varphi(y)\,y^{1/\theta}}\right)^{\theta'\frac{\theta}{\theta'}} dy\right)^{1/\theta} =$$

$$= c_5 \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{\mu_f^k(y)_{qp}}{y^{n/q}\,\varphi(y)}\right)^\theta \frac{dy}{y}\right)^{1/\theta},$$

где постоянная $c_5 > 0$ не зависит от $f$.

Отсюда следует, что $f \in B_{p,\theta}^{k,\varphi}$ и $\|f\|_{B_{p,\theta}^{k,\varphi}} \le \max\{1, c_5\}\,\|f\|_{M_{q,p,\theta}^{k,\varphi_q}}$. Таким образом, $M_{q,p,\theta}^{k,\varphi_q} \subset$ $\subset B_{p,\theta}^{k,\varphi}$ и

$$\exists C>0 \quad \forall f\in M_{q,p,\theta}^{k,\varphi_q} \colon \|f\|_{B_{p,\theta}^{k,\varphi}} \le C\,\|f\|_{M_{q,p,\theta}^{k,\varphi_q}}. \tag{8}$$

Соотношение (8) доказывает теорему 5.

Из предыдущих теорем непосредственно получаем следующее утверждение.

**Теорема 6.** *Пусть $k\in N$, $1\le q\le p\le\infty$, $q<\infty$, $1\le\theta\le\infty$, $\varphi\in\Phi_k$, $\varphi_q(r)=r^{n/q}\varphi(r)$ и выполняется условие* (6). *Тогда $M_{q,p,\theta}^{k,\varphi_q} = B_{p,\theta}^{k,\varphi}$ и их нормы эквивалентны.*

**Лемма.** *Пусть $f$ принадлежит $L_{\mathrm{loc}}^\infty(R^n)$. Если $\lim_{r\to 0}\mu_f^k(r)_{\infty\infty}=0$, то $f$ эквивалентна непрерывной функции.*

***Доказательство.*** Нетрудно показать, что если $g$ принадлежит $L_{\mathrm{loc}}^1(R^n)$, то для любого шара $B\subset R^n$ выполняется неравенство

$$\|P_{k,B}g\|_{L^\infty(B)} \le C\frac{1}{|B|}\int\limits_B \big|g(t)\big|dt, \tag{9}$$

где постоянная $C>0$ не зависит от $B$ и $g$.

Пусть $B(x_1,r)\subset B(x_0,\delta)$, $0<r\le\delta<+\infty$. Тогда с помощью неравенства (9) имеем

$$\forall x\in B(x_1,r)\colon \big|P_{k-1,B(x_0,\delta)}f(x) - P_{k-1,B(x_1,r)}f(x)\big| =$$

$$= \big|P_{k-1,B(x_1,r)}\big(f - P_{k-1,B(x_0,\delta)}f\big)(x)\big| \le$$

$$\le C\,\frac{1}{\big|B(x_1,r)\big|}\int\limits_{B(x_1,r)} \big|f(t)-P_{k-1,B(x_0,\delta)}f(t)\big|dt \le$$

$$\le C \left\| f - P_{k-1,B(x_0,\delta)} f \right\|_{L^\infty(B(x_1,r))} \le C \left\| f - P_{k-1,B(x_0,\delta)} f \right\|_{L^\infty(B(x_0,\delta))} =$$

$$= C\, O_k\big(f, B(x_0,\delta)\big)_\infty \le C_1\, \mu_f^k(x_0;\delta)_\infty, \tag{10}$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от $x_0,\ \delta,\ x,\ r,\ x_1$ и $f$. Отсюда

$$\forall x \in B(x_1, r)\colon\ \left| P_{k-1,B(x_0,\delta)} f(x) - P_{k-1,B(x_1,r)} f(x) \right| \le$$

$$\le C_1\, \mu_f^k(x_0;\delta)_\infty \le C_1\, \mu_f^k(\delta)_{\infty\infty}, \quad \delta > 0. \tag{11}$$

Из неравенства (10) также получаем, что если $0 < \varepsilon < \delta < +\infty$, то

$$\forall x \in B(x_0, \varepsilon)\colon\ \left| P_{k-1,B(x_0,\delta)} f(x) - P_{k-1,B(x_0,\varepsilon)} f(x) \right| \le C_1\, \mu_f^k(x_0;\delta)_\infty \le C_1\, \mu_f^k(\delta)_{\infty\infty}. \tag{12}$$

Из соотношения (12), в частности, следует, что если $\lim_{\delta\to 0} \mu_f^k(x_0;\delta)_\infty = 0$, то существует конечный предел

$$\lim_{r\to 0} P_{k-1,B(x_0,r)} f(x_0) =: s_{f,k}(x_0).$$

Таким образом, если $\lim_{\delta\to 0} \mu_f^k(\delta)_{\infty\infty} = 0$, то предел $s_{f,k}(x)$ существует во всех точках $x \in R^n$.

Если $x_0 \in R^n$ — произвольная точка, то

$$\left| f(x_0) - P_{k-1,B(x_0,r)} f(x_0) \right| = \left| P_{k-1,B(x_0,r)} \big(f - f(x_0)\big)(x_0) \right| \le$$

$$\le \left\| P_{k-1,B(x_0,r)} \big(f - f(x_0)\big) \right\|_{L^\infty(B(x_0,r))} \le C\, \frac{1}{\left| B(x_0,r) \right|} \int\limits_{B(x_0,r)} |f(t) - f(x_0)|\, dt.$$

Отсюда следует, что если $x_0$ является точкой Лебега функции $f$, то

$$\lim_{r\to 0} P_{k-1,B(x_0,r)} f(x_0) = f(x_0). \tag{13}$$

Теперь покажем, что если $\lim_{\delta\to 0} \mu_f^k(\delta)_{\infty\infty} = 0$, то функция $s_{f,k}(x)$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in R^n$. В неравенстве (11) положим $x_1 = x,\ x \in K(x_0,\delta) := \big\{ x \in R^n : |x - x_0| < \delta \big\}$, и перейдем к пределу при $r \to 0$. Тогда получим

$$\left| s_{f,k}(x) - P_{k-1,B(x_0,\delta)} f(x) \right| \le C_1\, \mu_f^k(\delta)_{\infty\infty}, \quad x \in K(x_0,\delta).$$

Из последнего неравенства получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta'_\varepsilon > 0 \quad \forall \delta \in \big(0, \delta'_\varepsilon\big) \quad \forall x \in K(x_0,\delta):$$

$$\left| s_{f,k}(x) - P_{k-1,B(x_0,\delta)} f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{14}$$

Если зафиксировать число $r_\varepsilon \in (0, \delta'_\varepsilon)$, то

$$\exists \delta''_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in K\left(x_0, \delta''_\varepsilon\right):$$

$$\left| P_{k-1,B(x_0,r_\varepsilon)} f(x) - P_{k-1,B(x_0,r_\varepsilon)} f(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{15}$$

Пусть $\delta_\varepsilon = \min\{\delta''_\varepsilon, r_\varepsilon\}$. Тогда с помощью неравенств (14) и (15) получаем, что если $x \in \in K(x_0, \delta_\varepsilon)$, то

$$|s_{f,k}(x) - s_{f,k}(x_0)| \leq \left|s_{f,k}(x) - P_{k-1,B(x_0,r_\varepsilon)} f(x)\right| +$$

$$+ \left|P_{k-1,B(x_0,r_\varepsilon)} f(x) - P_{k-1,B(x_0,r_\varepsilon)} f(x_0)\right| + \left|P_{k-1,B(x_0,r_\varepsilon)} f(x_0) - s_{f,k}(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in K(x_0, \delta_\varepsilon): \left|s_{f,k}(x) - s_{f,k}(x_0)\right| < \varepsilon,$$

т. е. функция $s_{f,k}(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in R^n$. Равенство (13) показывает, что $f(x) = s_{f,k}(x)$ почти всюду в $R^n$.

Лемма доказана.

**Теорема 7.** *Пусть* $k \in N$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\varphi \in \Phi_k$. *Тогда* $M^{k,\varphi}_{\infty,\infty,\theta} = B^{k,\varphi}_{\infty,\theta}$ *и их нормы эквивалентны.*

***Доказательство.*** Из определения пространства $B^{k,\varphi}_{\infty,\theta}$ следует, что если $f \in B^{k,\varphi}_{\infty,\theta}$, то $f$ эквивалентна непрерывной функции. Кроме того, в силу леммы если $f \in L^{\infty}_{\text{loc}}(R^n)$ и $\lim_{r\to 0} \mu^k_f(r)_{\infty\infty} = 0$, то $f$ эквивалентна непрерывной функции. Поэтому функции из класса $M^{k,\varphi}_{\infty,\infty,\theta}$ тоже эквивалентны непрерывной функции. Из теорем 1 и 3 следует, что существуют положительные постоянные $c_1$, $c_2$ такие, что для любой $f \in L^\infty(R^n)$, эквивалентной непрерывной функции, имеет место соотношение

$$c_1\, \mu^k_f(r)_{\infty\infty} \leq \omega^k_f(r)_\infty \leq c_2\, \mu^k_f(r)_{\infty\infty}, \quad r > 0.$$

Отсюда следует справедливость теоремы 7.

## Литература


1. *Брудный Ю. А.* Пространства, определяемые с помощью локальных аппроксимаций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1971. – **24**. – С. 69 – 132.
2. *Campanato S.* Proprieta di hölderianita di alcune classi di funzioni // Ann. Scuola norm. super. Pisa. – 1963. – **17**. – P. 175 – 188.
3. *Campanato S.* Proprieta di una famiglia di spazi funzionali // Ann. Scuola norm. super. Pisa. – 1964. – **18**. – P. 137 – 160.
4. *DeVore R., Sharpley R.* Maximal functions measuring smoothness // Mem. Amer. Math. Soc. – 1984. – **47**, № 293. – P. 1 – 115.
5. *Dorronsoro J. R.* Mean oscillation and Besov spaces // Can. Math. Bull. – 1985. – **28**, № 4. – P. 474 – 480.
6. *Gol'dman M. L.* A criterion of imbedding for different metrics for isotropic Besov spaces with general moduli of continuity // Proc. Steklov Inst. Math. – 1994. – **201**. – P. 155 – 181.
7. *Grevholm B.* On the structure of the spaces $L^{p,\lambda}_k$ // Math. Scand. – 1970. – **26**. – P. 241 – 254.
8. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Communs Pure and Appl. Math. – 1961. – **14**. – P. 415 – 426.
9. *Meyers G. N.* Mean oscillation over cubes and Hölder continuity // Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – **15**. – P. 717 – 721.
10. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
11. *Peetre J.* On the theory of $L_{p,\lambda}$ spaces // J. Funct. Anal. – 1969. – **4**. – P. 71 – 87.
12. *Rzaev R. M.* On some properties of Riesz potentials in terms of the higher order mean oscillation // Proc. Inst. Math. Mech. Nat. Acad. Sci. Azerb. – 1996. – **4**. – P. 89 – 99.
13. *Rzaev R. M.* On boundedness of multidimensional singular integral operator in spaces $BMO^k_{\varphi,\theta}$ and $H^k_{\varphi,\theta}$ // Proc. Azerb. Math. Soc. – 1996. – **2**. – P. 164 – 175.

14. *Рзаев Р. М.* Многомерный сингулярный интегральный оператор в пространствах, определяемых условиями на среднюю осцилляцию $k$-го порядка // Докл. АН. – 1997. – **356**, № 5. – С. 602 – 604.
15. *Rzaev R. M.* On some maximal functions, measuring smoothness, and metric characteristics // Trans. Nat. Acad. Sci. Azerb. – 1999. – **19**, № 5. – P. 118 – 124.
16. *Rzaev R. M.* Inequalities for some metric characteristics // Trans. Nat. Acad. Sci. Azerb. – 2003. – **23**, № 1. – P. 173 – 180.
17. *Rzaev R. M.* Properties of singular integrals in terms of maximal functions measuring smoothness // Eurasian Math. J. – 2013. – **4**, № 3. – P. 107 – 119.
18. *Rzaev R. M., Aliyev F. N.* Riesz potentials in spaces defined by conditions on local oscillations of functions // Trans. Nat. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Techn. Math. Sci. – 2015. – **35**, № 1. – P. 87 – 95.
19. *Rzaev R. M., Aliyeva L. R.* On local properties of functions and singular integrals in terms of the mean oscillation // Cent. Eur. J. Math. – 2008. – **6**, № 4. – P. 595 – 609.
20. *Sarason D.* Functions of vanishing mean oscillation // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – **207**. – P. 391 – 405.
21. *Sharpley R., Shim Y.-S.* Singular integrals on $C_p^{\alpha}$ // Stud. Math. – 1989. – **92**, № 3. – P. 285 – 293.
22. *Spanne S.* Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes // Ann. Scuola norm. super. Pisa. – 1965. – **19**. – P. 593 – 608.
23. *Spanne S.* Sur l'interpolation entre les espaces $L_k^{p\Phi}$ // Ann. Scuola norm. super. Pisa. – 1966. – **20**. – P. 625 – 648.
24. *Stein E. M.* Singular integrals and differentiability properties of functions. – Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1970.
25. *Triebel H.* Local approximation spaces // Z. Anal. und Anwend. – 1989. – **8**, № 3. – S. 261 – 288.

Получено 04.06.16,
после доработки — 31.03.17