УДК 512.542

В. Н. Семенчук (Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины, Беларусь)

МИНИМАЛЬНЫЕ НЕСВЕРХРАЗРЕШИМЫЕ И МИНИМАЛЬНЫЕ НЕНИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ И ИХ РОЛЬ В ИЗУЧЕНИИ СТРОЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

We study the influence of minimal nonsupersoluble subgroups and minimal nonnilpotent subgroups (Schmidt subgroups) of a group on its structure.

Вивчається вплив мінімальних ненадрозв'язних підгруп, мінімальних ненільпотентних підгруп (підгруп Шмідта) групи на її будову.

Напомним, что минимальной не $\mathfrak{F}$-группой (критической группой) называется группа, не принадлежащая некоторому классу групп $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$.

Важность изучения таких групп следует из того факта, что любая группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, содержит минимальную не $\mathfrak{F}$-подгруппу.

Начало изучения таких групп восходит к работе Миллера – Морена [1]. В данной работе были изучены минимальные неабелевы группы. В настоящее время такие группы называют группами Миллера – Морена.

Следующий важный шаг в данном направлении был сделан О. Ю. Шмидтом, который в работе [2] изучил минимальные ненильпотентные группы (группы Шмидта).

В 1954 году Хупперт [3], а затем Дерк [4] изучили минимальные несверхразрешимые группы. В 1979 году В. Н. Семенчук в работе [5] описал строение разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$-групп для произвольной насыщенной наследственной формации $\mathfrak{F}$. Впервые на возможность изучения строения конечных групп с помощью критических подгрупп обратил внимание С. А. Чунихин в работе [6]. Именно развитию данного направления и посвящена настоящая работа. В работе, в частности, исследуется влияние внешних свойств групп Шмидта и минимальных несверхразрешимых групп на строение конечных групп.

Предварительные результаты. Необходимые определения и обозначения можно найти в [7]. Напомним некоторые из них. Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Если $p \in \mathbb{P}$ и $\pi \subseteq \mathbb{P}$, то $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ и $p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$; $\pi(G)$ — множество простых делителей порядка группы G; pd-группа — группа G, у которой $p \in \pi(G)$; G_p — силовская p-подгруппа группы G; $|\pi(G)|$ — число простых делителей порядка группы G.

Формация $\mathfrak{F}$ — класс групп, замкнутых относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *наследственной*, если она замкнута относительно взятия подгрупп, и *насыщенной*, если она замкнута относительно расширений Фраттини.

Если $\mathfrak{F}$ — класс групп и G — группа, то $G^{\mathfrak{F}}$ — пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ формацию всех нильпотентных групп, а через $\mathfrak{U}$ формацию всех сверхразрешимых групп. $\mathfrak{F}\mathfrak{X} = \{G | G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{F}\}$ — произведение формаций $\mathfrak{F}, \mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*проектором*, если выполняются следующие условия:

1) $H \in \mathfrak{F}$;

2) из $H \subseteq U \subseteq G$ и $U/U_0 \in \mathfrak{F}$ всегда следует $HU_0 = H$.

Подгруппа H группы G называется *подгруппой Картера*, если H нильпотентна и $N_G(H) = H$.

Известно, что множество подгрупп Картера разрешимой группы G совпадает с множеством всех $\mathfrak{N}$-проекторов.

Подгруппа H группы G называется *подгруппой Гашюца*, если H сверхразрешима и при $H \neq G$ каждый индекс любой максимальной $(G - H)$-цепи является составным числом.

Известно, что множество всех подгрупп Гашюца разрешимой группы G совпадает с множеством $\mathfrak{U}$-проекторов.

Следующая лемма является очевидной.

Лемма 1. *Если группа G не принадлежит некоторому классу групп $\mathfrak{F}$, то она содержит минимальную не $\mathfrak{F}$-подгруппу.*

В следующей лемме приводятся известные свойства минимальных несверхразрешимых групп.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — минимальная несверхразрешимая группа. Тогда*:

1) *G разрешима и $|\pi(G)| \leq 3$;*

2) *G имеет единственную неединичную нормальную силовскую подгруппу.*

Напомним, что добавлением к нормальной подгруппе K группы G называется такая подгруппа H из G, что $HK = G$, но $H_1K \neq G$ для любой собственной подгруппы H_1 из H. Другое определение добавления следует из следующей леммы.

Лемма 3. *Подгруппа H тогда и только тогда является добавлением к нормальной подгруппе K группы G, когда $HK = G$ и $H \cap K \subseteq \Phi(H)$.*

Следующая лемма следует из следствия 4.2.1 [7].

Лемма 4. *Если N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi(G)$ сверхразрешима, то и N сверхразрешима.*

Хорошо известен следующий результат.

Лемма 5 (Кегель)**.** *Если подгруппа H группы G перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G, то H — субнормальная подгруппа группы G.*

Лемма 6 (Картер, Хоукс, см. теорему 15.9 из [7])**.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, G — группа с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом. Пусть H — такая $\mathfrak{F}$-подгруппа из G, что $HF(G) = G$. Тогда H содержится в некотором $\mathfrak{F}$-проекторе группы G.*

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, у которой любая минимальная несверхразрешимая подгруппа субнормальна в G. Тогда $G = F(G)T$, где T — подгруппа Гашюца группы G.*

Доказательство. Вначале индукцией по порядку группы G покажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, где $\mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп, а $\mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп.

Очевидно, что G — несверхразрешимая группа. Тогда по лемме 1 G содержит минимальную несверхразрешимую подгруппу H. Согласно лемме 2 H разрешима. Следовательно, $1 \neq F(H)$. Из субнормальности H в G следует, что $1 \neq F(H) \subseteq F(G)$. Итак, в G найдется минимальная нормальная разрешимая подгруппа N.

Пусть G/N — сверхразрешимая группа. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{NU}$. Противоречие.

Итак, G/N — несверхразрешима группа. По лемме 1 G/N содержит минимальную несверхразрешимую подгруппу K/N.

Пусть L — добавление к N в K. Тогда $L \cap N \subseteq \Phi(L)$. Ясно, что $L/L \cap N$ — минимальная несверхразрешимая группа. Отсюда следует, что и $L/\Phi(L)$ — минимальная несверхразрешимая подгруппа. Покажем, что L порождается всеми своими минимальными несверхразрешимыми подгруппами. Действительно, пусть R — подгруппа, порожденная всеми минимальными несверхразрешимыми подгруппами из L. Очевидно, что R — нормальная подгруппа из L. Если $R\Phi(L)/\Phi(L)$ — собственная подгруппа из минимальной несверхразрешимой подгруппы $L/\Phi(L)$, то отсюда следует, что $R\Phi(L)/\Phi(L) \in \mathfrak{U}$. По лемме 4 R является сверхразрешимой. Поскольку формация $\mathfrak{U}$ замкнута относительно подгрупп, то R не содержит минимальных несверхразрешимых подгрупп. Противоречие. Итак, $R\Phi(L) = L$. Отсюда следует, что $L = R$. Известно, что подгруппа, порожденная субнормальными подгруппами, — субнормальная подгруппа. А это значит, что L — субнормальная подгруппа группы G. Но тогда и $K = LN$ — субнормальная подгруппа из G. Отсюда K/N субнормальна в G/N. Итак, в G/N все минимальные несверхразрешимые подгруппы субнормальны. По индукции $G/N \in \mathfrak{NU}$. Если T — отличная от N нормальная минимальная разрешимая подгруппа группы G, то, как и выше, нетрудно показать, что $G/T \in \mathfrak{NU}$. Поскольку $\mathfrak{NU}$ — формация, то

$$G = G/T \cap N \in \mathfrak{NU}.$$

Противоречие. Итак, N — единственная минимальная нормальная разрешимая подгруппа группы G.

Пусть $\Phi(G) \neq 1$. По индукции $G/\Phi(G) \in \mathfrak{NU}$. Поскольку $\mathfrak{NU}$ — насыщенная формация, то $G \in \mathfrak{NU}$. Противоречие. Итак, $\Phi(G) = 1$. Отсюда следует, что в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $M \cap N = 1$. Если M сверхразрешима, то и G/N сверхразрешима. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{NU}$. Противоречие. Следовательно, M несверхразрешима и по лемме 1 в M найдется минимальная несверхразрешимая подгруппа A. По условию A — субнормальная подгруппа группы G. По лемме 2 A разрешима. Легко показать, что $1 \neq F(A) \subseteq F(G)$. Следовательно, $M \cap F(G) \neq 1$. Получили противоречие.

Итак, $G \in \mathfrak{NU}$. Отсюда следует, что $G/F(G)$ сверхразрешима. Пусть L — добавление к $F(G)$ в G. Тогда по лемме 3 $L \cap F(G) \subseteq \Phi(L)$. Поскольку $G = F(G)L$ и $G/F(G)$ сверхразрешима, то

$$G/F(G) = F(G)L/F(G) \simeq L/F(G) \cap L$$

сверхразрешима. Отсюда следует, что $L/\Phi(L)$ сверхразрешима. Тогда и L сверхразрешима. По лемме 6 L содержится в некотором $\mathfrak{U}$-проекторе (подгруппе Гашюца) группы G.

Теорема 1 доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть G — конечная группа, у которой любая минимальная несверхразрешимая подгруппа перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G. Тогда $G = F(G)T$, где T — подгруппа Гашюца группы G.*

Доказательство следует из теоремы 1 и леммы 5.

В работе [8] автор начал исследование строения конечных групп, у которых все подгруппы Шмидта субнормальны. Данное исследование было продолжено В. С. Монаховым и В. Н. Княгиной в работе [9]. Детальное изучение таких групп было получено В. А. Ведерниковым в работе [10].

Аналогично теореме 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа, у которой любая подгруппа Шмидта субнормальна в G. Тогда $G = F(G)T$, где T — подгруппа Картера группы G.*

Из данной теоремы с учетом леммы 5 следует такое утверждение.

***Следствие* 2.** *Пусть G — конечная группа, у которой любая подгруппа Шмидта перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G. Тогда $G = F(G)T$, где T — подгруппа Картера группы G.*

Теорема 3. *Если максимальная подгруппа M группы G перестановочна со всеми минимальными несверхразрешимыми подгруппами группы G, то M/M_G сверхразрешима.*

Доказательство. Очевидно, что M несверхразрешима. Тогда по лемме 1 в M найдется минимальная несверхразрешимая подгруппа H. По условию $H^xM = MH^x$ для всех x из G. Если $H^x \not\subseteq M$, то $G = MH^x$. Поскольку $H^x \subseteq M^x$, то $G = MM^x$. Получили противоречие с тем, что различные перестановочные подгруппы не могут быть сопряжены в их объединении.

Итак, $H^x \subseteq M$ для всех $x \in G$. Следовательно, M_G содержит все минимальные несверхразрешимые подгруппы из M. Покажем, что M/M_G сверхразрешима. Предположим, что M/M_G несверхразрешима. Тогда M/M_G содержит минимальную несверхразрешимую подгруппу H/M_G. Пусть L — добавление к M_G в H. Тогда по лемме 3 $L \cap M_G \subseteq \Phi(L)$. Кроме того,

$$H/M_G = LM_G/M_G \simeq L/L \cap M_G.$$

Поскольку H/M_G и $L/L \cap M_G$ несверхразрешимы, то L несверхразрешима. Следовательно, по лемме 1 L содержит минимальную несверхразрешимую подгруппу T, которая не содержится в $L \cap M_G \subseteq \Phi(L)$. Получили противоречие. Итак, M/M_G сверхразрешима.

Теорема 3 доказана.

Литература

1. *Miller G. A., Moreno H. C.* Nonabelian groups in which every subgroup is abelian // Trans. Amer. Math. Soc. – 1903. – **4**. – P. 398 – 404.
2. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. – 1924. – **31**, № 3. – C. 366 – 372.
3. *Huppert B.* Normalteiler und maximal Untergruppen endlichen Gruppen // Math. Z. – 1954. – **60**. – S. 409 – 434.
4. *Doerk K.* Minimal nicht Uberauflosbare, endliche Gruppen // Math. Z. – 1966. – **91**. – S. 198 – 205.
5. *Семенчук В. Н.* Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы // Алгебра и логика. – 1979. – **18**, № 3. – С. 348 – 382.
6. *Чунихин С. А.* О специальных группах // Мат. сб. – 1933. – **40**, № 1. – С. 39 – 41.
7. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 267 с.
8. *Семенчук В. Н.* Конечные группы с системой минимальных не $\mathfrak{F}$-подгрупп // Подгрупповое строение конечных групп: Тр. Ин-та математики АН БССР. – Минск: Наука и техника, 1981. – С. 138 – 149.
9. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. – 2004. – **45**, № 6. – С. 1316 – 1322.
10. *Ведерников В. А.* Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. – 2007. – **46**, № 6. – С. 669 – 687.

Получено 17.04.17