УДК 517.968.72

Х. А. Хачатрян (Ин-т математики НАН Армении, Ереван),
Ц. Э. Терджян (Нац. аграр. ун-т, Ереван, Армения),
Т. Г. Сардарян (Ин-т математики НАН Армении, Ереван)

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА НА ПОЛУОСИ*

We study the problems of construction of positive summable and bounded solutions for the systems of nonlinear Hammerstein-type integral equations with difference kernels on the semiaxis. The indicated systems have direct applications to the kinetic theory of gases, the theory of radiation transfer in spectral lines, and the theory of nonlinear Ricker competition models for running waves.

Досліджуються питання побудови додатних сумовних і обмежених розв'язків для систем нелінійних інтегральних рівнянь Гаммерштейна з різницевими ядрами на півпрямій. Указані системи мають безпосередні застосування в кінетичній теорії газів, теорії перенесення випромінювання у спектральних лініях, теорії нелінійних конкуренційних систем Ріккера для біжучих хвиль.

1. Введение. Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна

$$\varphi_i(x) = \int_0^\infty K_i(x-t)H_i(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t))dt, \qquad i=1,2,\ldots,n, \quad x \geq 0, \tag{1.1}$$

относительно измеримой вектор-функции $\varphi(x) = (\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x))^T$, где T — знак транспонирования. Существует ряд нелинейных граничных задач для систем дифференциальных уравнений n-го порядка, которые сводятся к матричным нелинейным интегральным уравнениям Гаммерштейна вида (1.1) (см. [1] и приведенную там библиографию). Указанные системы также могут быть применены в кинетической теории газов, в теории нелинейных конкуренционных систем Риккера для бегущих волн и в теории переноса излучения в спектральных линиях (см. [2–6]).

Ядра $\{K_i(x)\}_{i=1}^n$ — определенные на множестве $\mathbb{R}$ суммируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$K_i(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} K_i(x)dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|K_i(x)dx < +\infty, \tag{1.2}$$

$$K_i \in L_\infty(\mathbb{R}), \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{1.3}$$

Функции $\{H_i(t,z_1,z_2,\ldots,z_n)\}_{i=1}^n$ определены на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, принимают вещественные значения, удовлетворяют условию

$$H_i(t,0,0,\ldots,0) = 0, \qquad i=1,2,\ldots,n, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

и некоторым дополнительным условиям (см. формулировку основного результата).

Первоначальные результаты исследований скалярных интегральных уравнений Гаммерштейна были получены в 20-х годах прошлого столетия в пионерских работах П. С. Урысона и А. Гаммерштейна (см. [7–8]). Затем в 50-х годах XX века начались систематические исследования некоторых классов скалярных нелинейных интегральных уравнений в работах М. А. Красносельского и его учеников. В частности, в работах М. А. Красносельского, П. П. Забрейко,

* Выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-1A033.

В. Я. Стеценко и Е. И. Пустыльника получены различные необходимые и достаточные условия, обеспечивающие компактность интегральных операторов Гаммерштейна (см. [9 – 13]). С помощью этих результатов при некоторых ограничениях на нелинейность в указанных работах доказаны теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений с операторами Гаммерштейна. Аналогичные вопросы исследовались на Западе научной школой Ф. Браудера (см. [14, 15] и приведенную в них библиографию). Однако в этих работах существенную роль сыграла компактность оператора Гаммерштейна, а в некоторых случаях также и ограниченность области интегрирования.

Основные трудности изучения нелинейных скалярных или матричных интегральных уравнений типа (1.1) обусловлены тем, что соответствующий нелинейный интегральный оператор Гаммерштейна в пространствах $L_p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p \leq +\infty$, некомпактен, имеет свойство критичности, а область интегрирования неограничена. Поэтому в настоящее время не существует общей операторной теории построения неподвижных положительных точек для таких уравнений. Однако в некоторых частных случаях система (1.1) и ее скалярные аналоги исследовались в работах [5, 16 – 20].

Например, в работе [5] система (1.1) исследовалась в случае, когда $n = 2$, $H_i(t, z_1, z_2) = z_i e^{u_i - z_i - v_i z_{3-i}}$,

$$K_i(\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi d_i}} e^{-\frac{\tau^2}{4d_i}}, \qquad u_i, v_i, d_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

В работе [16] система (1.1) была изучена в случае, когда

$$H_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(z_j - \omega_j(t, z_j)),$$

где

$$c_{ij} > 0, \quad \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \leq 1, \quad \omega_j(t, u) \downarrow \quad \text{по} \quad u, \quad 0 \leq \omega_j(t, u) \leq \omega_j^0(t + u),$$

$$\omega_j^0 \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C_0(\mathbb{R}^+), \qquad m_1(\omega_j^0) \equiv \int_0^{+\infty} x \omega_j^0(x)\, dx < +\infty, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

а ядро удовлетворяло условиям (1.2), (1.3) и некоторым техническим условиям. Отметим, что скалярное интегральное уравнение Гаммерштейна на полуоси с четным консервативным ядром и нелинейностью вида $z - \omega(z)$, $\omega \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C_0(\mathbb{R}^+)$, исследовалось в работе [17]. В работе [18] исследовалось скалярное нелинейное интегральное уравнение на полуоси с оператором Гаммерштейна, причем функции, описывающие нелинейность, кроме некоторых технических условий, удовлетворяют также условию типа Гельдера – Липшица по второму аргументу. В работе [19] изучены вопросы разрешимости в пространстве $L_1(0, +\infty)$ уравнения (1.1) в случае, когда $n = 1$. В этой статье рассматривался подход к исследованию соответствующего скалярного интегрального уравнения, аналогичный используемому в настоящей работе. В работе [20] рассматривались нелинейные интегральные уравнения с некомпактным оператором и компактной областью интегрирования. Работа [21] посвящена вопросу разрешимости некоторых систем нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна – Немыцкого на всей прямой.

В настоящей статье при некоторых ограничениях на функции $\{H_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\}_{i=1}^n$ доказано существование покомпонентно положительного решения системы (1.1) в пространстве

$$\mathfrak{M} \equiv \Big\{\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))^T, \ \varphi_j \in L_1^0(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+), j = 1, 2, \ldots, n\Big\},$$

где $L_1^0(\mathbb{R}^+)$ — пространство суммируемых функций на $\mathbb{R}^+$ с нулевым пределом в $+\infty$.

Полученные результаты проиллюстрированы примерами функций $\{H_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\}_{i=1}^n$, удовлетворяющих условиям сформулированных теорем.

2. Обозначения и вспомогательные факты. ***2.1. Параметры $\{p_i\}_{i=1}^n$.*** Введем следующие функции, определенные на $\mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty)$:

$$\chi_i(p) = \int_0^\infty K_i(x) e^{-px}\, dx, \qquad p \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\gamma_i \equiv \int_0^\infty K_i(x)\, dx > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Тогда с учетом (1.2), (2.2) из (2.1) будем иметь

$$\chi_i \in C(\mathbb{R}^+), \quad \chi_i(p) \downarrow \quad \text{по} \quad p \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^+, \qquad \chi_i(0) = \gamma_j > 0, \quad \chi_i(+\infty) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, по теореме Больцано – Коши (см. [22]) для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ существует такое $p_i > 0$ (причем единственное), что

$$\chi_i(p_i) = \frac{\gamma_i}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.3}$$

2.2. Об одной системе линейных интегральных уравнений Винера – Хопфа. Пусть $\big\{\beta_i(x)\big\}_{i=1}^n$ — определенные на множестве $\mathbb{R}^+$ положительные измеримые функции, имеющие следующие свойства:

$$\beta_i \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+), \qquad m_1(\beta_i) \equiv \int_0^\infty x\beta_i(x)\, dx < +\infty, \tag{2.4}$$

$$\lim_{x\to\infty} \beta_i(x) = 0, \quad \beta_i(x) \geq \frac{2}{\gamma_i} e^{-p_i x}, \qquad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Пусть, далее, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$ — примитивная матрица с единичным спектральным радиусом $\mathbf{r}(A) = 1$ ($\mathbf{r}(A)$ — модуль максимального по модулю собственного значения матрицы A). Тогда, согласно теореме Перрона – Фробениуса (см. [23]), существует вектор

$$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)^T$$

с положительными координатами $\{\zeta_i\}_{i=1}^n$, $\zeta_i > 0$, такой, что

$$A\zeta = \zeta. \tag{2.6}$$

Введем в рассмотрение систему неоднородных интегральных уравнений Винера – Хопфа

$$f_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\infty} \tilde{K}_{ij}(x-t) f_j(t)\, dt, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.7}$$

относительно измеримой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$, где

$$g_i(x) = \int_0^{\infty} K_i(x-t) \beta_i(t)\, dt, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.8}$$

$$\tilde{K}_{ij}(x) = a_{ij} K_i(x), \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия* (1.2), (1.3), (2.4), (2.5). *Тогда если* $K_i(-\tau) > K_i(\tau)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\tau \in (0, +\infty)$, *то система* (2.7) *имеет положительное решение*

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T, \quad f_i(x) > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

причем

а) $f_i \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$,

б) $\lim_{x\to+\infty} f_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

в) $f_i(x) \geq e^{-p_i x}$, $i = 1, 2, \ldots n$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Доказательство. Сначала заметим, что:

1) $g_i \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$,

2) $m_1(g_i) < +\infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

3) $\lim_{x\to\infty} g_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Действительно, поскольку $\lim_{x\to\infty} \beta_i(x) = 0$, а ядра $\{K_i(x)\}_{i=1}^n$ удовлетворяют условиям (1.2) и (1.3), то включение из п. 1 непосредственно следует из представления (2.8), а формула из п. 3 является следствием известных предельных соотношений операции свертки (см. [24, с. 61], лемма 5). Докажем, что $m_1(g_i) < +\infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$. С этой целью, учитывая (1.2), (1.3), (2.4) и (2.5), для произвольного $\rho > 0$ оцениваем интеграл

$$\int_0^{\rho} x g_i(x)\, dx = \int_0^{\rho} x \int_0^{\infty} K_i(x-t)\beta_i(t)\, dt\, dx = \int_0^{\infty} \beta_i(t) \int_0^{\rho} K_i(x-t) x\, dx\, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \beta_i(t) \int_{-t}^{\rho-t} K_i(y)(t+y)\, dy\, dt \leq m_1(\beta_i) + \int_0^{\infty} \beta_i(t)\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} |y| K_i(y)\, dy < +\infty,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Так как $\rho > 0$ — произвольное число, то отсюда следует, что $m_1(g_i) < +\infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Поскольку $\mathbf{r}(A) = 1$, то из (1.2) и (2.9) получаем

$$\mathbf{r}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{K}(x) dx \right) = \mathbf{r}(A) = 1, \tag{2.10}$$

где

$$\tilde{K}(x) = \left(\tilde{K}_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{n}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.11}$$

— матричное ядро системы (2.7). С другой стороны,

$$\nu(\tilde{K}_{ij}) = a_{ij} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x K_i(x)\, dx = a_{ij} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} x K_i(x) dx + \int\limits_{0}^{+\infty} K_i(x) x\, dx \right) < 0, \tag{2.12}$$

ибо $K_i(-\tau) > K_i(\tau),\ \tau \in (0, +\infty),\ i = 1, 2, \ldots, n.$

Следовательно, система (2.7) имеет покомпонентно положительное решение в пространстве $L_1(\mathbb{R}^+)$ (см. [25, с. 216], теорема 8.3 при $n = 1$). Но так как $K_i \in L_\infty(\mathbb{R})$, а свободные члены g_i имеют свойства 1 – 3, то из (2.7) следует также, что $f_i \in L_\infty(\mathbb{R}^+)$. С другой стороны, на основании леммы 5 из работы [24] заключаем, что $f_i \in L_1^0(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+),\ i = 1, 2, \ldots, n.$ Для завершения доказательства леммы осталось убедиться в справедливости оценки в). Действительно, с учетом (2.5) из (2.7) имеем

$$f_i(x) \geq g_i(x) \geq \frac{2}{\gamma_i} \int\limits_{0}^{\infty} K_i(x-t) e^{-p_i t} dt = \frac{2}{\gamma_i} e^{-p_i x} \int\limits_{-\infty}^{x} K_i(t) e^{p_i t} dt \geq$$

$$\geq \frac{2}{\gamma_i} e^{-p_i x} \int\limits_{-\infty}^{0} K_i(t) e^{p_i t} dt = \frac{2}{\gamma_i} e^{-p_i x} \int\limits_{0}^{\infty} K_i(-\tau) e^{-p_i \tau} d\tau \geq$$

$$\geq \frac{2}{\gamma_i} e^{-p_i x} \int\limits_{0}^{\infty} K_i(\tau) e^{-p_i \tau} d\tau = \frac{2}{\gamma_i} e^{-p_i x} \chi_i(p_i) = e^{-p_i x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Лемма 2.1 доказана.

2.3. Об одной системе однородных интегральных уравнений Винера – Хопфа. Рассмотрим систему однородных интегральных уравнений Винера – Хопфа

$$S_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{0}^{\infty} \tilde{K}_{ij}(x-t) S_j(t)\, dt, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.13}$$

с нормировочным условием

$$S_i(0) = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.14}$$

В (2.13) предполагается, что ядерные функции $\{K_i(x)\}_{i=1}^{n}$ удовлетворяют условиям (1.2), (1.3), причем

$$K_i(-\tau) > K_i(\tau), \qquad \tau \in (0, +\infty), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.15}$$

Тогда, как известно (см. [26, с. 235], теорема 14.3), задача (2.13), (2.14) имеет покомпонентно положительное монотонно возрастающее и существенно ограниченное решение $S(x) = \left(S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x)\right)^T$. Очевидно, что

$$\eta = \delta\zeta = (\delta\zeta_1, \delta\zeta_2, \ldots, \delta\zeta_n)^T, \qquad \delta \equiv \max_{1\le i\le n} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^+} S_i(x)}{\zeta_i}, \tag{2.16}$$

также является собственным вектором для матрицы A, соответствующим собственному значению $\lambda = \mathbf{r}(A) = 1$:

$$A\eta = \eta. \tag{2.17}$$

Покажем, что

$$\eta_j \ge e^{-p_j t}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Действительно, с учетом (2.14) и леммы 2.1 из (2.16) имеем

$$\eta_j = \delta\zeta_j \ge \sup_{x\in\mathbb{R}^+} S_j(x) \ge S_j(x) \ge f_j(x) \ge g_j(x) \ge e^{-p_j x}, \qquad x \in \mathbb{R}^+, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

2.4. Построение мажорирующих функций для $H_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Рассмотрим последовательность функций $\{Q_j(z)\}_{j=1}^n$, определенных на $\mathbb{R}$ и имеющих следующие свойства:

A$_1$) $Q_j(z) \uparrow$ по на $[0, \eta_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

A$_2$) $Q_j(0) = 0$, $Q_j(\eta_j) = \eta_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

A$_3$) функции $Q_j(z)$ удовлетворяют условиям Липшица на отрезке $[0, \eta_j]$, т. е. для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ существует такое число $L_j > 0$, что для любых z^j, $\tilde{z}^j \in [0, \eta_j]$ выполняется неравенство

$$\left|Q_j(z^j) - Q_j(\tilde{z}^j)\right| \le L_j |z^j - \tilde{z}^j|.$$

Следующая лемма будет играть ключевую роль в ходе дальнейших рассуждений.

Лемма 2.2. *Для каждого* $\alpha \in \left(0, \min\left(1, \dfrac{1}{\max_{1\le j\le n} L_j}\right)\right) \equiv I$ *функции* $\tilde{Q}_j(z) = \eta_j - \alpha Q_j(\eta_j - z)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *имеют следующие свойства*:

B$_1$) $\tilde{Q}_j(z) \uparrow$ *по* z *на* $[0, \eta_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

B$_2$) $\tilde{Q}_j(0) > 0$, $\tilde{Q}_j(\eta_j) = \eta_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

B$_3$) *для любых* z^j, $\tilde{z}^j \in [0, \eta_j]$ *имеют место неравенства*

$$\left|\tilde{Q}_j(z^j) - \tilde{Q}_j(\tilde{z}^j)\right| \le \alpha^* |z^j - \tilde{z}^j|, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\alpha^* \equiv \alpha \max_{1\le j\le n} L_j \in (0, 1)$,

B$_4$) *справедливы оценки снизу*

$$\tilde{Q}_j(z) \ge z, \qquad z \in [0, \eta_j], \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Утверждения B$_1$) – B$_3$) легко проверяемы. Докажем утверждение B$_4$). Рассмотрим функции

$$W_j(z) \equiv \tilde{Q}_j(z) - z, \qquad z \in [0, \eta_j], \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Имеем

$$W_j(0) = \tilde{Q}_j(0) = (1 - \alpha)\eta_j > 0, \quad \text{ибо} \quad \alpha \in I, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$W_j(\eta_j) = \tilde{Q}_j(\eta_j) - \eta_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$W_j \in C[0, \eta_j], \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Убедимся, что $W_j(z) \downarrow$ по z на $[0, \eta_j]$. Пусть $u_1^j, u_2^j \in [0, \eta_j]$, $u_1^j > u_2^j$ — произвольные числа. Тогда

$$W_j(u_1^j) - W_j(u_2^j) = u_2^j - u_1^j + \alpha(Q_j(\eta_j - u_2^j) - Q_j(\eta_j - u_1^j)) \leq$$
$$\leq u_2^j - u_1^j + \alpha L_j(u_1^j - u_2^j) = (\alpha L_j - 1)(u_1^j - u_2^j) < 0,$$

ибо $\alpha \in I$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно,

$$W_j(z) \geq 0, \quad z \in [0, \eta_j], \quad \text{т. е.} \quad \tilde{Q}_j(z) \geq z, \quad z \in [0, \eta_j], \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Лемма 2.2 доказана.

Теперь можно сформулировать основной результат настоящей работы.

3. Основной результат. ***3.1. Формулировка теоремы.*** Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть вещественнозначные функции* $\{H_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\}_{i=1}^n$ *удовлетворяют следующим условиям*:

a$_1$) *при каждом фиксированном* $t \in \mathbb{R}^+$ *функции* $\{H_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\}_{i=1}^n \uparrow$ *по* z_j *на отрезке* $[e^{-p_j t}, \eta_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *где числа* $\{p_i\}_{i=1}^n$ *определяются в соответствии с равенством* (2.3);

a$_2$) *функции* $\{H_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\}_{i=1}^n$ *удовлетворяют многомерному условию Каратеодори на множестве* $\Omega_\eta \equiv \mathbb{R}^+ \times [0, \eta_1] \times [0, \eta_2] \times \ldots \times [0, \eta_n]$ *по совокупности аргументов* $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in [0, \eta_1] \times [0, \eta_2] \times \ldots \times [0, \eta_n]$, *т. е. при каждом* $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in [0, \eta_1] \times \times [0, \eta_2] \times \ldots \times [0, \eta_n]$ *функции* $\{H_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\}_{i=1}^n$ *измеримы по аргументу* $t \in \mathbb{R}^+$ *и почти при всех* $t \in \mathbb{R}^+$ *эти функции непрерывны по совокупности аргументов* $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *на множестве* $[0, \eta_1] \times [0, \eta_2] \times [0, \eta_n]$;

a$_3$) *выполняются неравенства*

$$H_i(t, e^{-p_1 t}, e^{-p_2 t}, \ldots, e^{-p_n t}) \geq \frac{2}{\gamma_i} e^{-p_i t}, \qquad t \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

a$_4$) *существуют число* $\alpha \in I$, *функции* $\{\beta_i(t)\}_{i=1}^n$, *со свойствами* (2.4), (2.5) *и примитивная матрица* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n \times n}$ *с* $r(A) = 1$ *такие, что*

$$H_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n) \leq \alpha \sum_{j=1}^n a_{ij} Q_j(z_j) + \beta_i(t),$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad z_j \in [e^{-p_j t}, \eta_j], \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда при условиях (1.2), (1.3) *и* (2.15) *система* (1.1) *имеет покомпонентно положительное решение в* $\mathfrak{M}$.

3.2. Доказательство теоремы. Доказательство разобьем на несколько шагов.

Шаг 1 (вспомогательная система нелинейных уравнений Гаммерштейна). Рассмотрим вспомогательную систему нелинейных уравнений Гаммерштейна

$$\psi_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \tilde{K}_{ij}(x - t) \tilde{Q}_j(\psi_j(t) - f_j(t)) dt + \phi_i(x), \qquad x \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (3.1)$$

относительно искомой вектор-функции $\psi(x) = \big(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)\big)^T$, где $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$ — положительное ограниченное и суммируемое решение системы (2.7) (см. лемму 2.1), а

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty \tilde{K}_{ij}(x-t) f_j(t)dt, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \geq 0. \tag{3.2}$$

Введем следующие итерации:

$$\begin{gathered} \psi_i^{(m+1)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty \tilde{K}_{ij}(x-t) \tilde{Q}_j(\psi_j^{(m)}(t) - f_j(t))dt + \phi_i(x), \\ i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \geq 0, \qquad \psi_i^{(0)}(x) = S_i(x), \quad m = 0, 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Докажем, что

$$\begin{gathered} \psi_i^{(m)}(x) \ \uparrow \ \text{по } m, \\ \psi_i^{(m)}(x) \leq \eta_i + f_i(x), \\ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad x \geq 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Сначала докажем монотонность по m. В силу леммы 2.2 с учетом (2.7), (2.13) и того, что $0 \leq S_i(x) - f_i(x) \leq \eta_i$, $x \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, \ldots, n$, будем иметь

$$\psi_i^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty \tilde{K}_{ij}(x-t) \tilde{Q}_j(S_j(t) - f_j(t))dt + \phi_i(x) \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty \tilde{K}_{ij}(x-t)(S_j(t) - f_j(t))dt + \phi_i(x) = S_i(x) = \psi_i^{(0)}(x).$$

С другой стороны, $\psi_i^{(0)}(x) \leq \sup_{x\geq 0} S_i(x) \leq \delta\zeta_i \leq \eta_i + f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Заметим также, что $0 \leq \psi_i^{(1)}(x) - f_i(x) \leq \eta_i$. Действительно, в силу (2.17) имеем

$$\psi_i^{(1)}(x) - f_i(x) \geq S_i(x) - f_i(x) \geq 0,$$

$$\psi_i^{(1)}(x) - f_i(x) \leq \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty \tilde{K}_{ij}(x-t) \tilde{Q}_j(\eta_j)dt + \phi_i(x) - f_i(x) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j + \phi_i(x) - f_i(x) \leq \eta_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Предполагая, что $\psi_i^{(m)}(x) \geq \psi_i^{(m-1)}(x)$, $\psi_i^{(m)}(x) \leq \eta_i + f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, при некотором $m \in \mathbb{N}$ с учетом леммы 2.2, (2.7) и (2.13) получаем

$$\psi_i^{(m+1)}(x) \geq \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty \tilde{K}_{ij}(x-t) \tilde{Q}_j\big(\psi_j^{(m-1)}(t) - f_j(t)\big)\, dt + \phi_i(x) = \psi_i^{(m)}(x)$$

и

$$\psi_i^{(m+1)}(x) \leq \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty \tilde{K}_{ij}(x-t)\tilde{Q}_j(\eta_j)dt + \phi_i(x) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j + \phi_i(x) = \eta_i + \phi_i(x) \leq \eta_i + f_i(x).$$

Следовательно, последовательность вектор-функций $\psi^{(m)}(x) = \big(\psi_1^{(m)}(x), \psi_2^{(m)}(x), \ldots$ $\ldots, \psi_n^{(m)}(x)\big)^T$, $m = 0, 1, 2, \ldots,$ имеет поточечный предел при $m \to \infty$, причем в силу леммы 2.2 и предельной теоремы Б. Леви предельная вектор-функция $\psi(x) = \big(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ $\ldots, \psi_n(x)\big)^T$, $\psi_i(x) = \lim_{m\to\infty} \psi_i^{(m)}(x)$, удовлетворяет системе (3.1). Из (3.3) и (3.2) получаем также следующую двустороннюю оценку для $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^n$:

$$S_i(x) \leq \psi_i(x) \leq \eta_i + f_i(x), \qquad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Ниже докажем, что

$$\eta_i + f_i - \psi_i \in L_1^0(\mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Шаг 2 (доказательство включения (3.6)). С этой целью рассмотрим следующую вспомогательную неоднородную систему Гаммерштейна:

$$F_i(x) = \tilde{g}_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty \tilde{K}_{ij}(x-t)\big(\eta_j - \tilde{Q}_j(\eta_j - F_j(t))\big)\,dt, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.7}$$

где

$$\tilde{g}_i(x) = \eta_j \int_x^\infty K_i(t)\,dt + g_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.8}$$

Введем последовательные приближения

$$F_i^{(m+1)}(x) = \tilde{g}_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty \tilde{K}_{ij}(x-t)\big(\eta_j - \tilde{Q}_j(\eta_j - F_j^{(m)}(t))\big)\,dt, \qquad F_i^{(0)}(x) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.9}$$

Индукцией по m можно доказать, что:

C$_1$) $F_i^{(m)} \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $m = 0, 1, 2, \ldots,$ $i = 1, 2, \ldots, n$,

C$_2$) $F_i^{(m)}(x) \uparrow$ по m,

C$_3$) $\int_0^\infty F_i^{(m)}(x)\,dx \leq \eta_i \max_{1\leq i\leq n} \|\tilde{g}_i\|_{L_1(\mathbb{R}^+)}(1-\alpha^*)^{-1}$, $m = 0, 1, 2, \ldots,$ $i = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha^* = \alpha \max_{1\leq j\leq n} L_j$, C$_4$) $F_i^{(m)}(x) \le \eta_i - S_i(x) + f_i(x),\ x \in \mathbb{R}^+,\ m = 0,1,2,\ldots,\ i = 1,2,\ldots,n.$

Утверждения C$_1$)–C$_3$) проверяются стандартными методами. Докажем утверждение C$_4$). В случае $m = 0$ утверждение C$_4$) является следствием неравенства (3.5). Пусть $F_i^{(m)}(x) \le \le \eta_i - S_i(x) + f_i(x),\ i = 1,2,\ldots,n,\ x \in \mathbb{R}^+$, при некотором $m \in \mathbb{N}$. Тогда в силу леммы 2.2 и соотношения (2.17) из (3.9) получаем

$$F_i^{(m+1)}(x) \le \eta_i \int\limits_x^\infty K_i(t)dt + g_i(x) + \sum_{j=1}^n \int\limits_0^\infty \tilde{K}_{ij}(x-t)(\eta_j - \tilde{Q}_j(S_j(t) - f_j(t)))dt =$$

$$= \eta_i \int\limits_x^\infty K_i(t)dt + \sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j \int\limits_{-\infty}^x K_i(t)dt + g_i(x) - \sum_{j=1}^n \int\limits_0^\infty \tilde{K}_{ij}(x-t)\tilde{Q}_j(S_j(t) - f_j(t))dt \le$$

$$\le \eta_i + g_i(x) - \sum_{j=1}^n \int\limits_0^\infty \tilde{K}_{ij}(x-t)(S_j(t) - f_j(t))dt = \eta_i + g_i(x) - S_i(x) + \phi_i(x) =$$

$$= \eta_i - S_i(x) + f_i(x), \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Из утверждений C$_1$)–C$_4$) следует, что система (3.7) имеет покомпонентно положительное суммируемое и существенно ограниченное решение, являющееся поточечным пределом последовательности $\{F^{(m)}(x)\}_{m=0}^\infty$, $F^{(m)}(x) = \left(F_1^{(m)}(x), F_2^{(m)}(x), \ldots, F_n^{(m)}(x)\right)^T$ при $m \to \infty$. Так как $F_i(x) = \lim_{m\to\infty} F_i^{(m)}(x) \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$, то из неравенств

$$0 \le F_i(x) \le \tilde{g}_i(x) + \sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha^* \int\limits_0^\infty K_i(x-t)F_j(t)\,dt, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

с учетом того, что

$$\lim_{x\to\infty} \tilde{g}_i(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \int\limits_0^\infty K_i(x-t)F_j(t)\,dt = 0$$

(последнее следует из известных свойств операций свертки (см. [24, с. 61], лемма 5), получаем $\lim_{x\to+\infty} F_i(x) = 0,\ i = 1,2,\ldots,n.$

Таким образом, мы доказали, что система (3.7) имеет положительное суммируемое и существенно ограниченное решение $F(x) = \left(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)\right)^T$, причем $\lim_{x\to\infty} F_i(x) = = 0,\ i = 1,2,\ldots,n$, и

$$0 \le F_i(x) \le \eta_i - S_i(x) + f_i(x) \le \eta_i, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Введем следующий класс измеримых вектор-функций:

$$\mathcal{P}_\eta \equiv \left\{\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))^T,\ 0 \le \varphi_i(t) \le \eta_i,\ t \in \mathbb{R}^+,\ i = 1,2,\ldots,n\right\}.$$

Очевидно, что $F \in \mathcal{P}_\eta$. Ниже докажем, что система (3.7) в классе $\mathcal{P}_\eta$ имеет единственное решение. Действительно, предположим обратное: существуют два разных решения $F, F^* \in \mathcal{P}_\eta$ системы (3.7). Тогда с учетом леммы 2.2 из (3.7) будем иметь

$$\frac{|F_i(x)-F_i^*(x)|}{\eta_i} \le \frac{\alpha^*}{\eta_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j \int\limits_0^\infty \frac{K_i(x-t)}{\eta_j}|F_j(t)-F_j^*(t)|dt \le$$

$$\le \frac{\alpha^*}{\eta_i} \max_{1\le j\le n} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \frac{|F_j(t)-F_j^*(t)|}{\eta_j}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j =$$

$$= \alpha^* \max_{1\le j\le n} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \frac{|F_j(t)-F_j^*(t)|}{\eta_j}, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Из полученного неравенства следует, что

$$(1-\alpha^*) \max_{1\le j\le n} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \frac{|F_j(t)-F_j^*(t)|}{\eta_j} \le 0. \tag{3.10}$$

Поскольку $\alpha^* \in (0,1)$, то из (3.10) заключаем, что $F_i(x) = F_i^*(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}^+$, $i = 1,2,\ldots,n$. Следовательно, система (3.7) в $\mathcal{P}_\eta$ имеет единственное решение. С другой стороны, непосредственной проверкой можно убедиться, что вектор-функция

$$(\eta_1-\psi_1+f_1, \eta_2-\psi_2+f_2, \ldots, \eta_n-\psi_n+f_n)^T \in \mathcal{P}_\eta$$

удовлетворяет системе (3.7). Действительно, с учетом (3.1) имеем

$$\tilde{g}_i(x) + \sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty \tilde{K}_{ij}(x-t)(\eta_j - \tilde{Q}_j(\psi_j(t)-f_j(t)))dt =$$

$$= \eta_i\int\limits_x^\infty K_i(t)dt + g_i(x) + \eta_i\int\limits_{-\infty}^x K_i(t)dt - (\psi_i(x)-\phi_i(x)) =$$

$$= \eta_i + g_i(x) - \psi_i(x) + \phi_i(x) = \eta_i - \psi_i(x) + f_i(x), \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Так как $\eta-\psi+f \in \mathcal{P}_\eta$, то из вышеизложенного заключаем, что

$$\eta-\psi+f \in \mathfrak{M},$$

т. е. включение (3.6) доказано.

Шаг 3 (сходимость последовательных приближений для основной системы (1.1)). Рассмотрим специальные последовательные приближения

$$\begin{gathered}\varphi_i^{(m+1)}(x) = \int\limits_0^\infty K_i(x-t)H_i\big(t, \varphi_1^{(m)}(t), \varphi_2^{(m)}(t), \ldots, \varphi_n^{(m)}(t)\big)\,dt, \\ \varphi_i^{(0)}(x) = e^{-p_i x}, \qquad i=1,2,\ldots,n, \quad m=0,1,2,\ldots, \quad x\in\mathbb{R}^+,\end{gathered} \tag{3.11}$$

где числа $\{p_i\}_{i=1}^n$ определяются в соответствии с равенством (2.3).

Индукцией по m можно доказать, что:

D$_1$) $\varphi_i^{(m)}(x) \uparrow$ по m, $i=1,2,\ldots,n$,

D$_2$) $\varphi_i^{(m)}(x) \le \eta_i - \psi_i(x) + f_i(x)$, $i=1,2,\ldots,n$, $m=0,1,2,\ldots$, $x\in\mathbb{R}^+$.

Действительно, в случае $m = 0$ неравенства в условии D$_2$) непосредственно следуют из цепочки неравенств

$$\eta_i - \psi_i(x) + f_i(x) \geq \tilde{g}_i(x) \geq g_i(x) \geq \frac{2}{\gamma_i} \int\limits_0^\infty K_i(x-t) e^{-p_i t}\, dt \geq e^{-p_i x},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Ниже докажем, что $\varphi_i^{(1)}(x) \geq \varphi_i^{(0)}(x)$. В силу условия a$_3$) теоремы 1 из (3.11) получаем

$$\varphi_i^{(1)}(x) = \int\limits_0^\infty K_i(x-t) H_i(t, e^{-p_1 t}, e^{-p_2 t}, \ldots, e^{-p_n t}) dt \geq$$

$$\geq \frac{2}{\gamma_i} \int\limits_0^\infty K_i(x-t) e^{-p_i t} dt \geq e^{-p_i x} = \varphi_i^{(0)}(x).$$

Теперь, предполагая, что $\varphi_i^{(m)}(x) \geq \varphi_i^{(m-1)}(x)$ и $\varphi_i^{(m)}(x) \leq \eta_i - \psi_i(x) + f_i(x)$ при некотором $m \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и учитывая условия a$_1$), a$_4$) теоремы 1, из (3.11) имеем

$$\varphi_i^{(m+1)}(x) \geq \int\limits_0^\infty K_i(x-t) H_i(t, \varphi_1^{(m-1)}(t), \varphi_2^{(m-1)}(t), \ldots, \varphi_n^{(m-1)}(t)) dt = \varphi_i^{(m)}(x)$$

и

$$\varphi_i^{(m+1)}(x) \leq \alpha \sum_{j=1}^n a_{ij} \int\limits_0^\infty K_i(x-t) Q_j(\eta_j - \psi_j(t) + f_j(t)) dt + g_i(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij} \int\limits_0^\infty K_i(x-t)(\eta_j - \tilde{Q}_j(\psi_j(t) - f_j(t))) dt + g_i(x) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j - (\psi_i(x) - \phi_i(x)) + g_i(x) = \eta_i + f_i(x) - \psi_i(x).$$

Таким образом, утверждения D$_1$) и D$_2$) полностью доказаны. Следовательно, последовательность вектор-функций $\varphi^{(m)}(x) = \left(\varphi_1^{(m)}(x), \varphi_2^{(m)}(x), \ldots, \varphi_n^{(m)}(x)\right)^T$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, имеет поточечный предел при $m \to \infty$:

$$\lim_{m \to \infty} \varphi_i^{(m)}(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

причем

$$e^{-p_i x} \leq \varphi_i(x) \leq \eta_i - \psi_i(x) + f_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.12}$$

Из теоремы Б. Леви и условия a$_2$) следует, что предельная вектор-функция $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))^T$ удовлетворяет системе (1.1). Так как

$$\eta - \psi + f \in \mathfrak{M},$$

то из (3.12) получаем, что $\varphi \in \mathfrak{M}$.

Теорема 3.1 доказана.

Замечание. В ходе доказательства теоремы 3.1 нами также получена двусторонняя оценка (3.12) для решения $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))^T$.

4. Примеры функций $\{H_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\}_{i=1}^n$. Теорема единственности для частного случая системы (1.1). Приведем примеры функций $\{H_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\}_{i=1}^n$, удовлетворяющих условиям a$_1$) – a$_4$), для иллюстрации полученного результата. Все условия теоремы 3.1 выполняются для класса функций

$$H_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n) = \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Q_j(z_j) + \frac{2(1+\varepsilon) z_i e^{-p_i t}}{\gamma_i (z_i + \varepsilon e^{-p_i t})}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число.

В этом случае в качестве функций $\{\beta_i(t)\}_{i=1}^n$ можно выбрать семейство

$$\beta_i(t) = \frac{2(1+\varepsilon)}{\gamma_i} e^{-p_i t}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Можно рассматривать более общий пример функций $\{H_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\}_{i=1}^n$:

$$H_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{\alpha}{lt^2 + 1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Q_j(z_j) + \frac{2(1+\varepsilon)^q z_i^q e^{-p_i t}}{\gamma_i (z_i + \varepsilon e^{-p_i t})^q}, \tag{4.1}$$

где $q \geq 1$, $l \geq 0$ — произвольные числа. Здесь в качестве функций $\{\beta_i(t)\}_{i=1}^n$ могут использоваться

$$\beta_i(t) = \frac{2(1+\varepsilon)^q}{\gamma_i} e^{-p_i t}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Отметим, что система (1.1) с нелинейностью (4.1) и ядром вида

$$K_i(\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi d_i}} e^{-\frac{(\tau+c)^2}{4d_i}}, \qquad \tau \in \mathbb{R}, \quad c \geq 0, \quad d_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

встречается в теории нелинейных конкуренционных систем Риккера (см. [5]).

В качестве функций $\{Q_j(z)\}_{j=1}^n$ могут использоваться, например, следующие:

a) $Q_j(z) = \dfrac{z^p}{\eta_j^{p-1}}$, $p > 1$,

b) $Q_j(z) = z + \dfrac{\eta_j}{\pi} \sin^2 \dfrac{\pi z}{\eta_j}$,

c) $Q_j(z) = 2z - \dfrac{z^2}{\eta_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ниже докажем, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ в случае, когда функции $\{H_i(t, z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_n)\}_{i=1}^n$ допускают представление (4.1), решение системы (1.1) единственно в следующем классе измеримых и существенно ограниченных вектор-функций:

$$\mathcal{L} = \{\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))^T, \ \eta_i \geq \varphi_i(x) \geq e^{-p_i x},$$
$$x \in \mathbb{R}^+, \ \varphi_i \in L_\infty(\mathbb{R}^+), \ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Рассмотрим нелинейную систему интегральных уравнений

$$\varphi_i(x) = \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int\limits_0^\infty \frac{K_i(x-t)}{(lt^2+1)} Q_j(\varphi_j(t))dt +$$
$$+\frac{2(1+\varepsilon)^q}{\gamma_i} \int\limits_0^\infty K_i(x-t) \frac{e^{-p_i t}\varphi_i^q(t)}{(\varphi_i(t)+\varepsilon e^{-p_i t})^q} dt, \tag{4.2}$$

$x \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, \ldots, n$, относительно $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))^T$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* (1.2), (1.3) *и* (2.15), *а* ε^* *— положительное решение характеристического уравнения*

$$(1+x)^{q-2}x + \frac{(\alpha^*-1)\gamma}{2q} = 0 \tag{4.3}$$

относительно x, *где*

$$\gamma \equiv \min_{1\le i\le n} \gamma_i, \qquad q \ge 1, \quad \alpha^* = \alpha \max_{1\le j\le n} L_j, \quad \alpha \in \left(0, \min\left(1, \frac{1}{\max_{1\le j\le n} L_j}\right)\right).$$

Тогда если $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, *то решение системы* (4.2) *единственно в классе вектор-функций* $\mathcal{L}$.

Доказательство. Предположим обратное: пусть система (4.2) имеет два разных решения $\varphi, \tilde\varphi \in \mathcal{L}$. Тогда из (4.2) будем иметь

$$\frac{|\varphi_i(x) - \tilde\varphi_i(x)|}{\eta_i} \le \frac{\alpha}{\eta_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int\limits_0^\infty K_i(x-t)|Q_j(\varphi_j(t)) - Q_j(\tilde\varphi_j(t))|dt +$$
$$+\frac{2(1+\varepsilon)^q}{\eta_i\gamma_i} \int\limits_0^\infty K_i(x-t)e^{-p_i t}\left|\frac{\varphi_i^q(t)}{(\varphi_i(t)+\varepsilon e^{-p_i t})^q} - \frac{\tilde\varphi_i^q(t)}{(\tilde\varphi_i(t)+\varepsilon e^{-p_i t})^q}\right| dt \le$$
$$\le \frac{\alpha}{\eta_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} L_j \int\limits_0^\infty K_i(x-t)|\varphi_j(t) - \tilde\varphi_j(t)|dt +$$
$$+\frac{2(1+\varepsilon)^q}{\eta_i\gamma_i} \int\limits_0^\infty K_i(x-t)e^{-p_i t}\left|\frac{\varphi_i^q(t)}{(\varphi_i(t)+\varepsilon e^{-p_i t})^q} - \frac{\tilde\varphi_i^q(t)}{(\tilde\varphi_i(t)+\varepsilon e^{-p_i t})^q}\right| dt \equiv$$
$$\equiv I_i(x) + J_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{4.4}$$

В силу формулы Лагранжа о конечных приращениях для слагаемого $J_i(x)$ получим оценку

$$J_i(x) \le \frac{2(1+\varepsilon)^q \varepsilon q}{\eta_i \gamma} \int\limits_0^\infty K_i(x-t) e^{-2p_i t} \frac{\Theta_i^{q-1}(t)}{(\Theta_i(t)+\varepsilon e^{-p_i t})^{q+1}} |\varphi_i(t) - \tilde\varphi_i(t)| dt,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$\eta_i \geq \Theta_i(t) \geq e^{-p_i t}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \qquad \Theta_i \in L_\infty(\mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.5}$$

Из (4.5) следует, что

$$\frac{\Theta_i^{q-1}(t)}{(\Theta_i(t) + \varepsilon e^{-p_i t})^{q+1}} \leq \frac{1}{(1+\varepsilon)^2 e^{-2p_i t}}, \qquad t \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.6}$$

Следовательно, с учетом (1.2), (4.6) имеем

$$\begin{aligned} J_i(x) &\leq \frac{2(1+\varepsilon)^{q-2}\varepsilon q}{\eta_i \gamma} \int\limits_0^\infty K_i(x-t)|\varphi_i(t) - \tilde{\varphi}_i(t)|dt \leq \\ &\leq \frac{2(1+\varepsilon)^{q-2}\varepsilon q}{\gamma} \max_{1\leq i\leq n} \sup_{t\geq 0} \frac{|\varphi_i(t) - \tilde{\varphi}_i(t)|}{\eta_i}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Для слагаемого $I_i(x)$ в силу (2.17) будем иметь

$$\begin{aligned} I_i(x) &\leq \frac{\alpha^*}{\eta_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j \int\limits_0^\infty K_i(x-t) \frac{|\varphi_j(t) - \tilde{\varphi}_j(t)|}{\eta_j} dt \leq \\ &\leq \frac{\alpha^*}{\eta_i} \max_{1\leq j\leq n} \sup_{t\geq 0} \frac{|\varphi_j(t) - \tilde{\varphi}_j(t)|}{\eta_j} \sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j = \\ &= \alpha^* \max_{1\leq i\leq n} \sup_{t\geq 0} \frac{|\varphi_i(t) - \tilde{\varphi}_i(t)|}{\eta_i}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

С использованием оценок (4.7) и (4.8) из (4.4) получим

$$\frac{|\varphi_i(x) - \tilde{\varphi}_i(x)|}{\eta_i} \leq \left(\alpha^* + \frac{2(1+\varepsilon)^{q-2}\varepsilon q}{\gamma}\right) \max_{1\leq i\leq n} \sup_{x\geq 0} \frac{|\varphi_i(x) - \tilde{\varphi}_i(x)|}{\eta_i}.$$

Из последнего неравенства следует также, что

$$\left(1 - \alpha^* - \frac{2(1+\varepsilon)^{q-2}\varepsilon q}{\gamma}\right) \max_{1\leq i\leq n} \sup_{x\geq 0} \frac{|\varphi_i(x) - \tilde{\varphi}_i(x)|}{\eta_i} \leq 0. \tag{4.9}$$

Поскольку $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, $q \geq 1$ и функция $(1+\varepsilon)^{q-2}\varepsilon \uparrow$ по ε, то из (4.9) и (4.3) получаем

$$1 - \alpha^* - \frac{2(1+\varepsilon)^{q-2}\varepsilon q}{\gamma} > 1 - \alpha^* - \frac{2(1+\varepsilon^*)^{q-2}\varepsilon^* q}{\gamma} = 0. \tag{4.10}$$

Таким образом, из (4.9) и (4.10) следует, что

$$\max_{1\leq i\leq n} \sup_{x\geq 0} \frac{|\varphi_i(x) - \tilde{\varphi}_i(x)|}{\eta_i} \leq 0.$$

Последнее возможно лишь тогда, когда $\varphi_i(t) = \tilde{\varphi}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, почти всюду на $\mathbb{R}^+$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Литература

1. *Jiafa Xu, Zhilin Yang.* Positive solutions for a system of n-th order nonlinear boundary value problems // Electron. J. Qual. Theory Different. Equat. – 2011. – **2011**, № 4. – P. 1 – 16.
2. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. – М.: Наука, 1967.
3. *Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А.* Качественные различия решений для одной модели уравнений Больцмана в линейном и нелинейном случаях // Теор. и мат. физика. – 2012. – **172**, № 3. – С. 497 – 504.
4. *Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А.* Качественные различия решений для стационарных модельных уравнений Больцмана в линейном и нелинейном случаях // Теор. и мат. физика. – 2014. – **180**, № 2. – С. 272 – 288.
5. *Li Kun, Li Xiong.* Asymptotic behavior and uniqueness of traveling wave solutions in Richer competition system // J. Math. Anal. and Appl. – 2012. – **389**, № 1. – P. 486 – 497.
6. *Енгибарян Н. Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. – 1966. – **2**, № 4. – С. 31 – 36.
7. *Урысон П. С.* Об одном типе нелинейных интегральных уравнений // Мат. сб. – 1923. – **31**, № 2. – С. 236 – 255.
8. *Hammerstein A.* Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen // Acta Math. – 1930. – **54**, № 1. – P. 117 – 176.
9. *Красносельский М. А., Ладыженский Л. А.* Условия полной непрерывности оператора П. С. Урысона, действующего в пространстве L^p // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1954. – **3**. – С. 307 – 320.
10. *Стеценко В. Я., Есаян А. Р.* Теоремы о положительных решениях уравнений второго рода с нелинейными операторами // Мат. сб. – 1965. – **68(110)**, № 4. – С. 473 – 486.
11. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Пространство Орлича и нелинейные интегральные уравнения // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1958. – **7**. – С. 63 – 120.
12. *Забрейко П. П., Пустыльник Е. И.* О непрерывности и полной непрерывности нелинейных интегральных операторов в пространствах L^p // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 2. – С. 204 – 205.
13. *Забрейко П. П., Красносельский М. А.* О разрешимости нелинейных операторных уравнений // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, № 3. – С. 42 – 44.
14. *Brezis H., Browder F. E.* Existence theorems for nonlinear integral equations of Hammerstein type // Bull. Amer. Math. Soc. – 1975. – **81**, № 1. – P. 73 – 78.
15. *Panchal C. D.* Existence theorems for equation of Hammerstein type // Quart. J. Math. – 1984. – **35**, № 3. – P. 311 – 319.
16. *Хачатрян Х. А.* О некоторых системах нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 4. – С. 552 – 566.
17. *Арабаджян Л. Г.* О существовании нетривиальных решений некоторых линейных и нелинейных уравнений типа свертки // Укр. мат. журн. – 1989. – **42**, № 12. – С. 1587 – 1595.
18. *Milojevic P. S.* A global description of solutions to nonlinear perturbations of the Wiener – Hopf integral equations // Electron. J. Different. Equat. – 2006. – **2006**, № 51. – P. 1 – 14.
19. *Хачатрян Х. А., Терджян Ц. Э.* О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна в пространстве $L_1(0, +\infty)$ // Мат. тр. – 2015. – **18**, № 1. – С. 190 – 200.
20. *Mingarelli A. B.* Sturm – Liouville problems and Hammerstein operators // J. Integral Equat. and Appl. – 1992. – **4**, № 1. – P. 83 – 88.
21. *Хачатрян Х. А.* О решении одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна – Немыцкого на всей оси // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2013. – **21**, № 2. – С. 154 – 161.
22. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. – Т. 1. – 680 с.
23. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1982.
24. *Арабаджян Л. Г., Хачатрян А. С.* Об одном классе интегральных уравнений типа свертки // Мат. сб. – 2007. – **198**, № 7. – С. 45 – 62.
25. *Енгибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г.* Системы интегральных уравнений Винера – Хопфа и нелинейные уравнения факторизации // Мат. сб. – 1984. – **124(166)**, № 2(6). – С. 189 – 216.
26. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1984. – **22**. – С. 175 – 242.

Получено 18.12.15