УДК 517.925

В. М. Евтухов, Е. С. Корепанова (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

The conditions of existence of some types of power-mode solutions of a binomial nonautonomous ordinary differential equation with regularly varying nonlinearities are established.

Для двочленного неавтономного звичайного диференціального рівняння з правильно змінними нелінійностями встановлено умови існування деяких типів розв'язків степеневого вигляду.

1. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j\bigl(y^{(j)}\bigr), \tag{1.1}$$

в котором $n \geq 2,\ \alpha \in \{-1, 1\},\ p\colon [a, \omega[\ \to\ ]\,0, +\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq \leq +\infty,\ \varphi_j : \Delta Y_j \to\ ]0; +\infty[$ — непрерывная и правильно меняющаяся при $y^{(j)} \to Y_j$ функция порядка $\sigma_j,\ j = \overline{0, n-1},\ \Delta Y_j$ — некоторая односторонняя окрестность точки $Y_j,\ Y_j$ равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Функции $\varphi_j,\ j = \overline{0, n-1}$ (см. [12, с. 10], гл. I, § 1), представимы в виде

$$\varphi_j\bigl(y^{(j)}\bigr) = \bigl|y^{(j)}\bigr|^{\sigma_j} L_j\bigl(y^{(j)}\bigr), \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{1.2}$$

где $L_j\colon \Delta Y_j \to\ ]0, +\infty[,\ j = \overline{0, n-1},$ — медленно меняющиеся при $y^{(j)} \to Y_j$ функции. Согласно определению и свойствам медленно меняющихся функций

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{L_j(\lambda y^{(j)})}{L_j(y^{(j)})} = 1 \qquad \text{для любого} \quad \lambda > 0, \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{1.3}$$

причем данные предельные соотношения выполняются равномерно по λ на любом отрезке $[c, d] \in\ ]0, +\infty[$.

При $L_j(y^{(j)}) \equiv 1,\ j = \overline{0, n-1}$, уравнение (1.1) является обобщенным уравнением типа Эмдена – Фаулера

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \bigl|y^{(j)}\bigr|^{\sigma_j} \operatorname{sign} y, \tag{1.4}$$

где $n \geq 2,\ \alpha \in \{-1, 1\},\ \sigma_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{0, n-1},\ p\colon [a, \omega[\ \to\ ]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, частные случаи которого (при $n = 2$), а именно уравнения вида

$$y'' = \alpha p(t)|y|^{\sigma} \operatorname{sign} y, \qquad y'' = \alpha p(t)|y|^{\sigma} \left|y'\right|^{\lambda} \operatorname{sign} y, \quad \sigma, \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

возникают во многих областях естествознания. Большой обзор исследований асимптотических свойств решений первого из уравнений (1.5) приведен в монографии [9]. Асимптотические при $t \uparrow \omega$ свойства решений второго из уравнений (1.5) и уравнений вида (1.4) были детально исследованы в работе [11], а также в работах [2 – 6].

Все решения уравнения (1.1), заданные в некоторой левой окрестности ω, в силу условий на функции p и $\varphi_j,\ j = \overline{0, n-1}$, являются монотонными, вместе с производными до $(n-1)$-го порядка включительно и, как несложно показать, их множество распадается на два класса:

1) решения, для каждого из которых

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(k-1)}(t) = \begin{cases} \text{или } \pm\infty, \\ \text{или } 0, \end{cases} \qquad k=\overline{1,n};$$

2) решения, для каждого из которых существует такое $k\in\{1,\ldots,n\}$, что

$$y(t)=\pi_\omega^{k-1}(t)[c+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \quad c\neq 0, \tag{1.6}$$

где

$$\pi_\omega(t)=\begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega=+\infty, \\ t-\omega, & \text{если} \quad \omega<+\infty. \end{cases}$$

В работах [8, 10] из решений первого класса был выделен достаточно широкий подкласс решений уравнения (1.1), для которых были получены асимптотические при $t\uparrow\omega$ представления и установлены необходимые и достаточные условия их существования.

Целью настоящей работы является установление необходимых и достаточных условий существования решений уравнения (1.1) при $\omega=+\infty$ (и некоторых его частных случаев), для каждого из которых при некотором $k\in\{1,\ldots,n\}$ имеют место представления

$$y(t)=t^{k-1}[c_0+o(1)] \quad \text{при} \quad t\to+\infty, \quad y^{(k-1)}=c_0+o(1), \quad c_0\neq 0,$$

а также получение асимптотических при $t\to+\infty$ формул для их производных до порядка $n-1$ включительно. Кроме того, решается вопрос о количестве исследуемых решений.

2. Основные результаты. При установлении основных результатов будем использовать вспомогательное утверждение, которое следует из теоремы 1.2 работы [7], о существовании исчезающих решений дифференциального уравнения вида

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x)y_j+\sum_{m=1}^{2} g_{im}(x)Y_{im}(x,y_1,\ldots,y_n), \quad i=\overline{1,n}, \tag{2.1}$$

где $Y_{i2}(x,0,\ldots,0)\equiv 0$, $i=\overline{1,n}$, на промежутке $[a,+\infty[$, $a\in\mathbb{R}$, g_{im}, $p_{ij}\colon [a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$, $i,j=\overline{1,n}$, $m=1,2$, и $Y_{im}\colon\Omega_{ab}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$, $m=1,2$, — непрерывные функции,

$$\Omega_{ab}^n=[a,+\infty[\times\mathbb{R}_b^n, \qquad \mathbb{R}_b^n=\left\{(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n\colon |y_i|\le b,\ b\in\mathbb{R}^+,\ i=\overline{1,n}\right\}.$$

При этом будем предполагать, что функции Y_{im}, $i=\overline{1,n}$, $m=1,2$, удовлетворяют условиям

$$\lim_{x\to+\infty} Y_{i1}(x,y_1,\ldots,y_n)=0, \quad i=\overline{1,n}, \quad \text{равномерно по} \quad (y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}_b^n, \tag{2.2}$$

$$\lim_{|y_1|+\ldots+|y_n|\to 0}\frac{Y_{i2}(x,y_1,\ldots,y_n)}{|y_1|+\ldots+|y_n|}=0, \quad i=\overline{1,n}, \quad \text{равномерно по} \quad x\in[a,+\infty[. \tag{2.3}$$

***Замечание* 2.1.** Условия (2.3) заведомо выполняются, если функции Y_{i2}, $i=\overline{1,n}$, имеют непрерывные на множестве Ω_{ab}^n частные производные первого порядка по переменным $y_1,\ldots,y_n$ и $\dfrac{\partial Y_{i2}(y_1,\ldots,y_n)}{\partial y_k}\longrightarrow 0$, $i,k=\overline{1,n}$, при $|y_1|+\ldots+|y_n|\longrightarrow 0$ равномерно по $x\in[a,+\infty[$.

Лемма 2.1. *Пусть функции* Y_{im}, $i = \overline{1,n}$, $m = 1,2$, *удовлетворяют условиям* (2.2), (2.3) *и выполняются следующие условия при любом* $i \in \{1,\ldots,n\}$:

$$p_{ii}(x) \neq 0 \quad \textit{в некоторой окрестности } +\infty, \qquad \int\limits_a^{+\infty} |p_{ii}(x)|dx = +\infty,$$

$$\limsup_{x\to+\infty} \left|\frac{g_{im}(x)}{p_{ii}(x)}\right| < +\infty, \quad m = 1,2,$$

$$\limsup_{x\to+\infty} \left|\frac{p_{ij}(x)}{p_{ii}(x)}\right| = P_{ij}^0 = \mathrm{const}, \qquad j \neq i, \quad j = \overline{1,n}.$$

Пусть, кроме того, постоянные B_i^0, $i = \overline{1,n}$, *определяемые* (*начиная с* $i = n$) *рекуррентными соотношениями*

$$B_n^0 = \sum_{j=1}^{n-1} \left|P_{nj}^0\right|, \qquad B_i^0 = \sum_{j=1}^{i-1} \left|P_{ij}^0\right| + \sum_{j=i+1}^{n} B_j^0 \left|P_{ij}^0\right|, \quad i = \overline{1,n-1},$$

удовлетворяют неравенствам $B_i^0 < 1$ *при всех* $i \in \{1,\ldots,n\}$. *Тогда система дифференциальных уравнений* (2.1) *имеет по крайней мере одно решение* $(y_i)_{i=1}^n : [x_0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_b^n$, *где* $x_0 \in [a,+\infty[$, *стремящееся к нулю при* $x \to +\infty$, *причем таких решений существует* k*-параметрическое семейство, если среди функций* p_{ii}, $i \in \{1,\ldots,n\}$, *имеется* k *функций, которые являются отрицательными в некоторой окрестности* $+\infty$.

Наряду с этой леммой для обозначения знаков чисел из окрестностей ΔY_j[1], $j = \overline{0,n-1}$, положим

$$\mu_j = \begin{cases} 1, & \text{если } \ Y_j = 0 \ \text{ и } \ \Delta Y_j \ \text{ — правая окрестность 0 либо } \ Y_j = +\infty, \\ -1, & \text{если } \ Y_j = 0 \ \text{ и } \ \Delta Y_j \ \text{ — левая окрестность 0 либо } \ Y_j = -\infty. \end{cases}$$

Теорема 2.1. *Для существования решений уравнения* (1.1) *при* $\omega = +\infty$, *для которых имеет место представление*

$$y^{(n-1)} = c + o(1) \qquad \textit{при} \quad t \to +\infty, \quad c \neq 0, \tag{2.4}$$

необходимо и достаточно, чтобы $c \in \Delta Y_{n-1}$ *и выполнялись условия*

$$Y_{j-1} = \begin{cases} +\infty, & \textit{если} \quad \mu_{n-1} > 0, \\ -\infty, & \textit{если} \quad \mu_{n-1} < 0, \end{cases} \qquad \textit{при} \quad j = \overline{1,n-1}, \tag{2.5}$$

$$\int\limits_{a_0}^{+\infty} p(\tau) \prod_{j=0}^{n-2} \varphi_j \left(\mu_j \tau^{n-j-1}\right) d\tau < +\infty, \tag{2.6}$$

где $a_0 \geq a$ *такое, что* $\mu_{k-1} t^{n-k} \in \Delta Y_{k-1}$, $k = \overline{1,n-1}$, *при* $t \geq a_0$. *Более того, при выполнении этих условий существует* n*-параметрическое семейство таких решений и для каждого из них при* $t \to +\infty$ *имеют место асимптотические представления*

[1] При $Y_j = \pm\infty$ здесь и далее будем полагать, что все числа из окрестности ΔY_j одного знака.

$$y^{(j-1)}(t) = \frac{ct^{n-j}}{(n-j)!}[1+o(1)], \quad j = \overline{1, n-1},$$
$$y^{(n-1)}(t) = c + \alpha M(c)\varphi_{n-1}(c)\int\limits_{+\infty}^{t} p(\tau)\prod_{j=0}^{n-2}\varphi_j\left(\mu_j\tau^{n-j-1}\right)d\tau[1+o(1)], \tag{2.7}$$

где $M(c) = \prod_{k=1}^{n-1}\left|\frac{c}{(n-k)!}\right|^{\sigma_{k-1}}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть существует решение y уравнения (1.1) при $\omega = +\infty$, заданное на $[t_0, +\infty[$ и удовлетворяющее (2.4). Тогда $y^{(j)}(t) \in \Delta Y_j$, $j = \overline{0, n-1}$, при всех $t \geq t_0$. Отсюда, в частности, следует, что $c \in \Delta Y_{n-1}$. Интегрируя (2.4) на $[t_0, t]$, а также получаемые при этом асимптотические при $t \to +\infty$ соотношения, приходим к выводу, что для решения и его производных до $(n-2)$-го порядка включительно имеют место первые $n-1$ представление из (2.7), из которых следует справедливость условий (2.5).

Учитывая представления (1.2) правильно меняющихся при $t \to +\infty$ функций $\varphi_j\left(y^{(j)}\right)$, $j = \overline{0, n-2}$, и справедливость выполнения соотношений (1.3) равномерно по λ на любом отрезке $[d_1, d_2] \subset]0, +\infty[$, имеем

$$\varphi_{k-1}\left(\frac{ct^{n-k}}{(n-k)!}[1+o(1)]\right) = \left|\frac{ct^{n-k}}{(n-k)!}[1+o(1)]\right|^{\sigma_{k-1}} L_{k-1}\left(\frac{ct^{n-k}}{(n-k)!}[1+o(1)]\right) =$$
$$= \left|\frac{c}{(n-k)!}\right|^{\sigma_{k-1}} t^{(n-k)\sigma_{k-1}} L_{k-1}\left(\mu_{k-1}t^{n-k}\right)[1+o(1)] =$$
$$= \left|\frac{c}{(n-k)!}\right|^{\sigma_{k-1}} \varphi_{k-1}\left(\mu_{k-1}t^{n-k}\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Тогда, подставляя решение вместе с производными до $(n-1)$-го порядка включительно в (1.1) при $\omega = +\infty$, получаем

$$y^{(n)}(t) = \alpha M(c)\varphi_{n-1}(c)p(t)\prod_{j=0}^{n-2}\varphi_j\left(\mu_j t^{n-j-1}\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Интегрируя данное соотношение на $[t_*, t]$, где $t_* = \max\{a_0, t_0\}$, имеем

$$y^{(n-1)}(t) = y^{(n-1)}(t_*) + \alpha M(c)\varphi_{n-1}(c)\int\limits_{t_*}^{t} p(\tau)\prod_{j=0}^{n-2}\varphi_j\left(\mu_j\tau^{n-j-1}\right)[1+o(1)]d\tau.$$

В силу предположения (2.4)

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{t_*}^{t} p(\tau)\prod_{j=0}^{n-2}\varphi_j\left(\mu_j\tau^{n-j-1}\right)[1+o(1)]d\tau = \mathrm{const}$$

и по признаку сравнения выполняется (2.6). Используя предложение 6 из монографии [1, с. 293] (гл. V, § 3) об асимптотическом вычислении интегралов и условие (2.4), из последнего асимптотического при $t \to +\infty$ соотношения получаем справедливость последнего представления из (2.7).

Достаточность. Выберем произвольным образом число $c \in \Delta Y_{n-1}$ и промежуток $]c_1, c_2[\subset \subset \Delta Y_{n-1}$ такой, что $c \in]c_1, c_2[$. Предположим, что выполняются условия (2.5), (2.6), и покажем, что при этом фиксированном c уравнение (1.1) при $\omega = +\infty$ имеет $(n-1)$-параметрическое семейство решений, заданных на промежутке $[t_0, +\infty[$, удовлетворяющих условию (2.4) и допускающих при $t \to +\infty$ асимптотические представления (2.7).

Полагая

$$W(t) = M(c)\varphi_{n-1}(c) \int\limits_{+\infty}^{t} p(\tau) \prod_{j=0}^{n-2} \varphi_j \left(\mu_j \tau^{n-j-1}\right) d\tau$$

и применяя к уравнению (1.1) при $\omega = +\infty$ преобразование

$$\begin{gathered} y^{(j-1)}(t) = \frac{ct^{n-j}}{(n-j)!} [1 + v_j(t)], \quad j = \overline{1, n-1}, \\ y^{(n-1)}(t) = c + \alpha W(t)[1 + v_n(t)], \end{gathered} \tag{2.8}$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} v_j' = \frac{n-j}{t} [-v_j + v_{j+1}], \quad j = \overline{1, n-2}, \\ v_{n-1}' = \frac{\alpha W(t)}{tc} - \frac{1}{t} v_{n-1} + \frac{\alpha W(t)}{tc} v_n, \end{gathered} \tag{2.9}$$

$$v_n' = \frac{1}{W(t)} \left[-W'(t)[1 + v_n] + p(t) \prod_{j=0}^{n-2} \varphi_j \left(\frac{ct^{n-j-1}}{(n-j-1)!} [1 + v_{j+1}] \right) \varphi_{n-1}(c + \alpha W(t)[1 + v_n]) \right].$$

Рассмотрим ее на множестве $\Omega^n = [t_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n_{1/2}$, где

$$\mathbb{R}^n_{1/2} = \left\{ (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n : |v_j| \le \frac{1}{2}, \ j = \overline{1, n} \right\}$$

и t_0 выбрано с учетом (2.6) так, чтобы при $t > t_0 \ge a_0$ и $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{1/2}$ выполнялись условия

$$\frac{c_i t^{n-j-1}}{(n-j-1)!} [1 + v_{j+1}] \in \Delta Y_j, \qquad j = \overline{0, n-2}, \quad c_i + \alpha W(t)[1 + v_n] \in \Delta Y_{n-1}, \quad i = 1, 2.$$

Так как $c \in]c_1, c_2[$, то при замене в этих включениях c_i на c они также будут выполняться.

Поскольку функции $\varphi_k(y^{(k)})$, $k = \overline{0, n-2}$, представимы в виде (1.2) и соотношения (1.3) выполняются равномерно по λ на любом отрезке $[d_1, d_2] \subset]0, +\infty[$, вследствие непрерывности функции $\varphi_{n-1}(y^{(n-1)})$ на ΔY_{n-1} и (2.6) имеем

$$\begin{gathered} \varphi_k \left(\frac{ct^{n-k-1}}{(n-k-1)!} [1 + v_{k+1}] \right) = \varphi_k \left(\frac{ct^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \right) (1 + v_{k+1})^{\sigma_k} (1 + R_k(t, v_{k+1})) = \\ = \left| \frac{c}{(n-k-1)!} \right|^{\sigma_k} \varphi_k \left(\mu_k t^{n-k-1} \right) (1 + v_{k+1})^{\sigma_k} (1 + R_k(t, v_{k+1})), \quad k = \overline{0, n-2}, \\ \varphi_{n-1}(c + \alpha W(t))[1 + v_n] = \varphi_{n-1}(c)(1 + R_{n-1}(t, v_n)), \end{gathered}$$

где функции $R_k(t, v_{k+1})$, $k = \overline{0, n-1}$, стремятся к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $v_{k+1} \in$

$\in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

В силу этих представлений систему уравнений (2.9) запишем в виде

$$\begin{gathered}
v_j' = \frac{n-j}{t}\,[-v_j + v_{j+1}], \quad j = \overline{1, n-2},\\
v_{n-1}' = \frac{\alpha W(t)}{tc} - \frac{1}{t}\,v_{n-1} + \frac{\alpha W(t)}{tc}\,v_n,\\
v_n' = \frac{W'(t)}{W(t)}\left[\sum_{j=1}^{n-1}\sigma_{j-1}v_j - v_n + \sum_{k=1}^{2} Y_{nk}(t, v_1, \ldots, v_n)\right],
\end{gathered} \tag{2.10}$$

где $Y_{n1}(t, v_1, \ldots, v_n) = R(t, v_1, \ldots, v_n)(1+v_1)^{\sigma_0}(1+v_2)^{\sigma_1}\ldots(1+v_{n-1})^{\sigma_{n-2}}$, $R(t, v_1, \ldots, v_n) = (1 + R_0(t, v_1))\ldots(1 + R_{n-1}(t, v_n)) - 1$ при $t \to +\infty$ стремится к нулю равномерно по $v_i \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $i = \overline{1, n}$,

$$Y_{n2}(t, v_1, \ldots, v_n) = (1+v_1)^{\sigma_0}(1+v_2)^{\sigma_1}\ldots(1+v_{n-1})^{\sigma_{n-2}} - \sigma_0 v_1 - \ldots - \sigma_{n-2}v_{n-1} - 1.$$

Полагая в ней

$$v_j = \delta z_j, \qquad j = \overline{1, n-1}, \quad v_n = z_n, \tag{2.11}$$

где δ выбрано так, чтобы выполнялось неравенство $0 < \delta < \dfrac{1}{|\sigma_0| + \ldots + |\sigma_{n-2}|}$, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
z_j' = \frac{n-j}{t}\,[-z_j + z_{j+1}] \quad j = \overline{1, n-2},\\
z_{n-1}' = \frac{\alpha W(t)}{\delta tc} - \frac{1}{t} z_{n-1} + \frac{\alpha W(t)}{\delta tc}\,z_n,\\
z_n' = \frac{W'(t)}{W(t)}\left[\delta(\sigma_0 z_1 + \ldots + \sigma_{n-2}z_{n-1}) - z_n + \sum_{k=1}^{2} Z_{nk}(t, z_1, \ldots, z_n)\right],
\end{gathered} \tag{2.12}$$

в которой $Z_{nk}(t, z_1, \ldots, z_n) = Y_{nk}\left(t, \frac{1}{\delta}\,v_1, \ldots, \frac{1}{\delta}\,v_{n-1}, v_n\right)$, $k = 1, 2$, и такие, что $\lim_{t\to+\infty} Z_{n1}(t, z_1, \ldots, z_n) = 0$ равномерно по $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}_l^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n\colon |z_j| \le l,\ j = \overline{1, n}\}$, $l = \min\left\{\frac{1}{2\delta}, \frac{1}{2}\right\}$, $\lim_{|z_1|+\ldots+|z_n|\to 0} \dfrac{\partial Z_{n2}(t, z_1, \ldots, z_n)}{\partial z_k} = 0$, $k = \overline{1, n}$, равномерно по $t \in]t_1, +\infty[$, $t_1 \in [t_0, +\infty[$.

В силу вида $W(t)$ и (2.6)

$$\lim_{t\to+\infty} W(t) = 0, \qquad \int_{t_0}^{+\infty} \frac{W'(t)dt}{W(t)} = \pm\infty, \qquad \frac{W'(t)}{W(t)} < 0 \quad \text{при} \quad t > t_0.$$

При указанном выборе числа δ в силу приведенных выше условий для системы (2.12) выполнены все условия леммы 2.1. Тогда у нее существует $(n-1)$-параметрическое семейство стремящихся к нулю при $t \to +\infty$ решений $(z_j)_{j=1}^n\colon [t_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_l^n$, каждому из которых в силу замен (2.8) и (2.11) соответствует решение вида (2.4) дифференциального уравнения (1.1) при $\omega = +\infty$, допускающее асимптотические представления (2.7). А поскольку это утверждение справедливо при любом $c \in]c_1, c_2[$, то существует n-параметрическое семейство решений уравнения (1.1) при $\omega = +\infty$ с такими представлениями.

Теорема 2.1 доказана.

Чтобы сформулировать следующий результат, будем считать, что

$$\Delta Y_{n-1} = \begin{cases} \big[y^0_{n-1}, Y_{n-1}\big[, & \text{если } \ \Delta Y_{n-1} \ \text{— левая окрестность } \ Y_{n-1}, \\ \big]Y_{n-1}, y^0_{n-1}\big], & \text{если } \ \Delta Y_{n-1} \ \text{— правая окрестность } \ Y_{n-1}, \end{cases}$$

и положим

$$\Phi(y) = \int\limits_B^y \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)}, \quad B = \begin{cases} Y_{n-1}, & \text{если } \displaystyle\int_{y^0_{n-1}}^{Y_{n-1}} \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)} < +\infty, \\ y^0_{n-1}, & \text{если } \displaystyle\int_{y^0_{n-1}}^{Y_{n-1}} \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)} = \pm\infty. \end{cases}$$

Поскольку $\Phi'(y) > 0$ при $y \in \Delta Y_{n-1}$, то $\Phi\colon \Delta Y_{n-1} \to \Delta Z_{n-1}$, где

$$\Delta Z_{n-1} = \begin{cases} [z^0_{n-1}, Z_{n-1}[, & \text{если } \ \Delta Y_{n-1} \ \text{— левая окрестность } \ Y_{n-1}, \\ ]Z_{n-1}, z^0_{n-1}], & \text{если } \ \Delta Y_{n-1} \ \text{— правая окрестность } \ Y_{n-1}, \end{cases}$$

$Z_{n-1} = \lim_{y \to Y_{n-1}} \Phi(y)$, $z^0_{n-1} = \Phi(y^0_{n-1})$, и для нее существует обратная функция $\Phi^{-1}\colon \Delta Z_{n-1} \to \Delta Y_{n-1}$.

Кроме того, при $Y_{j-1} = \pm\infty$, $j = \overline{1, n-2}$, введем функцию

$$I(t) = \int\limits_A^t p(\tau) \prod_{j=0}^{n-3} \varphi_j\big(\mu_j \tau^{n-j-2}\big) d\tau,$$

где

$$A = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \displaystyle\int_{a_0}^{+\infty} p(\tau) \prod\nolimits_{j=0}^{n-3} \varphi_j\big(\mu_j \tau^{n-j-2}\big) d\tau < +\infty, \\ a_0, & \text{если } \displaystyle\int_{a_0}^{+\infty} p(\tau) \prod\nolimits_{j=0}^{n-3} \varphi_j\big(\mu_j \tau^{n-j-2}\big) d\tau = \pm\infty, \end{cases}$$

$a_0 \ge a$ такое, что $\mu_{k-1} t^{n-k-1} \in \Delta Y_{k-1}$ при $t \ge a_0$, $k = \overline{1, n-2}$.

Теорема 2.2. *Пусть* $\sigma_{n-1} \neq 1$. *Для существования решений уравнения* (1.1) *при* $\omega = +\infty$, *для которых имеет место представление*

$$y^{(n-2)}(t) = c + o(1) \quad \textit{при} \quad t \to +\infty, \quad c \neq 0, \tag{2.13}$$

необходимо и достаточно, чтобы $c \in \Delta Y_{n-2}$ *и выполнялись условия*

$$Y_{n-1} = 0, \quad Y_{j-1} = \begin{cases} +\infty, & \textit{если} \quad \mu_{n-2} > 0, \\ -\infty, & \textit{если} \quad \mu_{n-2} < 0, \end{cases} \quad \textit{при} \quad j = \overline{1, n-2}, \tag{2.14}$$

$$A = +\infty, \quad \textit{если} \quad B = 0, \qquad A = a_0, \quad \textit{если} \quad B = y^0_{n-1}, \tag{2.15}$$

$$\alpha y^0_{n-1}(1-\sigma_{n-1})I(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a_0, +\infty] \tag{2.16}$$

и

$$\int\limits_{a_1}^{+\infty} \left|\Phi^{-1}(\alpha I(\tau))\right| d\tau < +\infty, \tag{2.17}$$

где $a_1 \geq a_0$ *такое, что* $\alpha I(t) \in \Delta Z_{n-1}$ *при* $t \geq a_1$. *Более того, при выполнении этих условий в случае* $\operatorname{sign} I(t) = 1$ *при* $t > a_0$ *существует* n*-параметрическое, а в случае* $\operatorname{sign} I(t) = -1$ *при* $t > a_0$ — $(n-1)$*-параметрическое семейство таких решений и для каждого из них при* $t \to +\infty$ *имеют место асимптотические представления*

$$\begin{gathered} y^{(j-1)}(t) = \frac{ct^{n-j-1}}{(n-j-1)!}\,[1+o(1)], \quad j = \overline{1, n-2}, \\ y^{(n-2)}(t) = c + (\varphi_{n-2}(c)M(c))^{\frac{1}{1-\sigma_{n-1}}} \int\limits_{+\infty}^{t} \Phi^{-1}(\alpha I(s))ds\,[1+o(1)], \\ y^{(n-1)}(t) = (\varphi_{n-2}(c)M(c))^{\frac{1}{1-\sigma_{n-1}}}\,\Phi^{-1}(\alpha I(t))\,[1+o(1)], \end{gathered} \tag{2.18}$$

где $M(c) = \prod_{k=1}^{n-2}\left|\dfrac{c}{(n-k-1)!}\right|^{\sigma_{k-1}}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть существует решение y уравнения (1.1) при $\omega = +\infty$, заданное на $[t_0, +\infty[$ и удовлетворяющее (2.13). Тогда $y^{(j)}(t) \in \Delta Y_j$, $j = \overline{0, n-1}$, при всех $t \geq t_0$. Отсюда, в частности, следует, что $c \in \Delta Y_{n-2}$. Из уравнения (1.1) при $\omega = +\infty$ следует, что $y^{(n-1)}(t)$ является строго монотонной функцией на $[t_0, +\infty[$, и в силу того, что $c \in \Delta Y_{n-2}$, ее пределом может быть только 0. Таким образом, первое из условий (2.14) выполнено.

Интегрируя (2.13) на $[t_0, t]$, а также получаемые при этом асимптотические при $t \to +\infty$ соотношения, приходим к выводу, что для решения и его производных до $(n-3)$-го порядка включительно имеют место первые $n-2$ представления из (2.18), из которых следует справедливость условий (2.14).

Кроме того, учитывая представления (1.2) правильно меняющихся при $t \to +\infty$ функций $\varphi_j\big(y^{(j)}\big)$, $j = \overline{0, n-3}$, и справедливость выполнения соотношений (1.3) равномерно по λ на любом отрезке $[d_1, d_2] \subset]0, +\infty[$, имеем

$$\varphi_{k-1}\left(\frac{ct^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\,[1+o(1)]\right) =$$
$$= \left|\frac{c}{(n-k-1)!}\right|^{\sigma_{k-1}} \varphi_{k-1}\left(\mu_{k-1}t^{n-k-1}\right)[1+o(1)] \qquad \text{при} \quad t \to +\infty, \quad k = \overline{1, n-2}.$$

Тогда, подставляя решение вместе с производными до $(n-2)$-го порядка включительно в (1.1) при $\omega = +\infty$, получаем

$$\frac{y^{(n)}(t)}{\varphi_{n-1}\big(y^{(n-1)}(t)\big)} = \alpha M(c)p(t)\varphi_{n-2}(c)\prod_{j=0}^{n-3}\varphi_j\big(\mu_j t^{n-j-2}\big)[1+o(1)] \qquad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Интегрируя данное соотношение на $[t_*, t]$, где $t_* = \max\{a_0, t_0\}$, и выполняя в интеграле, стоящем слева, замену переменной $s = y^{(n-1)}(t)$, имеем

$$\int\limits_{y_{n-1}(t_*)}^{y_{n-1}(t)} \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)} = \alpha\varphi_{n-2}(c)M(c)\int\limits_{t_*}^{t} p(\tau)\prod_{j=0}^{n-3}\varphi_j\big(\mu_j\tau^{n-j-2}\big)[1+o(1)]d\tau.$$

Так как $y^{(n-1)}(t) \to Y_{n-1} = 0$ при $t \to +\infty$, то интегралы

$$\int\limits_{y^{(n-1)}(t_*)}^{0} \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)} \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{t_*}^{+\infty} p(\tau)\prod_{j=0}^{n-3}\varphi_j\left(\mu_j\tau^{n-j-2}\right)d\tau$$

сходятся и расходятся одновременно. Поэтому справедливо (2.15). Кроме того, с учетом вида функции Φ и ее свойств, а также предложения 6 из монографии [1, с. 293] (гл. V, § 3) об асимптотическом вычислении интегралов, имеем

$$\Phi(y^{(n-1)}(t)) = \alpha\varphi_{n-2}(c)M(c)I(t)[1+o(1)] \qquad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{2.19}$$

Используя предложение 2 из [13, p. 123] (Appendix) и учитывая то, что φ_{n-1} — правильно меняющаяся при $y \to 0$ функция порядка $\sigma_{n-1} \neq 1$, получаем, что $\Phi(y) \sim \dfrac{1}{1-\sigma_{n-1}}\dfrac{y}{\varphi_{n-1}(y)}$ при $y \to 0$. Тогда

$$\lim_{y\to 0}\frac{y\Phi'(y)}{\Phi(y)} = \lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{y}{\varphi_{n-1}(y)}}{\Phi(y)} = 1-\sigma_{n-1}.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{sign}\Phi(y) = \operatorname{sign}\left(y^0_{n-1}(1-\sigma_{n-1})\right)$ при $y \in \Delta Y_{n-1}$ и из (2.19) вытекает справедливость знакового условия (2.16). Кроме того, получили, что $\Phi(y)$ — правильно меняющаяся при $y \to 0$ функция порядка $1-\sigma_{n-1}$ и, в силу свойств правильно меняющихся функций и условия $\sigma_{n-1} \neq 1$, обратная к ней функция $\Phi^{-1}(z)$ является правильно меняющейся при $z \to Z_{n-1} = \lim_{y\to 0}\Phi(y)$ функцией порядка $\dfrac{1}{1-\sigma_{n-1}}$. Тогда с учетом теоремы о равномерной сходимости (см. [12, с. 10], гл. I, § 1) из (2.19) следует, что при $t \to +\infty$

$$y^{(n-1)}(t) = \Phi^{-1}(\alpha\varphi_{n-2}(c)M(c)I(t)[1+o(1)]) = \Phi^{-1}(\alpha\varphi_{n-2}(c)M(c)I(t))[1+o(1)],$$

т. е. имеет место последнее представление из (2.18). Интегрируя его на $[t_*, t]$, где $t_* = \max\{a_1, t_0\}$, получаем

$$y^{(n-2)}(t) = y^{(n-2)}(t_*) + (\varphi_{n-2}(c)M(c))^{\frac{1}{1-\sigma_{n-1}}}\int\limits_{t_*}^{t}\Phi^{-1}(\alpha I(\tau))[1+o(1)]\,d\tau.$$

В силу предположения (2.13) $\lim_{t\to+\infty}\displaystyle\int_{t_*}^{t}\Phi^{-1}(\alpha I(\tau))[1+o(1)]\,d\tau = \mathrm{const}$, тогда по признаку сравнения справедливо (2.17). Используя предложение 6 из монографии [1, с. 293] (гл. V, § 3) об асимптотическом вычислении интегралов, для $(n-2)$-й производной решения получаем представление из (2.18).

Достаточность. Предположим, что выполняются условия (2.14)–(2.17). Выберем произвольным образом число $c \in \Delta Y_{n-2}$ и промежуток $]c_1, c_2[\, \subset \Delta Y_{n-2}$ такой, что $c \in\,]c_1, c_2[$.

Полагая $W(t) = (\varphi_{n-2}(c)M(c))^{\frac{1}{1-\sigma_{n-1}}} \int_{+\infty}^{t} \Phi^{-1}(\alpha I(\tau))\,d\tau$ и применяя к уравнению (1.1) при $\omega = +\infty$ преобразование

$$\begin{gathered} y^{(j-1)}(t) = \frac{ct^{n-j-1}}{(n-j-1)!}\,[1+v_j(t)], \quad j=\overline{1,n-2}, \\ y^{(n-2)}(t) = c + W(t)[1+v_{n-1}(t)], \\ y^{(n-1)}(t) = W'(t)[1+v_n(t)], \end{gathered} \tag{2.20}$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} v_j' = \frac{n-j-1}{t}\,[-v_j+v_{j+1}], \quad j=\overline{1,n-3}, \\ v_{n-2}' = -\frac{1}{t}\,v_{n-2} + \frac{W(t)}{tc}\,v_{n-1} + \frac{W(t)}{tc}, \\ v_{n-1}' = \frac{W'(t)}{W(t)}\,[-v_{n-1}+v_n], \\ v_n' = \frac{1}{W'(t)}\left[-W''(t)[1+v_n] + \alpha p(t)\prod_{j=0}^{n-3}\varphi_j\left(\frac{ct^{n-j-2}}{(n-j-2)!}[1+v_{j+1}]\right)\times\right. \\ \left.\times\varphi_{n-2}(c+W(t)[1+v_{n-1}])\varphi_{n-1}\left(W'(t)[1+v_n]\right)\right]. \end{gathered} \tag{2.21}$$

Рассмотрим ее на множестве $\Omega^n = [t_0,+\infty[\,\times \mathbb{R}^n_{1/2}$, где

$$\mathbb{R}^n_{1/2} = \left\{(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n : |v_j| \le \frac{1}{2},\ j=\overline{1,n}\right\}$$

и t_0 выбрано с учетом (2.17) так, чтобы при $t > t_0 \ge a_0$ и $(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{1/2}$ выполнялись условия

$$\begin{gathered} \frac{c_i t^{n-j-2}}{(n-j-2)!}\,[1+v_{j+1}] \in \Delta Y_j, \quad j=\overline{0,n-3}, \\ c_i + W(t)[1+v_{n-1}] \in \Delta Y_{n-2}, \qquad i=1,2, \quad W'(t)[1+v_n]\in\Delta Y_{n-1}. \end{gathered}$$

Так как $c\in\,]c_1,c_2[$, то при замене в этих включениях c_i на c они также будут выполняться.

Поскольку функции $\varphi_k(y^{(k)})$, $k=\overline{0,n-3}$, и $\varphi_{n-1}(y^{(n-1)})$ представимы в виде (1.2) и соотношения (1.3) выполняются равномерно по λ на любом отрезке $[d_1,d_2]\subset\,]0,+\infty[$, в силу непрерывности функции $\varphi_{n-2}(y^{(n-2)})$ на ΔY_{n-2} и (2.17) имеем

$$\begin{gathered} \varphi_k\left(\frac{ct^{n-k-2}}{(n-k-2)!}\,[1+v_{k+1}]\right) = \\ = \left|\frac{c}{(n-k-2)!}\right|^{\sigma_k}\varphi_k\left(\mu_k t^{n-k-2}\right)(1+v_{k+1})^{\sigma_k}(1+R_k(t,v_{k+1})), \\ \varphi_{n-1}\left(W'(t)[1+v_n]\right) = \varphi_{n-1}\left(W'(t)\right)(1+v_n)^{\sigma_{n-1}}(1+R_{n-1}(t,v_n)), \\ \varphi_{n-2}(c+W(t))[1+v_{n-1}] = \varphi_{n-2}(c)(1+R_{n-2}(t,v_{n-1})), \end{gathered}$$

где функции $R_k(t, v_{k+1})$, $k = \overline{0, n-1}$, стремятся к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $v_{k+1} \in \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Кроме того,

$$W''(t) = \varphi_{n-1}\left(W'(t)\right) \alpha I'(t) (\varphi_{n-2}(c) M(c))^{\frac{1}{1-\sigma_{n-1}}}.$$

В силу этих представлений систему уравнений (2.21) запишем в виде

$$\begin{gathered} v_j' = \frac{n-j-1}{t}\,[-v_j + v_{j+1}], \quad j = \overline{1, n-3}, \\ v_{n-2}' = -\frac{1}{t}\, v_{n-2} + \frac{W(t)}{tc}\, v_{n-1} + \frac{W(t)}{tc}, \\ v_{n-1}' = \frac{W'(t)}{W(t)}\,[-v_{n-1} + v_n], \\ v_n' = \frac{W''(t)}{W'(t)} \left[\sum_{j=1}^{n-2} \sigma_{j-1} v_j + (\sigma_{n-1} - 1) v_n + \sum_{k=1}^{2} Y_{nk}(t, v_1, \ldots, v_n)\right], \end{gathered} \tag{2.22}$$

где $Y_{n1}(t, v_1, \ldots, v_n) = R(t, v_1, \ldots, v_n) \prod_{j=1}^{n-2} (1 + v_j)^{\sigma_{j-1}} (1 + v_n)^{\sigma_{n-1}}$, $R(t, v_1, \ldots, v_n) = = (1 + R_0(t, v_1)) \ldots (1 + R_{n-1}(t, v_n)) - 1$ при $t \to +\infty$ стремится к нулю равномерно по $v_i \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $i = \overline{1, n}$, $Y_{n2}(t, v_1, \ldots, v_n) = \prod_{j=1}^{n-2} (1 + v_j)^{\sigma_{j-1}} (1 + v_n)^{\sigma_{n-1}} - \prod_{j=1}^{n-2} \sigma_{j-1} v_j - - \sigma_{n-1} v_n - 1$.

Полагая в ней

$$v_j = \delta z_j, \qquad j = \overline{1, n-2}, \quad v_{n-1} = z_{n-1}, \quad v_n = z_n, \tag{2.23}$$

где δ выбрано так, чтобы выполнялось неравенство $0 < \delta < \dfrac{|\sigma_{n-1} - 1|}{|\sigma_0| + \ldots + |\sigma_{n-3}|}$, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} z_j' = \frac{n-j-1}{t}\,[-z_j + z_{j+1}], \quad j = \overline{1, n-3}, \\ z_{n-2}' = -\frac{1}{t}\, z_{n-2} + \frac{W(t)}{\delta tc}\, z_{n-1} + \frac{W(t)}{\delta tc}, \\ z_{n-1}' = \frac{W'(t)}{W(t)}\,[-z_{n-1} + z_n], \\ z_n' = \frac{W''(t)}{W'(t)} \left[\delta \left(\sum_{j=1}^{n-2} \sigma_{j-1} z_j\right) + (\sigma_{n-1} - 1) z_n + \sum_{k=1}^{2} Z_{nk}(t, z_1, \ldots, z_n)\right], \end{gathered} \tag{2.24}$$

в которой $Z_{nk}(t, z_1, \ldots, z_n) = Y_{nk}\left(t, \frac{1}{\delta}\, v_1, \ldots, \frac{1}{\delta}\, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\right)$, $k = 1, 2$, и такие, что $\lim_{t\to+\infty} Z_{n1}(t, z_1, \ldots, z_n) = 0$ равномерно по $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}_l^n = \left\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n : |z_j| \le \le l,\ j = \overline{1, n}\right\}$, $l = \min\left\{\frac{1}{2\delta}, \frac{1}{2}\right\}$, $\lim_{|z_1| + \ldots + |z_n| \to 0} \dfrac{\partial Z_{n2}(t, z_1, \ldots, z_n)}{\partial z_k} = 0$ равномерно по $t \in]a_1, +\infty[$, $a_1 \in [t_0, +\infty[$, $k = \overline{1, n}$.

В силу вида $W(t)$ и (2.17)

$$\lim_{t\to+\infty} W(t)=0, \qquad \int\limits_{t_0}^{+\infty}\frac{W'(t)dt}{W(t)}=\pm\infty, \qquad \int\limits_{t_0}^{+\infty}\frac{W''(t)dt}{W'(t)}=\pm\infty$$

и

$$\frac{W'(t)}{W(t)}<0, \qquad \begin{cases}\dfrac{W''(t)}{W'(t)}(\sigma_{n-1}-1)<0, & \text{если} \quad \operatorname{sign} I(t)=1,\\ \dfrac{W''(t)}{W'(t)}(\sigma_{n-1}-1)>0, & \text{если} \quad \operatorname{sign} I(t)=-1,\end{cases} \qquad \text{при} \quad t>t_0.$$

При указанном выборе числа δ в силу указанных выше условий для системы (2.24) выполнены все условия леммы 2.1. Тогда она имеет k-параметрическое семейство стремящихся к нулю при $t\to+\infty$ решений $(z_j)_{j=1}^n : [a_1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_l^n$, где

$$k=\begin{cases} n-1, & \text{если} \quad \operatorname{sign} I(t)=1,\\ n-2, & \text{если} \quad \operatorname{sign} I(t)=-1,\end{cases}$$

каждому из которых в силу замен (2.20) и (2.23) соответствует решение вида (2.13) дифференциального уравнения (1.1) при $\omega=+\infty$, допускающее асимптотические представления (2.18). А поскольку это утверждение справедливо при любом $c\in\,]c_1,c_2[$, то существует $(k+1)$-параметрическое семейство решений уравнения (1.1) при $\omega=+\infty$ с такими представлениями.

Теорема 2.2 доказана.

Далее рассмотрим частный случай уравнения (1.1) при $\omega=+\infty$, а именно

$$y^{(n)}=\alpha p(t)\prod_{j=0}^{n-k}\varphi_j\big(y^{(j)}\big), \tag{2.25}$$

в котором $n\ge 2$, $\alpha\in\{-1,1\}$, $k\in\{1,\dots,n\}$, $p\colon [a,+\infty[\,\to\,]0,+\infty[$ — непрерывная функция, $a\in\mathbb{R}$, $\varphi_j : \Delta Y_j\to\,]0;+\infty[$ — непрерывная и правильно меняющаяся при $y^{(j)}\to Y_j$ функция порядка σ_j, $j=\overline{0,n-k}$, ΔY_j — некоторая односторонняя окрестность точки Y_j, Y_j равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Теорема 2.3. *Пусть* $i\in\{1,\dots,k\}$. *Для существования решений уравнения* (2.25), *для которых имеет место представление*

$$y^{(n-k)}(t)=\frac{ct^{i-1}}{(i-1)!}[1+o(1)] \qquad \textit{при} \quad t\to+\infty, \quad c\ne 0, \tag{2.26}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$Y_{j-1}=\begin{cases}+\infty, & \textit{если} \quad \mu_{n-k}>0,\\ -\infty, & \textit{если} \quad \mu_{n-k}<0,\end{cases} \qquad \textit{при} \quad i=1, \quad j=\overline{1,n-k}, \quad c\in\Delta Y_{n-k}, \tag{2.27$_1$}$$

$$Y_{j-1}=\begin{cases}+\infty, & \textit{если} \quad \operatorname{sign} c>0,\\ -\infty, & \textit{если} \quad \operatorname{sign} c<0,\end{cases} \qquad \textit{при} \quad i>1, \quad j=\overline{1,n-k+1}, \tag{2.27$_i$}$$

и выполнялось условие

$$\int\limits_{a_0}^{+\infty} \big|W_{k-i}(\tau)\big|\, d\tau < +\infty, \tag{2.28}$$

где $a_0 \geq a$ *такое, что* $\mu_{j-1}t^{n-k+i-j} \in \Delta Y_{j-1},\ j = \overline{1, n-k}$, *при* $t \geq a_0$,

$$W_m(t) = \int\limits_{+\infty}^{t} W_{m-1}(s)ds, \quad m = \overline{1, k-i}, \quad W_0(t) = p(t)\prod_{j=0}^{n-k}\varphi_j\big(\mu_j t^{n-k+i-j-1}\big).$$

Более того, при выполнении этих условий существует $(n-k+i)$*-параметрическое семейство таких решений и для каждого из них при* $t \to +\infty$ *имеют место асимптотические представления*

$$\begin{gathered} y^{(j-1)}(t) = \frac{ct^{n-k+i-j}}{(n-k+i-j)!}\,[1+o(1)], \quad j = \overline{1, n-k+i-1}, \\ y^{(n-k+i-1)}(t) = c + \alpha M(c) W_{k-i+1}(t)[1+o(1)], \\ y^{(j)}(t) = \alpha M(c) W_{n-j}(t)[1+o(1)], \quad j = \overline{n-k+i, n-1}, \end{gathered} \tag{2.29}$$

где $M(c) = \prod_{j=1}^{n-k+1}\left|\dfrac{c}{(n-k+i-j)}\right|^{\sigma_{k-1}}$, $W_{k-i+1}(t) = \displaystyle\int_{+\infty}^{t} W_{k-i}(s)\,ds.$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть существует решение y уравнения (2.25), заданное на $[t_0, +\infty[$ и удовлетворяющее (2.26). Тогда $y^{(j)}(t) \in \Delta Y_j,\ j = \overline{0, n-k}$, при всех $t \geq t_0$. Отсюда, в частности, ясно, что $c \in \Delta Y_{n-k}$ при $i = 1$. Интегрируя (2.26) на промежутке $[t_0, t]$, а также получаемые при этом асимптотические при $t \to +\infty$ соотношения, приходим к выводу, что для решения и всех его производных до $(n-k)$-го порядка включительно имеют место первые $n-k+1$ представление из (2.29), из которых следует справедливость условий (2.27_i), $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Учитывая представления (1.2) правильно меняющихся при $t \to +\infty$ функций $\varphi_j\big(y^{(j)}\big)$, $j = \overline{0, n-k}$, и справедливость выполнения соотношений (1.3) равномерно по λ на любом отрезке $[d_1, d_2] \subset\,]0, +\infty[$, при $t \to +\infty$ имеем

$$\varphi_{s-1}\left(\frac{ct^{n-k+i-s}}{(n-k+i-s)!}\,[1+o(1)]\right) =$$
$$= \left|\frac{c}{(n-k+i-s)!}\right|^{\sigma_{s-1}} \varphi_{s-1}\left(\mu_{s-1}t^{n-k+i-s}\right)[1+o(1)], \quad s = \overline{1, n-k+1}.$$

Тогда, подставляя решение вместе с производными до $(n-k)$-го порядка включительно в (2.25), получаем

$$y^{(n)}(t) = \alpha M(c) p(t) \prod_{j=0}^{n-k}\varphi_j\big(\mu_j t^{n-k+i-j-1}\big)[1+o(1)] \qquad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Интегрируя это соотношение на $[t_*, t]$, где $t_* = \max\{a_0, t_0\}$, имеем

$$y^{(n-1)}(t) = y^{(n-1)}(t_*) + \alpha M(c) \int\limits_{t_*}^{t} p(\tau) \prod_{j=0}^{n-k} \varphi_j\big(\mu_j \tau^{n-k+i-j-1}\big)[1+o(1)]\, d\tau. \qquad (2.30)$$

Из уравнения (2.25) следует, что $y^{(n)}(t)$ сохраняет знак на $[t_0, +\infty[$. Тогда $y^{(n-l)}(t)$, $l = \overline{1, k-i}$, являются строго монотонными функциями на $[t_0, +\infty[$ и, следовательно, имеют предел при $t \to +\infty$. Предполагая, что предел $y^{(n-1)}(t)$ при $t \to +\infty$ отличен от нуля, приходим к противоречию с условием (2.26). Отсюда следует, что в (2.30) интеграл, стоящий справа, при $t \to +\infty$ имеет конечный предел и для $(n-1)$-й производной решения имеет место представление из (2.29). Продолжая рассуждения аналогичным образом, устанавливаем справедливость последних $k-i$ представлений из (2.29). Интегрируя полученное соотношение для $(n-k+i)$-й производной на $[t_*, t]$, где $t_* = \max\{a_0, t_0\}$, имеем

$$y^{(n-k+i-1)}(t) = y^{(n-k+i-1)}\,(t_*) +$$
$$+\alpha M(c) \int\limits_{t_*}^{t} \int\limits_{+\infty}^{t_{k-i}} \ldots \int\limits_{+\infty}^{t_1} p(\tau) \prod_{j=0}^{n-k} \varphi_j\big(\mu_j \tau^{n-k+i-j-1}\big)[1+o(1)]\, d\tau\, dt_1 \ldots dt_{k-i}. \qquad (2.31)$$

Если предел $y^{(n-k+i-1)}(t)$ при $t \to +\infty$ отличен от $c \neq 0$, то отсюда получаем противоречие с представлением (2.26). Поэтому

$$\lim_{t\to+\infty} \int\limits_{t_*}^{t} \int\limits_{+\infty}^{t_{k-i}} \ldots \int\limits_{+\infty}^{t_1} p(\tau) \prod_{j=0}^{n-k} \varphi_j\big(\mu_j \tau^{n-k+i-j-1}\big)[1+o(1)]\, d\tau\, dt_1 \ldots dt_{k-i} = \mathrm{const}$$

и по признаку сравнения выполняется (2.28), а соотношение (2.31) может быть записано в виде $(n-k+i-1)$-го представления из (2.29).

Далее, с учетом того, что $y^{(n-k+i-1)}(t) \to c$ при $t \to +\infty$, в результате интегрирования получим оставшиеся $i-2$ представления из (2.29), т. е.

$$y^{(n-k+j)}(t) = \frac{ct^{i-j-1}}{(i-j-1)!}\,[1+o(1)] \qquad \text{при} \quad t \to +\infty, \quad j = \overline{1, i-2}.$$

Достаточность. Допустим сначала, что $i \in \{2, \ldots, k\}$ и выполняются условия (2.27_i), (2.28). Выберем произвольным образом число $c \neq 0$ и промежуток $]c_1, c_2[\, \ni c$ такой, что $\operatorname{sign} c_1 = \operatorname{sign} c_2 = \operatorname{sign} c$.

Применяя к уравнению (2.25) преобразование

$$\begin{gathered} y^{(j-1)}(t) = \frac{ct^{n-k+i-j}}{(n-k+i-j)!}\,[1+v_j(t)], \quad j = \overline{1, n-k+i-1}, \\ y^{(n-k+i-1)}(t) = c + \alpha M(c) W_{k-i+1}(t)[1+v_{n-k+i}(t)], \\ y^{(j)}(t) = \alpha M(c) W_{n-j}(t)[1+v_{j+1}(t)], \quad j = \overline{n-k+i, n-1}, \end{gathered} \qquad (2.32)$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$v_j' = \frac{n-k+i-j}{t}\,[-v_j + v_{j+1}], \quad j = \overline{1, n-k+i-2},$$

$$\begin{gathered} v'_{n-k+i-1} = \frac{\alpha M(c) W_{k-i+1}(t)}{tc} - \frac{1}{t} v_{n-k+i-1} + \frac{\alpha M(c) W_{k-i+1}(t)}{tc} v_{n-k+i}, \\ v'_j = \frac{W_{n-j}(t)}{W_{n-j+1}(t)} [-v_j + v_{j+1}], \quad j = \overline{n-k+i, n-1}, \\ v'_n = -\frac{W_0(t)}{W_1(t)} (1+v_n) + \frac{1}{W_1(t)} p(t) \prod_{j=0}^{n-k} \varphi_j \left(\frac{c t^{n-k+i-j-1}}{(n-k+i-j-1)!} [1+v_{j+1}] \right). \end{gathered} \tag{2.33}$$

Рассмотрим ее на множестве $\Omega^n = [t_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n_{1/2}$, где

$$\mathbb{R}^n_{1/2} = \left\{ (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n : |v_j| \le \frac{1}{2}, \ j = \overline{1, n} \right\}$$

и t_0 выбрано с учетом (2.28) так, чтобы при $t > t_0 \ge a_0$ и $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{1/2}$ выполнялись условия

$$\frac{c_m t^{n-k+i-j}}{(n-k+i-j)!} [1+v_j] \in \Delta Y_{j-1}, \qquad j = \overline{1, n-k+1}, \quad m = 1, 2.$$

Так как $c \in]c_1, c_2[$, то при замене в этих включениях c_m на c они также будут выполняться.

Поскольку функции $\varphi_j(y^{(j)})$, $j = \overline{0, n-k}$, представимы в виде (1.2) и соотношения (1.3) выполняются равномерно по λ на любом отрезке $[d_1, d_2] \subset]0, +\infty[$, то

$$\varphi_j \left(\frac{c t^{n-k+i-j-1}}{(n-k+i-j-1)!} [1+v_{j+1}] \right) = \\ = \left| \frac{c}{(n-k+i-j-1)!} \right|^{\sigma_j} \varphi_j \big(\mu_j t^{n-k+i-j-1}\big) (1+v_{j+1})^{\sigma_j} \big(1 + R_j(t, v_{j+1})\big),$$

где $R_j(t, v_{j+1})$ стремятся к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $v_{j+1} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

В силу этих представлений систему уравнений (2.33) запишем в виде

$$\begin{gathered} v'_j = \frac{n-k+i-j}{t} [-v_j + v_{j+1}], \quad j = \overline{1, n-k+i-2}, \\ v'_{n-k+i-1} = \frac{\alpha M(c) W_{k-i+1}(t)}{tc} - \frac{1}{t} v_{n-k+i-1} + \frac{\alpha M(c) W_{k-i+1}(t)}{tc} v_{n-k+i}, \\ v'_j = \frac{W_{n-j}(t)}{W_{n-j+1}(t)} [-v_j + v_{j+1}], \quad j = \overline{n-k+i, n-1}, \\ v'_n = \frac{W_0(t)}{W_1(t)} \left[\sum_{j=1}^{n-k+1} \sigma_{j-1} v_j - v_n + \sum_{m=1}^{2} Y_{nm}(t, v_1, \ldots, v_n) \right], \end{gathered} \tag{2.34}$$

где $Y_{n1}(t, v_1, \ldots, v_n) = R(t, v_1, \ldots, v_n)(1+v_1)^{\sigma_0}(1+v_2)^{\sigma_1} \ldots (1+v_{n-k+1})^{\sigma_{n-k}}$, $R(t, v_1, \ldots, v_n) = (1 + R_0(t, v_1)) \ldots (1 + R_{n-k}(t, v_{n-k+1})) - 1$ при $t \to +\infty$ стремится к нулю равномерно по $v_j \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $j = \overline{1, n}$, $Y_{n2}(t, v_1, \ldots, v_n) = \prod_{j=1}^{n-k+1} (1+v_j)^{\sigma_{j-1}} - \prod_{j=1}^{n-k+1} \sigma_{j-1} v_j - 1$.

Полагая в ней

$$v_j = \delta z_j, \quad j = \overline{1, n-k+1}, \qquad v_j = z_j, \quad j = \overline{n-k+2, n}, \tag{2.35}$$

где δ выбрано так, чтобы выполнялось неравенство $0 < \delta < \dfrac{1}{|\sigma_0| + \ldots + |\sigma_{n-k+1}|}$, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
z_j' = \frac{n-k+i-j}{t}\,[-z_j + z_{j+1}], \quad j = \overline{1, n-k-1},\\
z_{n-k}' = \frac{i}{t}\left[-z_{n-k} + \frac{1}{\delta}\, z_{n-k+1}\right],\\
z_j' = \frac{n-k+i-j}{t}\,[-z_j + z_{j+1}], \quad j = \overline{n-k+1, n-k+i-2},\\
z_{n-k+i-1}' = \frac{\alpha M(c) W_{k-i+1}(t)}{tc} - \frac{1}{t}\, z_{n-k+i-1} + \frac{\alpha M(c) W_{k-i+1}(t)}{tc} z_{n-k+i},\\
z_j' = \frac{W_{n-j}(t)}{W_{n-j+1}(t)}\,[-z_j + z_{j+1}], \quad j = \overline{n-k+i, n-1},\\
z_n' = \frac{W_0(t)}{W_1(t)}\left[\sum_{j=1}^{n-k+1} \delta\sigma_{j-1} z_j - z_n + \sum_{m=1}^{2} Z_{nm}(t, z_1, \ldots, z_n)\right],
\end{gathered} \tag{2.36}$$

в которой $Z_{nm}(t, z_1, \ldots, z_n) = Y_{nm}\left(t, \dfrac{1}{\delta}\, v_1, \ldots, \dfrac{1}{\delta}\, v_{n-k+1}, v_{n-k+2}, \ldots, v_n\right)$, $m = 1, 2$, и такие, что $\lim_{t\to+\infty} Z_{n1}(t, z_1, \ldots, z_n) = 0$ равномерно по $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}_l^n = \big\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n : |z_j| \le l,\ j = \overline{1, n}\big\}$, $l = \min\left\{\dfrac{1}{2\delta}, \dfrac{1}{2}\right\}$, $\lim_{|z_1|+\ldots+|z_n|\to 0} \dfrac{\partial Z_{n2}(t, z_1, \ldots, z_n)}{\partial z_k} = 0$, $k = \overline{1, n}$, равномерно по $t \in]t_1, +\infty[$, $t_1 \in [t_0, +\infty[$.

В силу вида $W_j(t)$, $j = \overline{1, k-i+1}$, и (2.28) $\lim_{t\to+\infty} W_j(t) = 0$,

$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{W_{n-j}(t)dt}{W_{n-j+1}(t)} = \pm\infty, \quad \text{и при} \quad t > t_0 \qquad \frac{W_{n-j}(t)}{W_{n-j+1}(t)} < 0, \quad j = \overline{n-k+i, n}. \tag{2.37}$$

При указанном выборе числа δ в силу приведенных выше условий для системы (2.35) выполнены все условия леммы 2.1. Тогда она имеет $(n-k+i-1)$-параметрическое семейство стремящихся к нулю при $t \to +\infty$ решений $(z_j)_{j=1}^n : [t_1, +\infty[\to \mathbb{R}_l^n$, каждому из которых в силу замен (2.32) и (2.35) соответствует решение вида (2.26) дифференциального уравнения (2.25), допускающее представления (2.29). А поскольку это утверждение справедливо при любом $c \in \,]c_1, c_2[$, то существует $(n-k+i)$-параметрическое семейство решений уравнения (2.25) с такими представлениями.

Далее, пусть $i = 1$ и выполняются условия (2.27_1), (2.28). Выберем произвольным образом число $c \in \Delta Y_{n-k}$ и $]c_1, c_2[\, \subset \Delta Y_{n-k}$ такой, что $c \in \,]c_1, c_2[$.

Сначала, применяя к уравнению (2.25) преобразование (2.32) при $i = 1$, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
v_j' = \frac{n-k+1-j}{t}\,[-v_j + v_{j+1}], \quad j = \overline{1, n-k-1},\\
v_{n-k}' = \frac{\alpha M(c) W_k(t)}{tc} - \frac{1}{t} v_{n-k} + \frac{\alpha M(c) W_k(t)}{tc} v_{n-k+1},\\
v_j' = \frac{W_{n-j}(t)}{W_{n-j+1}(t)}\,[-v_j + v_{j+1}], \quad j = \overline{n-k+1, n-1},
\end{gathered} \tag{2.38}$$

$$v_n' = -\frac{W_0(t)}{W_1(t)}(1+v_n) + \frac{1}{W_1(t)}\, p(t) \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j \left(\frac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!}\, [1+v_{j+1}] \right) \times$$
$$\times \varphi_{n-k}\big(c + \alpha M(c) W_k(t)[1+v_{n-k+1}]\big).$$

Рассмотрим полученную систему на множестве $\Omega^n = [t_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n_{1/2}$, где

$$\mathbb{R}^n_{1/2} = \left\{ (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n : |v_j| \le \frac{1}{2},\ j = \overline{1,n} \right\}$$

и t_0 выбрано с учетом (2.28) так, чтобы при $t > t_0 \ge a_0$ и $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{1/2}$ выполнялись условия

$$\frac{c_m t^{n-k-j+1}}{(n-k-j+1)!}\, [1+v_j] \in \Delta Y_{j-1}, \quad j = \overline{1, n-k},$$
$$c_m + \alpha M(c_m) W_k(t)[1 + v_{n-k+1}(t)] \in \Delta Y_{n-k}, \quad m = 1, 2.$$

Поскольку $c \in]c_1, c_2[$, то при замене в этих включениях c_m на c они также будут выполняться.

По аналогии со случаем $i \in \{2, \ldots, k\}$ запишем систему (2.38) в виде

$$\begin{gathered} v_j' = \frac{n-k+1-j}{t}\, [-v_j + v_{j+1}], \quad j = \overline{1, n-k-1}, \\ v_{n-k}' = \frac{\alpha M(c) W_k(t)}{tc} - \frac{1}{t}\, v_{n-k} + \frac{\alpha M(c) W_k(t)}{tc}\, v_{n-k+1}, \\ v_j' = \frac{W_{n-j}(t)}{W_{n-j+1}(t)}\, [-v_j + v_{j+1}], \quad j = \overline{n-k+1, n-1}, \\ v_n' = \frac{W_0(t)}{W_1(t)} \left[\sum_{j=1}^{n-k} \sigma_{j-1} v_j - v_n + \sum_{m=1}^{2} Y_{nm}(t, v_1, \ldots, v_n) \right], \end{gathered} \tag{2.39}$$

где $Y_{n1}(t, v_1, \ldots, v_n) = R(t, v_1, \ldots, v_n)(1+v_1)^{\sigma_0}(1+v_2)^{\sigma_1} \ldots (1+v_{n-k})^{\sigma_{n-k-1}}$, $R(t, v_1, \ldots, v_n) =$ $= (1 + R_0(t, v_1)) \ldots (1 + R_{n-k}(t, v_{n-k+1})) - 1$ при $t \to +\infty$ стремится к нулю равномерно по $v_j \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$, $j = \overline{1,n}$, $Y_{n2}(t, v_1, \ldots, v_n) = \prod_{j=1}^{n-k} (1+v_j)^{\sigma_{j-1}} - \prod_{j=1}^{n-k} \sigma_{j-1} v_j - 1$.

Полагая в ней

$$v_j = \delta z_j, \qquad j = \overline{1, n-k}, \quad v_j = z_j, \quad j = \overline{n-k+1, n}, \tag{2.40}$$

где δ выбрано так, чтобы выполнялось неравенство $0 < \delta < \dfrac{1}{|\sigma_0| + \ldots + |\sigma_{n-k}|}$, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} z_j' = \frac{n-k+1-j}{t}\, [-z_j + z_{j+1}], \quad j = \overline{1, n-k-2}, \\ z_{n-k-1}' = \frac{2}{t} \left[-z_{n-k-1} + \frac{1}{\delta}\, z_{n-k} \right], \\ z_{n-k}' = \frac{\alpha M(c) W_k(t)}{tc} - \frac{1}{t}\, z_{n-k} + \frac{\alpha M(c) W_k(t)}{tc}\, z_{n-k+1}, \end{gathered} \tag{2.41}$$

$$z'_j = \frac{W_{n-j}(t)}{W_{n-j+1}(t)}\,[-z_j + z_{j+1}], \quad j = \overline{n-k+1, n-1},$$

$$z'_n = \frac{W_0(t)}{W_1(t)}\left[\sum_{j=1}^{n-k} \delta\sigma_{j-1} z_j - z_n + \sum_{m=1}^{2} Z_{nm}(t, z_1, \ldots, z_n)\right],$$

в которой $Z_{nm}(t, z_1, \ldots, z_n) = Y_{nm}\left(t, \frac{1}{\delta}\, v_1, \ldots, \frac{1}{\delta}\, v_n\right)$, $m = 1, 2$, и такие же, как и в случае $i \in \{2, \ldots, k\}$.

С учетом вида $W_j(t)$, $j = \overline{1,k}$, и (2.28) $\lim_{t\to+\infty} W_j(t) = 0$ и имеют место условия (2.37) при $i = 1$. При указанном выборе числа δ в силу указанных выше условий для системы (2.41) справедлива лемма 2.1. Тогда она имеет $(n-k)$-параметрическое семейство стремящихся к нулю при $t \to +\infty$ решений $(z_j)_{j=1}^n : [t_1, +\infty[\to \mathbb{R}_l^n$, $t_1 \in [t_0, +\infty[$, каждому из которых в силу замен (2.32) и (2.40) соответствует решение вида (2.26) дифференциального уравнения (2.25), допускающее асимптотические представления (2.29). А поскольку это утверждение справедливо при любом $c \in\,]c_1, c_2[$, то существует $(n-k+1)$-параметрическое семейство решений уравнения (2.25) с такими представлениями.

Теорема 2.3 доказана.

Из теоремы 2.3 непосредственно следует утверждение для дифференциального уравнения

$$y^{(n)}(t) = \alpha p(t)\varphi(y), \tag{2.42}$$

в котором $n \geq 2$, $\alpha \in \{-1, 1\}$, $p\colon [a, +\infty[\ \to\ ]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $a \in \mathbb{R}$, $\varphi\colon \Delta Y \to\ ]0; +\infty[$ — непрерывная и правильно меняющаяся при $y \to Y$ функция порядка σ, ΔY — некоторая односторонняя окрестность точки Y, Y равно либо 0, либо $\pm\infty$.

***Следствие* 2.1.** *Пусть* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Для существования решений уравнения* (2.42), *для которых имеет место представление*

$$y(t) = \frac{ct^{i-1}}{(i-1)!}\,[1 + o(1)] \qquad \textit{при} \quad t \to +\infty, \quad c \neq 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $c \in \Delta Y$ *при* $i = 1$,

$$Y = \begin{cases} +\infty, & \textit{если} \quad \operatorname{sign} c > 0, \\ -\infty, & \textit{если} \quad \operatorname{sign} c < 0, \end{cases} \qquad \textit{при} \quad i > 1,$$

и выполнялось условие

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{a_0}^{t} (\tau - t)^{n-i} p(\tau)\varphi\left(\mu_0 \tau^{i-1}\right) d\tau = \mathrm{const},$$

где $a_0 \geq a$ *такое, что* $\mu_0 t^{i-1} \in \Delta Y$ *при* $t \geq a_0$.

Более того, при выполнении этих условий существует i*-параметрическое семейство таких решений и для каждого из них имеют место при* $t \to +\infty$ *асимптотические представления*

$$y^{(j-1)}(t) = \frac{ct^{i-j}}{(i-j)!}\,[1 + o(1)], \quad j = \overline{1, i-1},$$

$$y^{(i-1)}(t) = c + \frac{\alpha c}{(i-1)!}\, W_{n-i+1}(t)[1+o(1)],$$
$$y^{(j)}(t) = \frac{\alpha c}{(i-1)!}\, W_{n-j}(t)[1+o(1)], \quad j = \overline{i, n-1},$$

где $W_j(t) = \int_{+\infty}^{t} W_{j-1}(s)\, ds,\ j = \overline{1, n-i+1},\ W_0(t) = p(t)\varphi\left(\mu_0 t^{i-1}\right).$

3. Выводы. В данной работе для двучленного неавтономного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями (1.1) при $\omega = +\infty$ получены необходимые и достаточные условия существования решений, для которых $(n-1)$- или $(n-2)$-я производная стремится к отличной от нуля константе при $t \to +\infty$, а также решений вида

$$y(t) = t^{i-1}[c+o(1)], \qquad c \neq 0, \quad i \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{при} \quad t \to +\infty$$

для некоторых частных случаев уравнения (1.1) при $\omega = +\infty$.

При этом были установлены асимптотические при $t \to +\infty$ формулы для производных таких типов решений до порядка $n-1$ включительно и выяснен вопрос о количестве решений с найденными представлениями. Эти результаты дополняют теорему 16.9 из монографии [9] для уравнений вида (1.4) и следствие 8.2 из монографии [9], касающееся уравнений общего вида.

Литература

1. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
2. *Евтухов В. М.* Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка // Докл. АН СССР. – 1977. – **233**, № 4. – С. 531 – 534.
3. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. – 1982. – **106**, № 3. – С. 473 – 476.
4. *Евтухов В. М.* Асимптотические свойства решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Math. Nachr. – 1984. – **115**. – P. 215 – 236.
5. *Евтухов В. М.* Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка типа Эмдена – Фаулера // Сообщ. АН Грузии. – 1992. – **145**, № 2. – С. 269 – 273.
6. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера n-го порядка // Докл. АН России. – 1992. – **324**, № 2. – С. 258 – 260.
7. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 52 – 80.
8. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотическое представление решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2011. – **47**, № 5. – С. 628 – 650.
9. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 430 с.
10. *Клопот А. М.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 2015. – 148 с.
11. *Костин А. В., Евтухов В. М.* Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения // Докл. АН СССР. – 1976. – **231**, № 5. – С. 1059 – 1062.
12. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
13. *Maric V.* Regular variation and differential equations // Lect. Notes Math. – 2000. – **1726**. – 140 p.

Получено 04.06.16,
после доработки — 22.05.17